HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.





A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVI.

TABLE
POUR L'HISTOIRE.



TABLE POUR LES MÉMOIRES.

FAUTES à corriger dans le Volume de 1782.

Page 69, ligne 3, au lieu de

$$y_s = \frac{(2n)^{2s} \cdot \sqrt{(3)}}{\sqrt{[(2n+1) \cdot (n+1) \cdot 2s\pi]}};$$

lisez $$y_s = \frac{(2n)^{2s} \cdot \sqrt{(3)}}{\sqrt{[(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot s\pi]}}.$$

Pour le Volume de cette année.

Page 25, ligne 13, à la suite de ces mots, une fonction de μ & de ϖ, *ajoutez* μ étant fonction de cos. θ.



HISTOIRE



HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIII.



L'HISTOIRE de l'Académie, telle que M. de Fontenelle en avoit conçu le plan, a contribué ſans doute & au progrès des Sciences & à la gloire de l'Académie.

On ſortoit à peine du temps où l'on n'écrivoit ſur les Sciences qu'en latin & dans le langage des Écoles: les Sciences Phyſiques n'avoient alors qu'une langue vague, obſcure, étrangère à tous ceux qui n'avoient reçu qu'une éducation commune; pour rapprocher cette langue de la

langue ordinaire, & lui conſerver la préciſion que doit avoir celle des Sciences; pour en bannir les mots ſcientifiques qui n'étoient qu'une pédanterie inutile, en gardant ceux qui étoient néceſſaires pour l'exactitude du langage, il falloit le ſecours d'une philoſophie à la fois fine & profonde.

La véritable méthode d'étudier la Nature étoit connue, mais elle n'avoit été pour aucun des Savans, alors exiſtans, celle qu'ils avoient appriſe dans leur jeuneſſe; preſque tous avoient conſervé quelque reſte de la philoſophie ſyſtématiqne, ou même de la philoſophie de mots, qui régnoit encore dans l'École; & ils avoient beſoin d'un Interprète qui ſéparât dans leurs Ouvrages ce qui n'appartenoit qu'à eux, de ce tribut qu'ils payoient aux erreurs de leur première éducation.

Aujourd'hui la langue des Sciences eſt formée; les premières leçons que reçoit la jeuneſſe, renferment ces mêmes principes alors connus ſeulement d'un petit nombre de Savans philoſophes. L'étude de ces Sciences s'eſt répandue dans toutes les claſſes de la Société; les gens du monde n'ont plus même beſoin qu'un Extrait leur facilite l'intelligence d'un Mémoire, & ils auroient quelque droit d'être bleſſés qu'on les ſoupçonnât de ſe contenter de la lecture de l'Extrait ſeul.

Quant aux ſciences Mathématiques, à l'époque du renouvellement de l'Académie, la Méthode Géométrique des Anciens, l'Analyſe de Deſcartes, les Méthodes de ſes premiers Diſciples, & le Calcul nouvellement découvert par Léibnitz & par Newton, partageant encore les eſprits, avoient produit des diſputes, & mêlé des diſcuſſions métaphyſiques aux recherches de la Géométrie; les principes néceſſaires pour appliquer le Calcul aux queſtions de Mécanique, étoient plus obſcurs, moins généralement connus, plus conteſtés encore que ceux de la Géométrie nouvelle.

Il étoit utile, même pour le progrès de ces Sciences, d'en éclaircir la métaphyſique, & de développer l'eſprit

des différentes méthodes qu'elles peuvent employer. Aujourd'hui toutes ces discussions ont été écartées, & en même temps la nature des méthodes analytiques ne permet plus d'en développer l'esprit & la marche, d'en donner un Extrait de manière à se faire entendre même à-demi de ceux qui n'ont pas fait une étude approfondie du Calcul.

L'Histoire de l'Académie avoit encore un autre genre d'utilité; elle servoit à montrer, par les détails des travaux sur les Sciences, combien les objets en sont nobles & imposans; sous combien de rapports ces travaux peuvent concourir au bien général des hommes, ici, par des applications immédiates; là, en détruisant quelques erreurs; ailleurs, en perfectionnant la raison, en offrant à l'oisiveté des ressources plus sûres, moins dangereuses & moins nuisibles que le plaisir & l'intrigue. Mais ces vérités si honorables aux Sciences, alors inconnues du vulgaire, & que la philosophie de Fontenelle présente avec tant de modestie & de grâce, sont aujourd'hui devenues triviales & font une partie de l'opinion populaire. On n'a plus besoin de dire aux Princes, qu'ils ont intérêt de protéger les Sciences; ni au Public, que les Savans ont des droits à sa reconnoissance.

Au règne de l'Érudition on avoit vu succéder le goût des discussions de Métaphysique & de Morale; & l'opinion commune ne plaçoit pas sur la même ligne le Philosophe occupé de ces objets, & celui qui se livroit à l'étude des Sciences naturelles. Arnaud, Malebranche, Grotius, étoient pour le monde de bien plus grands hommes que Boyle, Huygens ou Roëmer. Il falloit venger les Sciences naturelles de cette injustice, en détruisant peu-à-peu un préjugé qu'il eût été imprudent d'attaquer de front; aujourd'hui il ne subsiste plus.

Enfin les Sciences étoient isolées; à peine parmi ceux même qui les cultivoient avec succès, un petit nombre connoissoient-ils les points par où elles se touchent, les objets sur lesquels elles peuvent se réunir, ceux sur

lesquels elles doivent encore rester séparées; & c'étoit dans l'Histoire de l'Académie qu'on pouvoit apprendre à saisir ces liaisons qui n'avoient pu échapper à l'esprit étendu & lumineux de Fontenelle.

Souvent les institutions les plus utiles cessent de l'être, précisément parce qu'elles ont rempli leur but & détruit le mal qu'elles devoient détruire. Il est rare cependant que l'on ait la sagesse de les changer à temps, & qu'après avoir duré long-temps, quoiqu'inutiles, elles ne finissent par être vraiment nuisibles,

L'Académie des Sciences, que le genre de ses travaux accoutume à voir les opinions, les méthodes se détruire & se succéder, est moins faite que tout autre Corps pour partager ce préjugé de l'orgueil, que les institutions d'un être foible & passager peuvent être durables comme l'Univers dont il a été quelques instans une si petite partie. Elle a supprimé les Extraits qui faisoient partie de son Histoire, dès qu'elle en a reconnu le peu d'utilité, & a voulu en même-temps que ces Extraits y fussent remplacés par les Observations qui lui sont adressées, par les Rapports les plus importans qui ont été lûs dans ses Séances.

C'est sous cette forme nouvelle que désormais paroîtra son Histoire.



RAPPORT

Fait à l'Académie des Sciences, ſur la Machine aéroſtatique, de M.rs DE MONTGOLFIER; Par M.rs le Roy, Tillet, Briſſon, Cadet, Lavoiſier, Boſſut, de Condorcet & Deſmareſt.

M. D'ORMESSON, Contrôleur général, frappé de l'expérience faite à Annonay par M.rs de Montgolfier, le 5 Juin dernier, en préſence de M.rs les États particuliers du Vivarais, en a envoyé le procès-verbal à l'Académie. Dans cette expérience, on vit, non ſans un grand étonnement, un globe creux de trente-cinq pieds de diamètre, fait en toile & en papier, & peſant quatre cents cinquante livres, parcourir en l'air plus de douze cents toiſes, en s'élevant à une hauteur conſidérable.

Par la Lettre qui accompagnoit ce procès-verbal, M. le Contrôleur général demandoit à l'Académie ſon jugement ſur cette expérience, & ſur l'eſpèce de machine qui avoit ſervi à la faire. La Compagnie, pour remplir ſes vues, nomma M.rs le Roy, Tillet, Briſſon, Cadet, Lavoiſier, Boſſut, de Condorcet & Deſmareſt, pour prendre connoiſſance & de cette expérience & de cette machine. Il étoit néceſſaire, dans une matière auſſi nouvelle, que les Commiſſaires fuſſent éclairés par des expériences qui ſe fiſſent ſous leurs yeux; il fut décidé en conſéquence, que M. de Montgolfier le jeune (qui étoit arrivé à Paris) feroit exécuter une Machine aéroſtatique aux frais de l'Académie *(a)*, pour pouvoir non-ſeulement répéter

(a) L'Académie, toujours empreſſée à favoriſer les progrès des Arts & des Sciences, avoit en effet décidé que les expériences de la Machine aéroſtatique de M.rs de Montgolfier, ſe feroient à ſes frais; mais le Gouvernement ayant ſenti depuis, l'importance de cette découverte, & que ces frais pourroient être trop conſidérables pour l'Académie, s'eſt chargé de toutes les dépenſes que l'on a faites à cette occaſion.

l'expérience d'Annonay, mais encore en faire plusieurs autres. Nous allons rendre compte à la Compagnie de ces expériences, ainsi que de la nouvelle Machine construite par M. de Montgolfier, & du Mémoire qu'il a lû à cette occasion, depuis la rentrée de la Saint-Martin.

Mais comme l'objet dont nous allons entretenir l'Académie, est des plus importans, nous espérons qu'elle voudra bien nous accorder une attention particulière, pour mieux juger de ce que nous allons lui exposer.

Afin de procéder avec plus d'ordre dans ce Rapport, nous le partagerons en plusieurs articles ; dans le premier, nous dirons un mot de ce que l'on a tenté ou plutôt proposé dans ce genre avant l'expérience d'Annonay ; nous exposerons ensuite les idées & les tentatives qui ont mené successivement M.rs de Montgolfier à la découverte de leur Machine aérostatique ; nous parlerons après des expériences que nous avons vues, des moyens qu'ils emploient pour remplir, ou plutôt pour enlever cette machine, & de la cause qui la soutient en l'air ; nous passerons ensuite au moyen dont on a fait usage, à la place de celui dont ils se servent, pour remplir des globes & des ballons : enfin, nous traiterons, mais fort en abrégé, des différens usages auxquels on peut employer la Machine aérostatique.

Le vol des oiseaux est si étonnant, & la faculté de s'élever & de planer dans les airs seroit pour nous quelque chose de si extraordinaire, & auroit sur l'ordre de la Société des effets si singuliers, qu'il n'est pas surprenant que les hommes s'en soient occupés de tous les temps. De-là, toutes les fables de l'antiquité sur ce sujet; de-là, les efforts qu'ont faits dans différens temps ceux qui se sont cru assez de génie pour parvenir à inventer l'art de voler. Il seroit aussi inutile que déplacé, de rapporter ici ce que les Anciens nous en ont dit : ainsi, passant à des temps moins éloignés, nous nous contenterons de dire qu'on regarde en général Roger Bacon, ce génie si fort au-dessus de son siècle, comme le premier qui ait parlé d'une machine pour voler; c'est dans son Traité *de mirabili potestate Artis & Naturæ, &c.*

Selon ce qu'il nous en dit dans cet Ouvrage, cette machine portoit un ſiége dans lequel un homme étant placé, il pouvoit, par ſon action, ſe donner un mouvement progreſſif, & voler comme un oiſeau. Roger Bacon n'explique pas comment elle ſe ſoutenoit dans l'air, ou ſi cet effet réſultoit de l'action de l'homme ; il aſſure néanmoins qu'une machine de ce genre avoit été faite & eſſayée avec ſuccès par une autre perſonne. Cependant il y a tout à croire qu'elle n'exiſta jamais que dans ſon imagination, & qu'elle n'eut pas plus de réalité que cette fameuſe tête d'airain qu'on lui a attribuée, & qui répondoit, dit-on, aux queſtions qu'on lui faiſoit.

Le P. Lana, long-temps après, vers la fin du ſiècle dernier, imagina une machine qui devoit auſſi ſe ſoutenir dans l'air ; mais il va plus loin que Bacon, car il en indique le moyen. La machine conſiſtoit en quatre globes de cuivre vides d'air, qui devoient, par l'excès de légèreté réſultant de leur capacité, être en état de la faire flotter au milieu de ce fluide ; elle étoit à voiles & à rames. On voit par-là, qu'il avoit ſagement penſé à diviſer en deux parties l'action employée pour aller dans l'air ; l'une, au moyen de laquelle on devoit s'y ſoutenir ; l'autre, par laquelle on devoit s'y mouvoir. Mais pluſieurs Savans, & entre autres *Hooke* & *Borelli* (*b*) critiquèrent fortement & avec raiſon, le moyen qu'il propoſoit, inſiſtant l'un & l'autre ſur l'impoſſibilité de faire des globes d'une capacité auſſi conſidérable que celle qu'il leur donnoit, ſans que ces globes ne crevaſſent par la preſſion de l'atmoſphère.

(*b*) Quelques perſonnes ont prétendu que, dans ſon Traité ſur le vol des Oiſeaux, *Borelli* parle de ces machines compoſées de globes vides d'air, comme propres à nous fournir les moyens de voler; mais ce que l'on vient de rapporter prouve pleinement le contraire ; c'eſt faute d'avoir lû avec aſſez d'attention ce qu'il dit à ce ſujet dans la dernière propoſition de ce Traité, qu'on a pu en prendre cette idée. En effet, loin d'établir la poſſibilité de ſe ſervir de pareilles machines pour ſe ſoutenir & ſe mouvoir dans l'air, il emploie une grande partie de cette dernière propoſition à prouver que ce moyen de voler ne peut être tenté avec aucune eſpèce de ſuccès.

En 1755, ou près d'un siècle après qu'eut paru l'Ouvrage du P. Lana, on imprima à Avignon un Livre intitulé: *l'Art de naviguer dans les airs, amusement physique & géométrique, &c.* L'auteur de cet Ouvrage, le P. Gallien, paroît avoir bien senti en quoi consistoit principalement le moyen de surmonter la difficulté d'élever des corps creux dans l'air. Il remarque judicieusement qu'on ne pourra parvenir à les faire flotter dans ce fluide, qu'en augmentant considérablement la capacité de ces corps, & en les remplissant d'un air beaucoup plus rare : ses paroles méritent d'être rapportées.

Plus ce Vaisseau (car il est ici question d'une vaste machine aérienne), *plus ce Vaisseau,* dit-il, *sera grand, plus la pesanteur en sera absolument plus grande; mais aussi elle en sera moindre relativement à son énorme volume, comme peuvent le comprendre ceux qui ont quelque teinture de Géométrie, &c.* Il en vient après aux dimensions qu'il veut qu'on donne à ce Vaisseau, & elles sont véritablement immenses ; car il veut qu'il soit plus long & plus large que la ville d'Avignon, & qu'il soit haut comme une montagne considérable; il suppose ensuite qu'on le remplisse, en s'élevant assez haut pour cela, d'un air moitié plus léger que celui dans lequel on se propose de le faire flotter.

Mais nous croyons en avoir dit assez, pour faire voir que, comme le titre de son Ouvrage l'annonce, le P. Gallien ne s'est pas occupé sérieusement de cet objet; car il seroit difficile de le croire, aux dimensions impraticables, pour ne rien dire de plus, qu'il donne à toute sa Machine. Cependant on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'il avoit bien jugé des moyens de vaincre une partie des difficultés de faire flotter des corps creux dans l'air, à la manière dont il insiste sur la nécessité d'augmenter prodigieusement leur capacité.

Si nous passons à une époque plus récente, ou à celle de la découverte des nouveaux *airs,* & entre autres de l'air inflammable, il paroît bien qu'on s'en est servi pour remplir

remplir des boules de ſavon, & s'amuſer à voir comment elles s'élèvent, mais qu'on n'a pas employé cet air à d'autres uſages de ce genre ; au moins tout ce qu'on a dit à ce ſujet, ſemble laiſſer tant d'incertitudes, que nous n'avons pu en conclure rien d'aſſez poſitif, pour nous engager à le rapporter ici.

Tel étoit l'état de nos connoiſſances ſur cet objet, lorſque M.rs de Montgolfier commencèrent à s'en occuper : il paroît que le point de vue ſous lequel ils enviſagèrent ce grand problème, d'élever des corps dans l'air, fut celui des nuages, de ces grandes maſſes d'eau, qui, par des cauſes que nous n'avons pas encore pu démêler, parviennent à s'élever & à flotter dans les airs à des hauteurs conſidérables. Occupés de cette idée, ils pensèrent aux moyens d'imiter la Nature, en donnant des enveloppes très-légères à des nuages factices, & en contre-balançant la preſſion d'un air lourd, par la réaction ou l'élaſticité d'un air plus léger. S'étant aſſurés, par une expérience très-ſimple, qu'une chaleur de ſoixante-dix degrés du thermomètre ſuffiſoit, ſelon ce qu'ils rapportent, pour raréfier l'air de la moitié, dans un vaiſſeau fermé, ils en conçurent bientôt l'eſpérance de parvenir, par ce moyen, à remplir leurs vues. Or, tout annonce que leurs méditations ſur ce ſujet remontent au-delà du mois d'Août de l'année dernière 1782 ; mais l'expérience intéreſſante qu'elle leur avoit ſuggérée, ne fut tentée que vers le milieu de Novembre de cette même année. Ce fut à Avignon que M. de Montgolfier l'aîné la fit pour la première fois ; là, il ne vit pas ſans une vive joie, ce que l'on concevra ſans peine, qu'un petit parallélipipède creux, de taffetas, qui contenoit quarante pieds cubes ou à peu-près, ayant été échauffé intérieurement avec du papier, monta rapidement au plafond. Retourné à Annonay peu de temps après, il n'eut rien de plus preſſé que de répéter avec M. ſon frère, cette expérience en plein air, & ils virent, avec la même ſatisfaction, ce parallélipipède s'élever & monter à une hauteur de ſoixante-dix pieds.

Animés par des essais si heureux, ils firent faire une machine plus considérable, & qui contenoit aux environs de six cents cinquante pieds cubes : cette machine réussit également bien ; car, par son excès de légèreté, elle s'éleva avec tant de force, qu'elle rompit les cordes qui la retenoient, & alla tomber sur des côteaux voisins, après être montée à une hauteur de cent à cent cinquante toises.

Pleinement convaincus par ces différentes expériences, de la justesse des conjectures qui les avoient guidés, M.rs de Montgolfier résolurent de tenter les effets de cette machine en grand. Ils en firent faire une en conséquence de trente-cinq pieds de diamètre ; elle pesoit quatre cents cinquante livres, & en soulevoit plus de quatre cents ; c'étoit précisément celle dont il a été question au commencement de ce Rapport, & qui servit après à l'expérience du 5 Juin dernier. Ils tentèrent de l'enlever le 3 d'Avril ; mais un vent impétueux les en empêcha : néanmoins, à l'effort qu'elle fit pour monter, ils reconnurent facilement qu'elle rempliroit complètement leur attente. Le 25 d'Avril, le temps étant plus favorable, ils essayèrent de nouveau de la faire partir ; cependant les gens qui les aidoient, étonnés de la force avec laquelle elle tiroit les cordes, les ayant lâchées brusquement, elle monta si rapidement en l'air, qu'elle leur échappa, & alla tomber à un quart de lieue de-là, après s'être élevée à une hauteur de plus de deux cents toises, & être restée en l'air plus de dix minutes. Enfin, le 5 Juin, ils firent cette expérience, comme nous l'avons dit, en présence des États particuliers du Vivarais & de toute la ville d'Annonay, & avec le succès dont l'Académie a été informée par le procès-verbal dont nous avons parlé.

Nous venons d'exposer en détail les idées de M.rs de Montgolfier, & la suite de leurs différens essais : nous nous y sommes crus obligés ; 1.° pour faire voir la manière dont ils ont été conduits à leur découverte, & qu'elle n'est point un effet du hasard ; 2.° pour montrer que

lorſque la nouvelle en eſt venue ici, cette découverte étoit complète, quant à l'effet en général; 3.° enfin, que ce n'étoit pas, comme quelques gens peu inſtruits l'ont dit, de ces idées qui ont beſoin d'être réaliſées par l'expérience; mais que l'*aéroſtat* étoit véritablement inventé, & que toute une Ville avoit été témoin de ſes effets.

Au reſte, les preuves de tout ce que nous venons de rapporter, réſultent des Lettres que M. de Montgolfier le jeune a écrites à l'un de nous, M. Deſmareſt, & dont pluſieurs ſont même de l'année dernière 1782; nous les mettons ſous les yeux de l'Académie.

Mais il faut en venir aux expériences dont nous avons été témoins.

Pour mieux remplir l'objet de l'Académie, M. de Montgolfier fit conſtruire une machine aéroſtatique, exactement de la même manière que celle d'Annonay, c'eſt-à-dire, en toile & en papier, mais dont la capacité étoit plus du double, contenant quarante-cinq mille pieds cubes, & peſant neuf cents livres. Il n'étoit pas aiſé de trouver les facilités néceſſaires pour faire exécuter une auſſi grande machine; il l'étoit encore moins d'avoir un emplacement convenable pour l'enlever, & pour y faire toutes les expériences qu'on voudroit tenter: M. de Montgolfier rencontra tout cela chez ſon ami M. Réveillon, qui a une Manufacture de papiers peints, au faubourg Saint-Antoine. Il y trouva plus encore, car il trouva dans cet ami une activité, un zèle & une intelligence pour faire exécuter tout ce qu'il deſiroit, qui ont frappé tous ceux qui ont été préſens à ces expériences, & auxquels nous nous reprocherions de ne pas rendre ce témoignage devant l'Académie. La machine faite, on ſe prépara à l'enlever; mais cette opération demandant quelques préliminaires & des préparatifs, il eſt néceſſaire d'en donner une idée.

Cette machine ne ſe développe & ne s'élève qu'au moyen des ſubſtances qu'on brûle au-deſſous ou dans ſon intérieur; il faut en conſéquence qu'elle ſoit établie ſur une eſpèce

d'eſtrade élevée de pluſieurs pieds au-deſſus du terrein, & qui ait au milieu une grande ouverture. Au centre de cette ouverture & en bas, eſt placé un grand réchaud de fer à claire-voie, dont on verra l'uſage dans un moment. Pour faciliter le développement de la machine, elle eſt ſoutenue par ſon milieu ou par ſon ſommet, au moyen d'une corde qui va paſſer ſur les poulies de deux grands mâts qui ſont placés des deux côtés de l'eſtrade & à l'oppoſite l'un de l'autre. Par-là, en tirant cette corde, on ſoulève toute la machine; & à meſure que l'on fait du feu avec de la paille & d'autres combuſtibles dans le réchaud dont nous venons de parler, elle ſe développe, ſe gonfle, & enfin s'enlève & part, comme nous le dirons dans la ſuite.

La machine & tout cet appareil étant prêts, le Vendredi 12 de Septembre, on l'eſſaya devant nous; & malgré l'action des hommes employés à la retenir, elle ſe développa d'une manière qui ſurprit tous les Spectateurs, & enleva un poids de quatre cents livres ou environ; mais le vent qui ſurvint, & la pluie qui tomba enſuite en abondance pendant toute la journée, ayant détruit entièrement cette machine, par l'action de l'humidité ſur le papier & ſur la toile dont elle étoit formée, il fallut en refaire une autre. Ce contre-temps étoit d'autant plus fâcheux, que le Roi, qui avoit ordonné que l'expérience s'en fît devant lui à Verſailles, en avoit fixé le jour au Vendredi ſuivant, 19 du même mois.

Cependant M. de Montgolfier ne fut point découragé par cet accident; animé d'un nouveau zèle, il fit exécuter en quatre jours un ſphéroïde en toile de fil & coton, peinte en détrempe ſur les deux côtés; ce ſphéroïde avoit quarante-un pieds de diamètre ſur cinquante-ſept de hauteur, & contenoit trente-ſept mille cinq cents pieds cubes ou à peu-près; il peſoit aux environs de huit cents livres.

On en fit l'eſſai le Jeudi 18; mais au moment où il étoit ſoutenu par ſon point le plus élevé, & qu'on ne faiſoit que de le gonfler, il ſurvint un coup de vent qui le déchira

près de cet endroit. Preſſé par le temps, on ne fit que nouer fortement avec une corde la partie déchirée ; & profitant d'un moment de calme, on enleva de nouveau la machine, en brûlant cinquante livres de paille uniquement ; nous la vîmes alors ſe ſoutenir en l'air fort majeſtueuſement, pendant cinq ou ſix minutes. Aſſurés de ſon effet par cette ſimple expérience, nous n'eûmes pas le moindre doute ſur ſon ſuccès le lendemain à Verſailles.

Un appareil ſemblable à celui dont nous avons donné une idée, étoit établi au milieu de la grande cour du Château, ou de la cour des Miniſtres, avec la machine aéroſtatique étendue ſur l'eſtrade. Tout étant préparé & diſpoſé convenablement, on en fit l'expérience, à un ſignal donné, en préſence du Roi, de la Reine & de toute la Cour, & avec tout le ſuccès que nous avions prévu la veille. Là, on vit en moins de dix minutes, & en brûlant ſeulement quatre-vingts livres de paille & ſept ou huit livres de lainages, la machine ſe ſoulever, ſe développer d'une manière qui frappa d'étonnement tous les Spectateurs, & partir & monter enſuite à une hauteur de plus de deux cents quarante toiſes, quoique chargée de deux cents livres de poids étrangers. Après avoir parcouru un eſpace conſidérable, elle alla tomber à une diſtance de dix-ſept cents toiſes ou à peu-près du point d'où elle étoit partie, étant reſtée en l'air environ dix minutes. Il eſt néceſſaire d'obſerver que cette machine deſcendit ſi doucement, qu'elle ne fit que ployer des branches d'arbres ſur leſquelles elle tomba, & que des animaux qu'on y avoit ſuſpendus n'eurent pas le moindre mal.

La hauteur où nous avons dit qu'elle s'étoit élevée, a été déterminée uniquement par eſtime. M.rs le Gentil & Jeaurat, qui l'ont obſervée ſéparément, en ont fixé depuis la hauteur, l'un à deux cents quatre-vingts toiſes au-deſſus du ſecond étage de l'Obſervatoire, l'autre à deux cents quatre-vingt-treize au-deſſus du rez de chauſſée ; mais il eſt certain qu'elle ſeroit reſtée plus long-temps en l'air, &

auroit été beaucoup plus loin ſans la déchirure de la veille, qui étoit très-conſidérable : en effet, cette déchirure s'étant rouverte, laiſſa ſortir une partie des vapeurs échauffées de l'intérieur de la machine ; & ces vapeurs jointes à celles qui s'échappèrent dans deux ou trois balancemens qu'elle eſſuya, diminuèrent beaucoup de la force qu'elle avoit pour ſe ſoutenir.

Nous devons ajouter pour l'honneur des Sciences, que jamais expérience ne ſe fit avec autant d'éclat & autant de pompe, & n'eut d'auſſi illuſtres Spectateurs, ni en plus grand nombre. Avant l'expérience, le Roi ſe rendit dans le lieu où la machine aéroſtatique étoit établie, paſſa ſous l'eſtrade, dans l'endroit où étoit le réchaud, pour voir les préparatifs, & ſe faire expliquer par M. de Montgolfier les moyens qu'on alloit employer pour développer cette grande maſſe, ſi informe pour le moment, & la faire élever & monter dans les airs ; la Reine & la Famille Royale ſuivirent l'exemple du Roi.

Après des expériences auſſi multipliées, il n'étoit plus poſſible de douter des effets de l'*aéroſtat* de M.rs de Montgolfier ; mais il étoit important de connoître plus particulièrement la nature de leurs procédés pour faire élever cette machine, & de conſtater ſur-tout, ſi avec un aéroſtat d'une capacité ſuffiſante, on pourroit enlever des hommes, & à quel point ils pourroient le gouverner, en obſervant cependant de le retenir juſqu'à un certain degré par des cordes, afin de ne rien haſarder dans ces premières expériences. M. de Montgolfier fit faire, pour remplir cet objet, un nouvel aéroſtat plus grand encore que celui de l'expérience de Verſailles, ayant quarante-cinq pieds de diamètre & ſoixante-dix pieds de haut : il étoit compoſé, en quelque façon, de trois parties ; d'un cylindre qui en faiſoit le corps du milieu, d'une portion de cône placée au-deſſus, & d'une autre partie conique, dans une ſituation renverſée, qui étoit au-deſſous ; le petit diamètre de cette portion de cône étoit

de quatorze pieds. A cette partie étoit adapté un cylindre en toile, autour duquel M. de Montgolfier fit attacher extérieurement une galerie d'osier de deux pieds & demi de large, avec des appuis de trois pieds de haut; il y avoit en outre au milieu du vide formé par cette galerie, une espèce de panier de fil de fer, formant un réchaud, pour y brûler de la paille ou tout autre combustible, lorsque la machine seroit en l'air. En cet état, l'aérostat pesoit aux environs de quatorze à quinze cents livres. Nous ne parlerons pas de quelques expériences préliminaires; nous passerons tout de suite à celle qui fut faite en notre présence, le 15 d'Octobre.

M. Pilatre de Rosier, qui le premier a proposé de monter dans la machine aérostatique abandonnée à elle-même, & qui en a fait publiquement la demande à l'Académie, le 30 du mois d'Août, pour l'expérience qui devoit s'en faire à Versailles les jours suivans; enfin, qui a montré tant d'activité & de courage dans toutes les expériences qu'on en a faites depuis, M. Pilatre de Rosier monta ce jour-là dans la galerie du nouvel aérostat; on l'enleva à une hauteur de cent pieds ou environ, la machine étant retenue à cette élévation par des cordes. Il nous parut entièrement le maître de monter ou de descendre, selon la quantité plus ou moins grande de feu qu'il entretenoit dans le panier ou le réchaud de fer dont nous avons parlé; mais l'expérience du Dimanche suivant démontra d'une manière encore plus sensible, comment, par ce moyen, on pouvoit régler les mouvemens de l'aérostat pour s'élever ou pour s'abaisser. M. Pilatre s'y étant placé, on mit un contre-poids dans un panier d'osier attaché à l'opposite, parce qu'on avoit supprimé une partie de la galerie à cause de sa pesanteur. La machine s'éleva promptement à la hauteur que permettoit la longueur des cordes; après y être restée quelque temps, on la vit redescendre par la cessation du feu; ayant été poussée par le vent sur les

arbres d'un jardin voisin, on s'empressa de dégager les cordages qui la retenoient, & M. Pilatre ayant renouvelé en même temps le feu, il la fit relever promptement, & on la ramena avec la plus grande facilité dans le jardin de M. Réveillon. Encouragés par des essais si propres à rassurer contre les dangers qu'on pouvoit courir dans l'aérostat ainsi élevé en l'air, M. Giroud de Villette & M. le Marquis d'Arlandes y montèrent successivement. Il est nécessaire de faire observer que, dans ces expériences, la machine fut élevée à trois cents vingt-quatre pieds, c'est-à-dire, près de la moitié plus haut que les tours de Notre-Dame; & que M. Pilatre de Rosier, par son activité & par son adresse à bien ménager le feu, la faisoit monter, descendre, raser la terre, remonter encore, enfin lui donnoit tous les divers mouvemens de ce genre qu'il desiroit.

Des expériences de cette nature, & que nous avons cru par-là devoir exposer en détail, étoient bien propres à convaincre de la possibilité d'employer sans danger cette machine à transporter des hommes, sur-tout quand on se rappelle comment, dans l'expérience de Versailles, la machine tomba doucement, quoique d'une hauteur de plus de deux cents toises. Aussi M. de Montgolfier, qui nous paroît n'avoir procédé, dans tout ce qu'il a entrepris à ce sujet, qu'éclairé par la théorie & appuyé par la pratique, ne fut-il plus incertain sur la possibilité de transformer son aérostat en un véritable char aérien; mais il falloit qu'on en fît l'expérience, pour consacrer à jamais cette découverte, & cette expérience a été faite le 21 du mois dernier.

Ce fut dans les jardins de la Muette, devant Monseigneur le Dauphin, accompagné de toute sa Cour, & environné d'une foule de Spectateurs: le temps étant des plus favorables, on vit partir, vers une heure trois quarts, l'aérostat de M. de Montgolfier, monté par M. le Marquis d'Arlandes & par M. Pilatre de Rosier; ils s'élevèrent, selon

ſelon l'obſervation de M. l'Abbé Rochon, à une hauteur de plus de trois cents ſoixante-ſept toiſes; traverſèrent la Seine, paſſèrent ſur la partie du Sud-oueſt de cette Ville, & allèrent deſcendre près du chemin de Fontainebleau, après avoir parcouru un eſpace de près de quatre mille toiſes & être reſtés en l'air pendant plus de dix-ſept minutes. Ils s'élevoient ou s'abaiſſoient, ſelon qu'ils excitoient ou ralentiſſoient le feu; & par cet unique moyen, ils évitèrent, ſi cela ſe peut dire, dans une pareille navigation, les écueils qui leur parurent à craindre, & allèrent deſcendre doucement où ils voulurent arriver. Mais il ſeroit inutile de pouſſer plus loin ce détail, l'Académie ayant entendu de la bouche même de M. le Marquis d'Arlandes le récit de ce voyage qui ſera à jamais célèbre chez la Poſtérité, comme le premier que les hommes aient oſé entreprendre à travers les airs.

Pour ne point interrompre le récit de ces différentes expériences, nous avons remis à ce moment à parler plus en détail de ce qui concerne la manière dont M.rs de Montgolfier s'y prennent pour enlever leur aéroſtat.

On a vu qu'ils font brûler dans un réchaud à claire-voie, de la paille & des matières animales, & qu'il s'enſuit de cette combuſtion & de la chaleur qui s'excite en conſéquence dans l'intérieur de la machine, qu'elle ſe développe, ſe gonfle, s'enlève & monte dans l'air. Il eſt naturel de demander ce qui ſe paſſe dans cette combuſtion, & ſi c'eſt par l'effet de gaz plus légers que l'air atmoſphérique, dont elle occaſionne le dégagement, que l'aéroſtat parvient ainſi à s'élever.

Nous penſons qu'il ſeroit fort difficile, pour ne pas dire impoſſible, de déterminer exactement la nature & le nombre des différens gaz ou vapeurs qui ſe développent dans cette combuſtion; mais ce qui prouve que cet effet tient uniquement à la raréfaction de l'air intérieur de la machine, occaſionnée par la chaleur qu'on y excite, c'eſt qu'à

l'inſtant où, par la diminution de cette chaleur, la raréfaction diminue auſſi, l'aéroſtat deſcend, ou n'eſt plus ſoutenu à la même hauteur; & qu'au contraire, au moment où on la ranime, il remonte. Ce qui confirme encore cette explication, c'eſt que M.rs de Montgolfier ſont obligés de tenir leur aéroſtat ouvert par en-bas. En effet, qu'arrive-t-il par-là? dans l'inſtant où, en excitant le feu, on augmente la chaleur dans cette machine, une partie plus ou moins conſidérable de l'air qui y eſt contenu, eſt obligée de ſortir par l'ouverture inférieure. Or, ſi on ſuppoſe, par exemple, cette chaleur ſuffiſante pour raréfier l'air de moitié, voilà dans un moment le poids de la machine, ou plutôt de l'air qu'elle renferme, diminué dans cette proportion; & ſi ce volume ſe trouve dans un grand rapport avec l'enveloppe, cette cauſe ſuffit pour ſoutenir la machine en l'air, & même pour la porter à une grande hauteur. De plus, ſi l'on ſuppoſoit que la combuſtion des différentes ſubſtances que M.rs de Montgolfier brûlent dans leur aéroſtat, le rempliſſent d'un ou de pluſieurs fluides d'une peſanteur ſpécifique, telle qu'avec le corps de cette machine ils formaſſent un tout plus léger que l'air atmoſphérique, dans une proportion quelconque, il ſeroit certainement néceſſaire, dans cette ſuppoſition, de la fermer, ou du moins d'en rétrécir conſidérablement l'ouverture, pour prévenir l'introduction de l'air atmoſphérique, qui ſans cela ſe gliſſeroit & s'introduiroit le long des parois intérieures de cette machine. Il paroît donc bien prouvé par ces différentes conſidérations, que c'eſt, comme nous l'avons dit, à la raréfaction de l'air de l'intérieur de l'aéroſtat, occaſionnée par le feu qu'on y fait, qu'il faut attribuer la cauſe de ſon élévation dans l'air.

Nous deſirions pouvoir nous en aſſurer expérimentalement, ou trouver quelque moyen de déterminer la peſanteur ſpécifique de l'air, ou des fluides aériformes contenus dans la machine. Par un haſard heureux, l'expé-

rience qu'on fit le 17 d'Octobre, nous en fournit l'occasion; ce jour-là elle resta stationnaire à une petite hauteur, d'où il étoit facile de conclure qu'elle étoit de la même pesanteur spécifique que l'air de l'atmosphère. Elle pesoit alors dix-sept cents livres, y compris le poids de la galerie & de la personne qui étoit dedans. Or, comme cette machine contenoit soixante mille pieds cubes d'air, & que ce jour-là le poids d'un pied cube d'air étoit de $1^{\text{once}} + 3^{\text{gros}} + 20^{\text{grains}}$, il en résulte que le poids de l'air qu'elle déplaçoit, étoit de cinq mille deux cents quatre-vingt-six livres; d'où déduisant dix-sept cents livres pour le poids total de la machine, on a pour celui de l'air, ou des airs qu'elle renfermoit, trois mille huit cents cinquante-six livres, c'est-à-dire, à peu-près les deux tiers du poids de l'air atmosphérique. Ainsi, dans cette expérience, l'air de la Machine étoit raréfié d'un tiers ou aux environs; & dans les autres on trouve encore à peu-près le même résultat, excepté cependant que comme la machine tendoit à s'élever, l'air devoit y être un peu plus raréfié. Quant à la chaleur intérieure de l'aérostat, propre à dilater l'air d'un tiers, il seroit difficile de la déterminer avec précision; cependant il y a tout lieu de croire qu'elle ne différoit pas beaucoup de celle de l'eau bouillante; car, suivant la règle de M. Deluc, sur la dilatation de l'air selon les différens degrés du thermomètre, il paroît qu'une chaleur de soixante-onze degrés un tiers, suffit pour dilater l'air d'une troisième partie. Or, comme celui de l'aérostat s'est dilaté à peu-près de cette quantité, la chaleur de l'intérieur de cette machine n'a pas dû s'éloigner beaucoup, comme nous venons de le dire, de celle de l'eau bouillante.

Mais il faut en revenir au moyen que M.rs de Montgolfier emploient pour enlever leur aérostat: on ne peut disconvenir qu'il ne soit fort simple, peu dispendieux, & fort expéditif, puisque, dans l'expérience de Versailles, par la combustion de quatre-vingts livres de paille & de sept à huit livres de lainages, on a enlevé, en moins de

dix minutes, un aéroſtat contenant au-delà de trente-ſept mille pieds cubes, & peſant ſept à huit cents livres, indépendamment de deux cents livres de poids étrangers dont il étoit chargé ; il ſemble en conſéquence que ce ſoient ces avantages qui ont déterminé M.rs de Montgolfier à employer ce moyen, de préférence à tous les autres. En effet, ſelon ce que M. de Montgolfier le jeune expoſe dans le Mémoire qu'il a lû à l'Académie, depuis la rentrée, comme nous l'avons dit, il n'y a point de fluide d'une peſanteur ſpécifique beaucoup plus légère que l'air atmoſphérique, auquel lui & ſon frère n'aient penſé: ainſi l'eau réduite en vapeurs, l'air inflammable, & d'autres fluides, produits par la combuſtion, ont été ſucceſſivement l'objet de leur attention ; mais l'embarras d'employer les uns, les dépenſes qu'auroient entraînées les autres, & particulièrement l'air inflammable, les ont empêchés de s'en ſervir, ſe propoſant particulièrement de rendre leur opération auſſi ſimple que peu coûteuſe. Et il n'eſt pas étonnant qu'éloignés des ſecours & des reſſources de la Capitale, les difficultés d'employer l'air inflammable ne ſe ſoient multipliées à leurs yeux, & ne les aient encore confirmés dans l'uſage d'un moyen auſſi facile que celui qu'ils avoient imaginé. Mais ſans nous étendre davantage ſur ce ſujet, nous nous bornerons à faire obſerver, comme un fait certain, qu'au moment où la nouvelle de l'expérience d'Annonay arriva ici, les Phyſiciens & les Chimiſtes, inſtruits de la théorie des nouveaux *airs*, indiquèrent d'une voix générale l'air inflammable comme pouvant être celui que M.rs de Montgolfier avoient employé pour enlever leur aéroſtat, & ſur la nature duquel ils ne s'expliquoient pas.

Au reſte, on a vu avec quel ſuccès M.rs Charles & Robert s'en ſont ſervis dans l'expérience faite au Champ-de-Mars le 27 du mois d'Août dernier, & comment ils l'ont employé tout récemment d'une manière encore plus frappante, dans l'expérience mémorable du 1.er de ce mois.

Tout Paris les a vu portés dans un char ſoutenu par un globe de vingt-ſix pieds de diamètre, rempli d'air inflammable, s'élever du milieu du baſſin des Tuileries, & monter ſucceſſivement à une hauteur de plus de trois cents toiſes; pouſſés par un vent de ſud-eſt, ils ont parcouru enſuite, à travers les airs, un eſpace de plus de neuf lieues avant de deſcendre; & M. Charles, reſté ſeul dans le char, après ce voyage, animé par un nouveau courage, s'eſt élevé juſqu'à une hauteur de près de dix-ſept cents toiſes, & a montré aux Phyſiciens comment on pouvoit aller juſque dans les nuages, étudier les cauſes des météores.

On demandera ſans doute lequel du moyen de M.rs de Montgolfier ou de celui qu'ont employé M.rs Charles & Robert, eſt préférable pour ſoutenir en l'air les aéroſtats; mais il y auroit véritablement de la témérité à prononcer ſur cette queſtion, dans un moment où cette découverte eſt encore ſi nouvelle qu'on n'a pas fait la millième partie des recherches qu'on pourra faire pour la perfectionner. M.rs de Montgolfier entrevoient déjà beaucoup de moyens de ſimplifier leur opération, & ils en ont indiqué pluſieurs: d'un autre côté, qui ſait les découvertes qu'on pourra faire pour obtenir de l'air inflammable en bien plus grande quantité, ou beaucoup plus facilement qu'on ne l'a eu juſqu'ici par les moyens connus? Qui ſait ſi l'on ne trouvera pas quelque nouveau fluide plus léger encore que cet air inflammable? On a regardé long-temps l'eſprit-de-vin comme la plus légère de toutes les liqueurs, & enſuite on a découvert l'éther, qui l'eſt davantage. La ſcience des *airs* eſt encore trop nouvelle pour pouvoir rien affirmer ſur ces différens objets. Tout ce que nous pouvons dire, c'eſt que la ſimplicité du moyen de M.rs de Montgolfier, ſa facilité, & la promptitude avec laquelle on peut l'employer, paroiſſent lui donner de grands avantages dans beaucoup d'uſages de la vie civile; mais celui de l'air inflammable ayant l'avantage de diminuer conſidéra-

blement le volume des aérostats, destinés à enlever un poids donné, & ne demandant aucun soin ni aucun approvisionnement de la part de ceux qui sont portés par cette machine, semble par-là beaucoup plus propre à un grand nombre d'usages physiques. En effet, sans parler de beaucoup d'autres, M. Charles a montré comment, avec un aérostat, on peut s'élever jusque dans les nuages pour y faire des observations; & tout annonce que par ce moyen on pourra en faire un grand nombre, à l'aide desquelles on parviendra peut-être à expliquer beaucoup de phénomènes de Météorologie, qui jusqu'ici ont été autant de mystères pour nous.

Attendons ainsi du temps & des recherches postérieures, la décision de cette question, sur la préférence que l'on doit donner au moyen de M.rs de Montgolfier, ou à celui de l'air inflammable, pour enlever des aérostats.

Il faut en venir maintenant aux applications & aux usages de la Machine aérostatique; mais ici nous sommes arrêtés par la multitude de ceux qui se présentent; car il faudroit un volume pour exposer en détail tous ceux où on peut les employer. Nous nous contenterons de dire qu'on pourra s'en servir pour élever des poids à une certaine hauteur, pour passer des montagnes, pour monter sur celles où jusqu'ici personne n'a pu arriver, pour descendre dans des vallées ou des lieux inaccessibles, pour élever des fanaux pendant la nuit à une très-grande hauteur, pour donner des signaux de toute espèce, soit à terre, soit à la mer. Or, tous ces usages, ou au moins une grande partie, avoient déjà été imaginés par M.rs de Montgolfier. L'aérostat pourra être employé encore dans beaucoup d'usages pour la Physique, comme pour mieux connoître les vîtesses & les directions des différens vents qui soufflent dans l'atmosphère; pour avoir des électroscopes portés à une hauteur beaucoup plus grande que celle où on peut élever des cerf-volans; enfin, comme nous l'avons déjà dit, pour s'élever jusque dans la région des nuages, & y aller observer les météores.

D'ailleurs, on sent que tous ces usages se multiplieront

encore, lorſque cette machine aura été perfectionnée ; & même qu'ils deviendront d'une toute autre conſéquence, ſi on parvient jamais à la diriger.

D'après cet expoſé, que nous craindrions d'avoir trop étendu, ſi l'importance du ſujet ne l'avoit exigé, nous croyons que l'Académie a pu prendre une juſte idée de la Machine aéroſtatique de M.rs de Montgolfier, de la cauſe par laquelle elle ſe ſoutient en l'air, enfin de ſes différens effets. Nous penſons en conſéquence qu'elle ne peut approuver d'une manière trop diſtinguée cette machine dont elle a déjà vu des expériences ſi propres à donner les plus grandes eſpérances ſur les applications qu'on pourra en faire dans la ſuite. Et pour donner à M.rs de Montgolfier un témoignage encore plus marqué de l'eſtime que mérite une découverte ſi heureuſe, nous propoſons que l'Académie leur décerne le Prix annuel de ſix cents livres, fondé pour les découvertes nouvelles dans les Arts (par une perſonne inconnue), comme à des Savans auxquels on doit un Art nouveau, qui ſera époque dans l'Hiſtoire des inventions humaines.

Après ce que nous venons de dire, il eſt preſque inutile d'ajouter que le Mémoire de M. de Montgolfier, où il expoſe la ſuite des penſées & des eſſais de ſon frère & de lui, ſur les Machines aéroſtatiques, & les différentes expériences qui en ont été faites, avec les raiſons qui les ont déterminés dans le choix des moyens qu'ils ont employés, mérite d'être imprimé dans le Recueil des Savans Étrangers.





OUVRAGES
PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

UN Citoyen qui desire de rester inconnu, a fait présenter à l'Académie le Mémoire qui suit:

« TANDIS qu'on applaudit au succès des Arts, tandis » qu'on admire les prodiges nouveaux dont ils embellissent » & enrichissent journellement la Société, on ignore, ou » plutôt on oublie, que presque toutes leurs opérations sont » malsaines & meurtrières. Il s'en faut peu que le dénom- » brement des différentes classes d'Ouvriers, ne soit une liste » de victimes.

» *Carrier, Plâtrier, Chaufournier, Briquetier, Tuillier;* » *Tailleur de pierres, Verrier, Miroitier,* ou du moins, » *Ouvrier qui met au tain, Doreur sur métaux, Peintre,* » *Broyeur de couleurs, &c. Foulon, Cardeur, Tisserand,* » *Tanneur, Corroyeur, Chapelier, Buandier, &c. Cribleur,* » *Blutier, Saunier, Brasseur, &c. Amidonnier, Chandelier,* » *Potier de terre, &c. Ouvriers qui creusent les puits, vident* » *les fosses d'aisance, enterrent les morts, &c. Tous les Ouvriers* » *employés à tirer les métaux des mines, & la plupart de ceux* » *qui les travaillent, &c.*

» Dans toutes ces professions, la matière extraite ou » fabriquée s'atténue ou se volatilise, s'insinue dans le corps » humain, & y porte des particules arsenicales, sulfureuses, » métalliques, vénéneuses, &c. ou des molécules incisives,

ou

ou une poussière qui attaque les poumons, ou un air « corrompu, espèce de mouffette artificielle. «

Lorsque la décomposition de la matière n'est pas perni- « cieuse, les Ouvriers périssent, ou par l'action excessive « du feu, ou par une situation forcée & continue, comme « les *Tailleurs*, les *Tireuses* des *Ouvriers en soie*, *&c.* «

Souvent la nature des travaux occasionne des morts « violentes ou des acccidens funestes. Tel est le sort des « gens de peine, qui sont forcés de porter des poids « excessifs, de ceux qui sont placés au-dessus des meules « mues avec une grande vîtesse; de ceux qu'on enferme dans « des roues pour y imprimer, par leur poids & par leur « marche, un mouvement de rotation, &c. «

Les moins malheureux des Artisans contractent des « infirmités graves, comme la foiblesse ou la perte de la « vue, &c. «

Quel triste résultat de l'industrie! Nos bâtimens sont « cimentés avec du sang, nos vêtemens en sont teints, nos « plaisirs en sont infectés, il n'est point de jour où la richesse « n'ordonne des meurtres; & la vie humaine est mise à prix « comme un Effet commerçable. Cependant, parce que le « spectacle de la mort n'est pas présent, parce qu'on peut « se prévaloir de l'usage (cette excuse des ames foibles), « on croit n'être pas inhumain. «

Si tels étoient l'ordre naturel & indispensable des choses, « & la malheureuse condition de l'humanité, que pour jouir « il fallût sacrifier ses semblables; quel homme pourroit sans « rougir & sans frémir, satisfaire, à ce prix, ses besoins, ses « goûts, ses plaisirs? Mais que penser d'une Nation célèbre « par la douceur de ses mœurs, faite pour la Société, pour « s'affecter, & pour aimer ses semblables; que penser de ces « barbares instruits & polis, qui, sans rien perdre de leurs « jouissances, peuvent en prévenir les effets funestes, & « cependant méprisent ou négligent de tels soins? «

Qu'on supplée les hommes par des machines, qu'on « les remplace par des animaux, qu'on éloigne le Travailleur «

» de l'objet, qu'on facilite ſon action par des inſtrumens,
» qu'on emploie des préſervatiſs contre des impreſſions mal-
» ſaines ou des accidens funeſtes ; après quelques frais &
» quelque temps conſacrés à l'invention, à l'eſſai, à la per-
» fection des méthodes nouvelles, on verra le danger de
» pluſieurs profeſſions ceſſer, ou du moins diminuer ; peut-
» être même, ſi des intérêts ſecondaires peuvent être comptés
» après de ſi grands intérêts, peut-être bientôt les ouvrages
» ſeront plus finis & moins diſpendieux. L'humanité ordonne
» la recherche de tels expédiens, le bien de l'État l'exige,
» la raiſon indique la poſſibilité du ſuccès, déjà plus d'un
» exemple l'a prouvé, cependant perſonne encore n'a fait
» d'une telle étude ſon objet principal.

» On vous propoſe, Meſſieurs, de fonder un Prix annuel
» en faveur d'un Mémoire ou d'une Expérience qui rende
» les opérations des Arts mécaniques moins mal-ſaines
» ou moins dangéreuſes.

» L'Académie fera connoître chaque année, quel doit être
» l'objet du Mémoire ou de l'Expérience ; & le premier Prix
» ſera donné dans l'Aſſemblée publique d'après Pâques 1783.

» On deſtine à cette fondation une ſomme de douze
» mille livres, qui ſera placée dans le nouvel Emprunt en
» rente viagère, ſur la tête du Roi & ſur celle de Monſei-
» gneur le Dauphin, & les intérêts ſerviront à payer une
Médaille qui formera le Prix. »

L'ACADÉMIE ayant accepté, avec la permiſſion du Roi, & d'une voix unanime, la donation du Citoyen eſtimable, Auteur de ce Mémoire ; a propoſé pour ſujet du premier Prix de ce genre :

De déterminer la nature & les cauſes des maladies auxquelles ſont expoſés les DOREURS AU FEU OU SUR MÉTAUX ; *& la meilleure manière de les préſerver de ces maladies, ſoit par des moyens phyſiques, ſoit par des moyens mécaniques.*

Le Prix a été décerné à la pièce, *N.° 7*, qui a pour devise :

Non ignara mali miseris succurere disco.

Virgile, *Æneid.*

& dont l'Auteur est M. Henri-Albert Gosse, de Genève.

Cette Pièce a paru répondre le mieux, de toutes celles qui ont été envoyées au Concours, au Sujet que l'Académie a proposé. Elle contient des observations & des expériences intéressantes, un exposé bien fait des maladies des Doreurs, & un moyen d'en préserver ceux qui dorent de petites pièces, lequel, d'après l'expérience, semble avoir bien réussi. Mais en couronnant ce Mémoire, l'Académie auroit desiré qu'il eût renfermé aussi des moyens de mettre à l'abri de ces maladies les Doreurs de grosses pièces. L'Auteur paroît avoir profité, jusqu'à un certain point, des idées ingénieuses que contient sur ce sujet un Écrit de M. Tingri, inséré dans la première partie des Mémoires de la Société de Genève, & il semble s'être restreint comme lui, à ce qui concerne les Doreurs qui travaillent pour les Horlogers. Cependant, comme il est à présumer qu'en donnant plus d'étendue à son *Fourneau préservateur*, il seroit possible de le rendre également propre aux Doreurs de grosses pièces, l'Académie engage M. Gosse à tourner ses vues de ce côté important, & à tirer de ce fourneau une utilité aussi générale qu'elle semble devoir résulter des expériences particulières qu'il en a faites.

L'Académie a cru, par la même raison, devoir faire une mention honorable de la pièce, *N.° 3*, ayant pour devise :

Ars datur optima cui recta physica juvat.

dont l'Auteur s'est fort étendu sur les moyens de préserver des effets du mercure les Doreurs de grosses pieces.

Les Mémoires approuvés par l'Académie, en 1783, & destinés par elle à être imprimés dans le Recueil des Savans-Étrangers, sont au nombre de vingt-un.

Deux Mémoires sur la Cristallisation: Par M. l'abbé Haüi.

Deux Mémoires sur les effets de la lumière sur les Plantes: Par M. l'abbé Tessier.

Sur le Succedanea ou Vernis de la Chine: Par M. Desfontaines.

Sur l'Equisetum: Par M. Descemet.

Observations de Mercure: Par M. Pigot fils.

Sur des Puits méphitiques: Par M. Cadet de Vaux.

Sur l'attraction des Sphéroïdes: Par M. le Gendre.

Sur un nouveau Gaz retiré du Phosphore par les Alkalis: Par M. Gingembre.

Sur la Putréfaction: Par M. le Comte de Prunelai.

Sur les propriétés hygrométriques de la Soude: Par M. de Morveau.

Sur les Séries récurrentes: Par M. Trembley.

Observations astronomiques: Par M. de Lague.

Observations faites sur la Marée, à Bordeaux: Par M. l'abbé Dupont de Jumeaux.

Sur la plante nommée *Œnothera biennis:* Par deux jeunes Amateurs en Botanique.

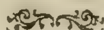
Sur le Cygne chantant: Par M. l'abbé Mongez.

Sur les Probabilités: Par M. Trembley.

Observations de l'éclipse totale de la Lune, du 10 Septembre 1783, faites à Dieppe: Par M. de Lague.

Sur la navigation du golfe de Lyon: Par M. Barthez.

Sur les moyens de mesurer les hauteurs de l'Atmosphère: Par M. Trembley.





ÉLOGE
DE M. HUNTER.

GUILLAUME HUNTER, Agrégé au Collége Royal de Médecine de Londres, Médecin extraordinaire & Accoucheur de la Reine d'Angleterre, Médecin-consultant de l'hôpital des femmes en couche, Professeur d'Anatomie, de l'Académie Royale des Arts, Membre de la Société Royale & de celle des Antiquaires, Président de la Société de Médecine de Londres, Associé-étranger de l'Académie des Sciences & de la Société de Médecine de Paris, naquit le 23 Mai 1718 à Kilbride dans le comté de Lanerk: il étoit le septième des dix enfans de Jean & d'Agnès Hunter. Envoyé à l'âge de quatorze ans dans un Séminaire à Glascow, il y passa cinq années, pendant lesquelles il mérita par sa conduite & son application, l'estime de ses maîtres.

Son père le destinoit à l'état ecclésiastique; mais lorsqu'à dix-neuf ans, ses études étant finies, on lui proposa la signature des articles de foi, à laquelle la loi soumet tous les Membres du Clergé anglican, ni l'autorité ni les prières de son père ne purent l'y résoudre: la franchise de son caractère ne lui permit point d'enchainer par cet acte, la liberté de penser dont il faisoit déjà profession; & jamais il ne voulut se laisser persuader qu'il fût permis, en morale, de signer ce qu'on rejette au fond du cœur, & de promettre d'enseigner ce qu'on ne croit pas. Sa famille avoit fait des sacrifices pour son éducation, il étoit affligé de ne pouvoir répondre à ses vues, & d'être forcé peut-être d'en accepter de nouveaux secours: mais il eut le

bonheur de rencontrer le Docteur Cullen, aujourd'hui célèbre Professeur d'Anatomie à Édimbourg, & qui pratiquoit alors la Médecine à Hamilton. M. Cullen le confirma dans la résolution de suivre sa conscience, lui proposa d'embrasser l'état de Médecin, & obtint le consentement de sa famille. M. Hunter passa trois années dans la maison de son ami, devenu son instituteur & son père; il ne le quitta que pour aller achever à Édimbourg & à Londres, ses études de Médecine, bien décidé à revenir ensuite partager pour toujours la retraite de M. Cullen.

Mais le sort les destinoit tous deux à une vie plus active & leurs talens trop resserrés sur le petit théâtre où l'amitié & la philosophie les vouloient confiner, devoient briller dans les deux capitales de la Grande Bretagne.

M. Hunter vint à Londres en 1741, perdit son père au bout de quelques mois, & ne retourna depuis qu'une seule fois en Écosse, dix ans après, pour revoir sa mère & son ami le Docteur Cullen. Il passa quelques jours dans la demeure de ses pères, acheta des terres pour augmenter l'étendue de leur petit domaine, s'occupa du soin de l'embellir, l'abandonna ensuite à sa mère, & la quitta pour toujours.

En 1743, M. Hunter donna son premier Ouvrage; sa Dissertation présentée à la Société Royale de Londres, a pour objet la structure des cartilages qui terminent les os: on les supposoit composés de couches concentriques recouvertes l'une par l'autre jusqu'à celle qui s'étendoit & se mouloit sur l'extrémité de l'os; M. Hunter prouva qu'au contraire les cartilages sont formés de fibres qui s'élèvent perpendiculairement à cette même extrémité, & sont liées entr'elles par d'autres fibres transversales. Cette découverte de M. Hunter a été confirmée par M. de Lassone, qui, en observant les os après la calcination, s'est assuré de l'existence de ces fibres perpendiculaires.

Trois ans après, une Société de Chirurgiens de la Marine, choisit M. Hunter pour faire un Cours d'anatomie;

il dut à ces leçons la première aisance dont il ait joui. Soixante-dix guinées qu'il rassembla, lui parurent un trésor inépuisable ; il en fit part à ses amis, mais avec si peu de précaution, que l'année d'après il se trouva hors d'état de faire imprimer les affiches d'un nouveau Cours. Cette leçon lui fut utile, on l'accusa même depuis de porter l'économie jusqu'à l'avarice : il est vrai qu'il consacra de très-grandes sommes à son goût pour l'Anatomie & pour l'Histoire naturelle, à son zèle pour le progrès des Sciences ; mais on n'attribue à la libéralité que les dépenses de vanité ou de luxe, & l'homme qui ne s'en permet que d'utiles, court risque de passer pour un avare dans l'opinion publique.

Les premiers volumes de la Société de Médecine de Londres, renferment des Ouvrages précieux de M. Hunter; telle est l'Observation d'une espèce particulière d'anévrisme, dans lequel l'artère s'ouvre une communication avec la veine; & une Description nouvelle de la structure du tissu cellulaire. Il y reconnoît deux substances d'une organisation différente, l'une réticulaire, l'autre glanduleuse : cette dernière destinée à contenir la graisse, est munie des vaisseaux qui la portent dans ses réservoirs, & des organes où s'en fait la sécrétion ; mais c'est la première qui seule est le véritable siége de l'hydropisie.

Après avoir pratiqué la Chirurgie pendant quelques années, par nécessité, & avec un dégoût que jamais il n'eut le courage de vaincre, M. Hunter se livra principalement à la pratique des accouchemens, & bientôt il n'eut qu'un rival à Londres. Heureusement pour sa fortune, ce rival, M. Smellie, n'avoit pas joint à ses talens l'art de se rendre agréable à un sexe qui, accoutumé au langage de la flatterie, est étonné d'entendre celui de la vérité, même dans la bouche de son Médecin, voudroit qu'il s'occupât de plaire encore plus que de guérir, & sans doute est excusable de le vouloir ; car les défauts des femmes sont l'ouvrage des hommes, comme les vices des nations sont le crime de leurs tyrans. On craignoit le Docteur Smellie, on attendoit,

pour l'appeler, que son secours fût absolument nécessaire; c'est-à-dire, qu'il fût inutile. Il avoit donc rarement des choses consolantes à dire, & on l'en craignoit encore davantage; aussi n'eut-il jamais une pratique étendue dans ce qu'on appelle la bonne compagnie, & il fut très-heureux pour les Dames angloises, que M. Hunter unît à une habileté pour le moins égale, la douceur & les agrémens dont l'austère & savant Smellie avoit été privé.

La pratique des Accouchemens & l'enseignement de l'Anatomie partagèrent le reste de la vie de M. Hunter; & sous ces deux points de vue, il a mérité également l'estime des Savans & la reconnoissance de ses concitoyens.

Son Ouvrage sur la matrice dans l'état de grossesse, est un monument précieux dans l'Anatomie; il est formé de trente-quatre planches, où les objets de grandeur naturelle sont représentés avec vérité & avec précision. La découverte de la membrane à laquelle il a donné le nom de *decidua*, l'examen des usages de cette membrane qui unit ensemble, dans le commencement de la grossesse, la matrice & le fœtus, & dans l'épaisseur de laquelle le placenta se forme, croît & se développe; l'exposition des conséquences pratiques qui résultent de cette découverte, une description exacte de l'uterus & du fœtus qu'il renferme, aux différentes périodes de la grossesse, le détail des changemens que l'un & l'autre éprouvent; cette partie importante de l'Anatomie presque entièrement nouvelle, portée dès le premier pas à un grand degré de perfection; tel a été le premier titre de M. Hunter à la célébrité & aux suffrages des Compagnies savantes de l'Europe.

C'est dans ce même Ouvrage, qu'il fit connoître la maladie qu'il a nommée *Retroversio uteri*, maladie dangereuse, assez commune, mais encore inconnue, & dont il montra en même temps la cause, les symptômes & les remèdes. A peine son livre fut-il public, que deux Praticiens habiles reconnurent cette maladie; ils avouèrent que peu de temps

auparavant,

auparavant, deux de leurs malades en avoient été les victimes, & qu'ils les auroient sauvées si les observations de M. Hunter leur avoient été connues.

Il n'a pas rendu moins de service à l'humanité par deux de ses Ouvrages d'un autre genre, mais relatifs au même objet; l'un est une Dissertation sur l'incertitude des signes de mort violente dans les enfans nouveaux-nés: on sait combien pour ce genre de crime, de femmes innocentes ont été sacrifiées à l'ignorance des Juges, & à l'influence qu'a sur eux la prévention populaire; il étoit encore plus nécessaire en Angleterre qu'ailleurs, de chercher à les éclairer. Les précautions de la Jurisprudence angloise pour assurer aux accusés tous les moyens de se défendre, pour les protéger contre leur propre ignorance, pour les mettre à l'abri de la passion ou de la corruption des Juges, font à l'humanité de la Nation britannique, un honneur que malheureusement trop peu d'autres peuples s'empressent de mériter; mais les Jurés ne sont pas des hommes choisis, comme nos Magistrats, parmi ceux qui ont dû faire une étude particulière du devoir qu'ils ont à remplir: ces Jurés, tirés au sort parmi tous les habitans d'un canton, dont la réputation est intacte, doivent partager souvent les opinions, les préjugés vulgaires; & l'expérience a prouvé que lorsqu'ils ont rendu des jugemens injustes, c'est presque toujours à cette cause que leur erreur doit être imputée: mais aussi l'instruction étant publique, un seul homme éclairé suffit pour prévenir l'injustice.

Le second Ouvrage est un Mémoire sur la section de la symphise du pubis; après avoir traité son sujet en Médecin, & avoir fait sentir combien il restoit encore de recherches à faire avant de prononcer sur l'utilité de cette opération, M. Hunter examine s'il doit être permis en morale, de livrer une mère à une mort presque assurée, dans l'espérance incertaine de conserver à un enfant qui n'existe pas encore, une vie peut-être de quelques instans: il prononce en faveur de la mère, c'est-à-dire, de celui des deux indi-

vidus qui, appartenant à la société par ses liens & par ses devoirs, a dès-lors acquis sur elle de véritables droits; qui souffre à la fois & la douleur physique & tout ce que la prévoyance & la crainte peuvent ajouter à la douleur; de celui enfin, qui connoissant son existence & pouvant l'apprécier, a sur sa propre vie un droit qui n'est qu'à lui seul, & que personne ne peut lui enlever sans injustice. Cette opinion que beaucoup d'hommes éclairés ont adoptée, M. Hunter est le premier qui ait eu le courage de la prononcer hautement, sans détour & avec une entière franchise; il n'a pas craint de s'exposer à tout ce que l'orgueil & l'avarice pouvoient oser contre lui, à l'abri du voile respectable dont les passions les plus basses & les plus cruelles savent si souvent se couvrir avec tant d'habileté.

M. Hunter donnoit ses leçons d'Anatomie au milieu d'un vaste musée élevé à ses frais; là, toutes les parties du corps humain préparées par lui avec un art dont il avoit presque seul le secret, étoient présentées aux Élèves sous l'aspect le plus propre à en faire mieux apercevoir la structure & les détails; la plupart y paroissoient & dans l'état naturel & avec les altérations que les différentes maladies peuvent y causer; chaque pièce offroit le résultat du travail & de l'observation des Anatomistes, & l'offroit d'une manière bien plus instructive & plus frappante que la description la mieux faite ou la planche la mieux gravée; un très-grand nombre même faisoient connoître des découvertes de détail dûes à M. Hunter lui-même, qu'il n'avoit exposées dans aucun Ouvrage, & qui n'existent que dans les préparations anatomiques où il a eu l'art de les rendre sensibles.

Aussi c'étoit sur-tout en voyant ce Cabinet, qu'on pouvoit apprendre à concilier la grande réputation de M. Hunter avec le petit nombre de ses Ouvrages: on y admiroit entre autres ses préparations des vaisseaux lymphatiques; la nature, l'usage de ces vaisseaux, leurs ouvertures dans les intestins, par lesquelles ils absorbent le chyle, tous ces phénomènes importans dans l'économie animale, étoient ou inconnus

ou peu développés avant M.rs Hunter & Monro, qui se disputèrent avec chaleur la gloire de ces observations.

Le seul reproche qu'on puisse faire à M. Hunter, est peut-être cette vivacité avec laquelle il réclamoit souvent ses découvertes, mais il avoit du moins la franchise de convenir de cette foiblesse. *Il n'y a point eu*, disoit-il dans un de ses Ouvrages, *de grand Anatomiste qui n'ait eu de grandes querelles ;* & un Anatomiste qui enseigne, un Anatomiste qui, occupé de faire des préparations, a déposé au moins autant d'idées dans son cabinet que dans ses Livres, doit craindre encore plus de voir les autres s'approprier des découvertes, qu'ils peuvent plus aisément n'avoir pas connues, & dont il leur est plus permis de paroître ignorer le premier auteur.

Au mois de Mars 1783, M. Hunter fut tourmenté par une goutte vague; cependant il voulut, le 20, faire une Leçon d'opérations chirurgicales, mais il se trouva mal & ne put l'achever; deux jours après il avertit ses Médecins, qu'il croyoit avoir éprouvé la nuit une attaque de paralysie : sa conjecture se trouva vraie ; l'attaque avoit porté sur les intestins, & il mourut le 30 avec une tranquillité peu commune. *Si je pouvois encore tenir une plume*, disoit-il à son ami M. Combe, peu d'instans avant sa mort, *j'écrirois combien il est facile & doux de mourir.*

Il a laissé un frère, M. Jean Hunter, d'abord son Élève, long-temps son compagnon d'études, & enfin son rival : c'est par les conseils & d'après les vues de son frère, que M. Jean Hunter s'est livré à ces belles recherches sur la position des testicules dans le fœtus, qui lui ont acquis une si juste célébrité. L'union des deux frères fut altérée par une dispute, il y a quelques années; l'amitié reprit ensuite ses droits, mais sans cette douce intimité qui ne revient jamais lorsqu'une fois elle s'est perdue : cependant, puisque cette dispute a été malheureusement connue du public, il est consolant de pouvoir dire que dans sa dernière maladie, M. Hunter reçut avec reconnoissance les soins de son frère,

& lui donna des marques de confiance qu'on ne peut regarder comme un ſimple hommage rendu à ſon habileté.

M. Hunter a légué au public ſon cabinet avec une ſomme de huit mille livres ſterling, dont le revenu eſt deſtiné à l'entretenir & à l'augmenter.

Des Livres rares, une belle ſuite de médailles, de morceaux précieux d'hiſtoire naturelle, & ſes préparations anatomiques, rendent cette collection une des plus riches, & ſur-tout une des plus inſtructives qu'aucun particulier ait poſſédée. C'étoit la ſeule paſſion de M. Hunter: il y avoit employé la plus grande partie d'une fortune très-conſidérable, qu'il avoit acquiſe dans une longue & heureuſe pratique; le prix des ſervices qu'il a rendus à ſes contemporains, a été conſacré par lui au ſalut & à l'inſtruction de leur poſtérité.





ÉLOGE DE M. EULER.

LÉONARD EULER, Directeur de la classe de Mathématiques dans l'Académie de Pétersbourg, & auparavant dans celle de Berlin; de la Société Royale de Londres, des Académies de Turin, de Lisbonne & de Bâle; Associé-étranger de celle des Sciences, naquit à Bâle, le 15 Avril 1707, de Paul Euler & de Marguerite Brucker.

Son père, devenu en 1708, Pasteur du village de Riechen près de Bâle, fut son premier Instituteur, & eut bientôt le plaisir de voir ces espérances des talens & de la gloire d'un fils, si douces pour un cœur paternel, naître & se fortifier sous ses yeux & par ses soins.

Il avoit étudié les Mathématiques sous Jacques Bernoulli; on sait que cet homme illustre joignoit à un grand génie pour les Sciences, une Philosophie profonde qui n'accompagne pas toujours ce génie, mais qui sert à lui donner plus d'étendue & à le rendre plus utile: dans ses leçons, il faisoit sentir à ses disciples, que la Géométrie n'est pas une Science isolée, & la leur présentoit comme la base & la clé de toutes les connoissances humaines, comme la Science où l'on peut le mieux observer la marche de l'esprit, celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés, puisqu'elle donne à l'entendement de la force & de la justesse à la fois; enfin comme une étude également précieuse par le nombre ou la variété de ses applications, & par l'avantage de faire contracter l'habitude d'une méthode de raisonner, qui peut s'employer ensuite à la recherche des vérités de tous les genres, & nous guider dans la conduite de la vie.

Paul Euler, pénétré des principes de son Maître, en-

ſeigna les élémens des Mathématiques à ſon fils, quoiqu'il le deſtinât à l'étude de la Théologie; & lorſque le jeune Euler fut envoyé à l'Univerſité de Bâle, il ſe trouva digne de recevoir les leçons de Jean Bernoulli : ſon application, ſes diſpoſitions heureuſes lui méritèrent bientôt l'amitié de Daniel & de Nicolas Bernoulli, diſciples & déjà rivaux de leur père; il eut même le bonheur d'obtenir celle du ſévère Jean Bernoulli, qui voulut bien lui donner, une fois par ſemaine, une leçon particulière, deſtinée à éclaircir les difficultés qui ſe préſentoient à lui dans le cours de ſes lectures & de ſes travaux: les autres jours étoient employés par M. Euler, à ſe mettre en état de profiter de cette faveur ſignalée.

Cette méthode excellente empêchoit ſon génie naiſſant de s'épuiſer contre des obſtacles invincibles, de s'égarer dans les routes nouvelles qu'il cherchoit à s'ouvrir; elle guidoit & ſecondoit ſes efforts : mais en même temps elle l'obligeoit de déployer toutes ſes forces, qu'il augmentoit encore par un exercice proportionné à ſon âge & à l'étendue de ſes connoiſſances.

Il ne jouit pas long-temps de cet avantage; & à peine eut-il obtenu le titre de Maître-ès-Arts, que ſon père qui le deſtinoit à lui ſuccéder, l'obligea de quitter les Mathématiques pour la Théologie: heureuſement cette rigueur ne fut que paſſagère, on lui fit aiſément entendre que ſon fils étoit né pour remplacer dans l'Europe, Jean Bernoulli, & non pour être Paſteur de Riechen.

Un Ouvrage que M. Euler fit à dix-neuf ans, ſur la mâture des Vaiſſeaux, ſujet propoſé par l'Académie des Sciences, obtint un *acceſſit* en 1727, honneur d'autant plus grand, que le jeune habitant des Alpes n'avoit pu être aidé par aucune connoiſſance pratique, & qu'il n'avoit été vaincu que par M. Bouguer, Géomètre habile, alors dans la force de ſon talent, & déjà depuis dix ans Profeſſeur d'Hydrographie dans une ville maritime.

M. Euler concouroit en même temps pour une Chaire

dans l'Univerſité de Bâle; mais c'eſt le ſort qui prononce entre les Savans admis à diſputer ces places, & il ne fut pas favorable, nous ne diſons point à M. Euler, mais à ſa patrie qui le perdit peu de jours après & pour toujours: deux ans auparavant, Nicolas & Daniel Bernoulli avoient été appelés en Ruſſie; M. Euler qui les vit partir avec regret, obtint d'eux la promeſſe de chercher à lui procurer le même honneur, qu'il ambitionnoit de partager; & il ne faut pas en être ſurpris. La ſplendeur de la Capitale d'un grand Empire, cet éclat qui, ſe répandant ſur les travaux dont elle eſt le théâtre & ſur les hommes qui l'habitent, ſemble ajouter à leur gloire, peut aiſément ſéduire la jeuneſſe, & frapper le citoyen libre, mais obſcur & pauvre d'une petite République: M.rs Bernoulli furent fidèles à leur parole, & ſe donnèrent, pour avoir auprès d'eux un Concurrent ſi redoutable, autant de ſoins que des hommes ordinaires en auroient pu prendre pour écarter leurs rivaux.

Le voyage de M. Euler fut entrepris ſous de triſtes auſpices, il apprit bientôt que Nicolas Bernoulli avoit déjà été victime de la rigueur du climat; & le jour même où il entra ſur les terres de l'empire Ruſſe, fut celui de la mort de Catherine I.ere, évènement qui parut d'abord menacer d'une diſſolution prochaine l'Académie dont cette Princeſſe, fidèle aux vues de ſon époux, venoit d'achever la fondation. M. Euler, éloigné de ſa patrie, n'ayant point, comme M. Daniel Bernoulli, à y rapporter un nom célèbre & reſpecté, prit la réſolution d'entrer dans la marine Ruſſe: un des Amiraux de Pierre I.er lui avoit déjà promis une place, lorſque heureuſement pour la Géométrie, l'orage élevé contre les Sciences ſe diſſipa; M. Euler obtint le titre de Profeſſeur, ſuccéda, en 1733, à M. Daniel Bernoulli lorſque cet homme illuſtre ſe retira dans ſon pays; & la même année il épouſa M.lle Gſell ſa compatriote, fille d'un Peintre que Pierre I.er avoit ramené en Ruſſie, au retour de ſon premier voyage. Dès-lors, pour nous ſervir de l'expreſſion de Bacon, M. Euler ſentit

qu'il avoit donné des otages à la fortune, & que le pays où il pouvoit espérer de former un établissement pour sa famille, étoit devenu pour lui une patrie nécessaire. Né chez une Nation où tous les gouvernemens conservent au moins l'apparence & le langage des constitutions républicaines, où, malgré des distinctions plus réelles que celles qui séparent les premiers esclaves d'un Despote, du dernier de ses sujets, on a soigneusement gardé toutes les formes de l'égalité; où le respect qu'on doit aux loix s'étend jusqu'aux usages les plus indifférens, pourvu que l'antiquité ou l'opinion vulgaire les ait consacrés; M. Euler se trouvoit transporté dans un pays où le Prince exerce une autorité sans bornes, où la loi la plus sacrée des gouvernemens absolus, celle qui règle la succession à l'Empire, étoit alors incertaine & méprisée; où des Chefs, esclaves du Souverain, régnoient despotiquement sur un peuple esclave; & c'étoit dans le moment où cet Empire, gouverné par un Étranger ambitieux, défiant & cruel, gémissoit sous la tyrannie de Biren, & offroit un spectacle aussi effrayant qu'instructif aux Savans qui étoient venus chercher dans son sein la gloire, la fortune, & la liberté de goûter en paix les douceurs de l'étude!

On sent tout ce que dut éprouver l'ame de M. Euler, lié à ce séjour par une chaîne qu'il ne pouvoit plus rompre: peut-être doit-on à cette circonstance de sa vie, cette opiniâtreté pour le travail dont il prit alors l'habitude, & qui devint son unique ressource dans une Capitale où l'on ne trouvoit plus que des satellites, ou des ennemis du Ministre, les uns occupés de flatter ses soupçons, les autres de s'y dérober: cette impression fut si forte sur M. Euler, qu'il la conservoit encore, lorsqu'en 1741, l'année d'après la chute de Biren, dont la tyrannie fit place à un gouvernement plus modéré & plus humain, il quitta Péterſbourg pour se rendre à Berlin, où le Roi de Prusse l'avoit appelé. Il fut présenté à la Reine-mère, cette Princesse se plaisoit dans la conversation des hommes éclairés, & elle les accueilloit avec cette familiarité noble

noble qui annonce dans les Princes le ſentiment d'une grandeur perſonnelle, indépendante de leurs titres, & qui eſt devenue un des caractères de cette famille auguſte; cependant la Reine de Pruſſe ne put obtenir de M. Euler que des monoſyllabes, elle lui reprocha cette timidité, cet embarras qu'elle croyoit ne pas mériter d'inſpirer; *pourquoi ne voulez-vous donc pas me parler*, lui dit-elle? *Madame*, répondit-il, *parce que je viens d'un pays où, quand on parle, on eſt pendu.*

Parvenu au moment de rendre compte des travaux immenſes de M. Euler, j'ai ſenti l'impoſſibilité d'en ſuivre les détails, de faire connoître cette foule de découvertes, de méthodes nouvelles, de vues ingénieuſes répandues dans plus de trente Ouvrages publiés à part, & dans près de ſept cents Mémoires, dont environ deux cents déposés à l'Académie de Péterſbourg, avant ſa mort, ſont deſtinés à enrichir ſucceſſivement la collection qu'elle publie.

Mais un caractère particulier m'a ſemblé le diſtinguer des hommes illuſtres qui en ſuivant la même carrière, ont obtenu une gloire que la ſienne n'a pas éclipſée; c'eſt d'avoir embraſſé les Sciences Mathématiques dans leur univerſalité, d'en avoir ſucceſſivement perfectionné les différentes parties; & en les enrichiſſant toutes par des découvertes importantes, d'avoir produit une révolution utile dans la manière de les traiter. J'ai donc cru qu'en formant un tableau méthodique des différentes branches de ces Sciences, en marquant pour chacune les progrès, les changemens heureux qu'elle doit au génie de M. Euler, j'aurois du moins, autant que mes forces me le permettent, donné une idée plus juſte de cet homme célèbre, qui, par la réunion de tant de qualités extraordinaires, a été pour ainſi dire un phénomène dont l'hiſtoire des Sciences ne nous avoit encore offert aucun exemple.

L'Algèbre n'avoit été pendant long-temps qu'une Science très-bornée; cette manière de ne conſidérer l'idée de la grandeur que dans le dernier degré d'abſtraction où

l'esprit humain puisse atteindre; la rigueur avec laquelle on sépare de cette idée tout ce qui, en occupant l'imagination, pourroit donner quelqu'appui ou quelque repos à l'intelligence; enfin l'extrême généralité des signes que cette Science emploie, la rendent, en quelque sorte, trop étrangère à notre nature, trop éloignée de nos conceptions communes, pour que l'esprit humain pût aisément s'y plaire & en acquérir facilement l'habitude. La marche même des méthodes algébriques rebutoit encore les hommes les plus propres à ces méditations; pour peu que l'objet qu'on poursuit soit compliqué, elles forcent de l'oublier totalement, pour ne songer qu'à leurs formules; la route qu'on suit est assurée, mais le but où l'on veut arriver, le point d'où l'on est parti, disparoissent également aux regards du Géomètre; & il a fallu long-temps du courage pour oser perdre la terre de vue, & s'exposer sur la foi d'une Science nouvelle. Aussi, en jetant les yeux sur les Ouvrages des grands Géomètres du siècle dernier, de ceux même auxquels l'Algèbre doit les découvertes les plus importantes, on verra combien peu ils étoient accoutumés à manier ce même instrument qu'ils ont tant perfectionné; & l'on ne pourra s'empêcher de regarder comme l'ouvrage de M. Euler, la révolution qui a rendu l'Analyse algébrique, une méthode lumineuse, universelle, applicable à tout, & même facile.

Après avoir donné sur la forme des racines, des équations algébriques, sur leur solution générale, sur l'élimination, plusieurs Théories nouvelles, & des vues ingénieuses ou profondes, M. Euler porta ses recherches sur le calcul des quantités transcendantes. Léibnitz & les deux Bernoulli se partagent la gloire d'avoir introduit dans l'analyse algébrique, les fonctions exponentielles & logarithmiques; Cotes avoit donné le moyen de représenter par des sinus ou des cosinus, les racines de certaines équations algébriques.

Un usage heureux de ces découvertes conduisit M. Euler

à obſerver les rapports ſinguliers des quantités exponentielles & logarithmiques avec les tranſcendantes nées dans le cercle, & enſuite à trouver des méthodes au moyen deſquelles faiſant diſparoître de la ſolution des problèmes, les termes imaginaires qui s'y ſeroient préſentés & qui auroient embarraſſé le calcul, quoiqu'on ſût qu'ils duſſent ſe détruire, & réduiſant les formules à une expreſſion plus ſimple & plus commode, il eſt parvenu à donner une forme entièrement nouvelle à la partie de l'analyſe qui s'applique aux queſtions d'Aſtronomie & de Phyſique. Cette forme a été adoptée par tous les Géomètres ; elle eſt devenue d'un uſage commun, & elle a produit dans cette partie du calcul, à peu-près la même révolution que la découverte des logarithmes avoit produite dans les calculs ordinaires.

Ainſi, à certaines époques, ou après de grands efforts, les Sciences mathématiques ſemblent avoir épuiſé toutes les reſſources de l'eſprit humain, & atteindre le terme marqué à leurs progrès ; tout-à-coup une nouvelle méthode de calcul vient s'introduire dans ces Sciences & leur donner une face nouvelle; bientôt on les voit s'enrichir rapidement par la ſolution d'un grand nombre de problèmes importans dont les Géomètres n'avoient oſé s'occuper, rebutés par la difficulté, & pour ainſi dire par l'impoſſibilité phyſique de conduire leurs calculs juſqu'à un réſultat réel. Peut-être la juſtice exigeroit-elle de réſerver à celui qui a ſu introduire ces méthodes & les rendre uſuelles, une portion dans la gloire de tous ceux qui les emploient avec ſuccès, mais du moins il a ſur leur reconnoiſſance des droits qu'ils ne pourroient conteſter ſans ingratitude.

L'analyſe des ſéries a occupé M. Euler dans preſque toutes les époques de ſa vie : c'eſt même une des parties de ſes Ouvrages où l'on voit briller le plus cette fineſſe, cette ſagacité, cette variété de moyens & de reſſources qui le caractériſent.

Les fractions continues, inventées par le Vicomte Brouncker, paroiſſoient preſque oubliées des Géomètres,

M. Euler en perfectionna la théorie, en multiplia les applications & en fit sentir toute l'importance.

Ses recherches presque absolument neuves sur les séries de produits indéfinis, offrent des ressources nécessaires à la solution d'un grand nombre de questions utiles ou curieuses; & c'est sur-tout en imaginant ainsi de nouvelles formes de séries, & en les employant, non-seulement à des approximations dont on est si souvent forcé de se contenter, mais aussi à la découverte de vérités absolues & rigoureuses, que M. Euler a su agrandir cette branche de l'analyse, aujourd'hui si vaste, & bornée avant lui à un petit nombre de méthodes & d'applications.

Le Calcul intégral, l'instrument le plus fécond de découvertes que jamais les hommes aient possédé, a changé de face depuis les Ouvrages de M. Euler; il a perfectionné, étendu, simplifié toutes les méthodes employées ou proposées avant lui: on lui doit la solution générale des équations linéaires, premier fondement de ces formules d'approximation, si variées & si utiles. Une foule de méthodes particulières, fondées sur différens principes, sont répandues dans ses Ouvrages, & réunies dans son Traité du Calcul intégral: là, on le voit par un heureux usage des substitutions, ou rappeler à une méthode connue, des équations qui sembloient s'y refuser, ou réduire aux premières différentielles, des équations d'ordres supérieurs; tantôt en considérant la forme des intégrales, il en déduit les conditions des équations différentielles auxquelles elles peuvent satisfaire; & tantôt l'examen de la forme des facteurs qui rendent une différentielle complète, le conduit à former des classes générales d'équations intégrables: quelquefois une propriété particulière qu'il remarque dans une équation, lui offre un moyen de séparer les indéterminées qui sembloient devoir y rester confondues; ailleurs, si une équation où elles sont séparées, se dérobe aux méthodes communes, c'est en mêlant ces indéterminées qu'il parvient à connoître l'intégrale.

Au premier coup-d'œil, le choix & la réussite de ces moyens peuvent sembler, en quelque sorte, appartenir au hasard; cependant, un succès si fréquent & si sûr, oblige de reconnoître une autre cause, & il n'est pas toujours impossible de suivre le fil délié qui a guidé le génie. Si, par exemple, on considère la forme des substitutions employées par M. Euler, on découvrira souvent ce qui a pu lui faire prévoir que cette opération produiroit l'effet dont il avoit besoin; & si on examine la forme que dans une de ses plus belles méthodes, il suppose aux facteurs d'une équation du second ordre, on verra qu'il s'est arrêté à une de celles qui appartiennent particulièrement à cet ordre d'équations. A la vérité, cette suite d'idées qui dirige alors un Analiste, est moins une méthode dont il puisse développer la marche, qu'une sorte d'instinct particulier dont il seroit difficile de rendre compte, & souvent il aime mieux ne pas faire l'histoire de ses pensées, que de s'exposer au soupçon d'en avoir donné un roman ingénieux, & fait après coup.

M. Euler a observé que les équations différentielles sont susceptibles de solutions particulières qui ne sont pas comprises dans la solution générale. M. Clairaut a fait aussi la même remarque; mais M. Euler a montré depuis, pourquoi ces intégrales particulières étoient exclues de la solution générale, & il est le premier qui se soit occupé de cette théorie, perfectionnée depuis par plusieurs Géomètres célèbres, & dans laquelle le Mémoire de M. de la Grange, sur la nature de ces intégrales & leur usage dans la solution des problèmes, n'a plus rien laissé à desirer.

Nous citerons encore une partie de ce calcul qui appartient presque en entier à M. Euler; c'est celle où l'on cherche des intégrales particulières pour une certaine valeur déterminée des inconnues que renferme l'équation; cette Théorie est d'autant plus importante, que souvent l'intégrale générale se dérobe absolument à nos recherches, & que, dans les problèmes où une valeur approchée de l'intégrale

ne suffit pas aux vues qu'on se propose, la connoissance de ces intégrales particulières, peut suppléer à ce défaut. En effet, on connoît alors, du moins pour certains points, la valeur rigoureuse; & cette connoissance unie à celle d'une valeur générale approchée, doit suffire à presque tous les besoins de l'Analyse.

Personne n'a fait un usage plus étendu & plus heureux des méthodes qui donnent la valeur de plus en plus approchée d'une quantité déterminée par des équations différentielles, & dont on a déjà une première valeur; & il s'est également occupé de donner un moyen direct de déduire immédiatement de l'équation même, une valeur assez voisine de la vraie, pour que les puissances élevées de leur différence, puissent être négligées; moyen sans lequel les méthodes d'approximation en usage parmi les Géomètres, ne pourroient s'étendre aux équations pour lesquelles les observations ou des considérations particulières ne donnent pas cette première valeur dont ces méthodes supposent la connoissance.

Ce que nous avons dit suffit pour montrer jusqu'à quel point M. Euler avoit approfondi la nature des équations différentielles, la source des difficultés qui s'opposent à l'intégration, & la manière de les éluder ou de les vaincre; son grand Ouvrage sur cet objet, est non-seulement un Recueil précieux de méthodes neuves & étendues, c'est encore une mine féconde de découvertes, que tout homme né avec quelque talent, ne peut parcourir sans en rapporter de riches dépouilles. L'on peut dire de cette partie des travaux de M. Euler, comme de beaucoup d'autres, que les méthodes qu'elle renferme serviront long-temps après lui, à résoudre des questions importantes & difficiles; & que ses Ouvrages produiront encore & plus d'une découverte & plus d'une réputation.

Le calcul aux différences finies, n'étoit presque connu que par l'Ouvrage obscur, mais plein de sagacité, de Taylor: M. Euler en fit une branche importante du calcul intégral,

lui donna une notation ſimple & commode, & ſut l'appliquer avec ſuccès à la théorie des ſuites, à la recherche de leurs ſommes, ou de l'expreſſion de leurs termes généraux, à celle de la racine des équations déterminées, à la manière d'avoir, par un calcul facile, la valeur approchée des produits, ou des ſommes indéfinies de certains nombres.

C'eſt à M. d'Alembert qu'appartient réellement la découverte du calcul aux différences partielles, puiſque c'eſt à lui qu'eſt dûe la connoiſſance de la forme générale de leurs intégrales; mais dans les premiers Ouvrages de M. d'Alembert on voyoit plus le réſultat du calcul, que le calcul lui-même; c'eſt à M. Euler que l'on en doit la notation, il a ſu ſe le rendre propre, en quelque manière, par la profonde théorie qui l'a conduit à réſoudre un grand nombre de ces équations, à diſtinguer les formes des intégrales pour les différens ordres & pour les différens nombres de variables, à réduire ces équations lorſqu'elles ont certaines formes, à des intégrations ordinaires, à donner les moyens de rappeler à ces formes, par d'heureuſes ſubſtitutions, celles qui s'en éloignent; en un mot, en découvrant dans la nature des équations aux différences partielles, pluſieurs de ces propriétés ſingulières qui en rendent la théorie générale ſi difficile & ſi piquante; qualités preſque inſéparables en Géométrie, où le degré de la difficulté eſt ſi ſouvent la meſure de l'intérêt qu'on prend à une queſtion, de l'honneur qu'on attache à une découverte. L'influence d'une vérité nouvelle ſur la Science même ou ſur quelqu'application importante, eſt le ſeul avantage qui puiſſe balancer ce mérite de la difficulté vaincue, chez des hommes pour qui le plaiſir d'apercevoir une vérité, eſt toujours proportionné aux efforts qu'elle leur a coûtés.

M. Euler n'avoit négligé aucune partie de l'Analyſe: il a démontré quelques-uns des théorèmes de Fermat, ſur l'analyſe indéterminée, & en a trouvé pluſieurs autres non moins curieux, non moins difficiles à découvrir. La marche

du cavalier au jeu d'échecs, & différens autres problèmes de ſituation, ont auſſi piqué ſa curioſité & exercé ſon génie : il mêloit aux recherches les plus importantes, ces amuſemens, ſouvent plus difficiles, mais preſque inutiles & aux progrès mêmes de la Science, & aux applications tentées juſqu'ici. M. Euler avoit un eſprit trop ſage pour ne pas ſentir l'inconvénient de ſe livrer long-temps à ces recherches purement curieuſes, mais trop étendu en même-temps, pour ne pas voir que leur inutilité ne devoit être que momentanée, & que le ſeul moyen de la faire ceſſer, étoit de chercher à les approfondir & à les généraliſer.

L'application de l'Algèbre à la Géométrie, avoit occupé, depuis Deſcartes, preſque tous les Géomètres du dernier ſiècle; mais M. Euler a prouvé qu'ils n'avoient pas, à beaucoup près, tout épuiſé. On lui doit de nouvelles recherches ſur le nombre des points qui déterminent une ligne courbe dont le degré eſt connu, & ſur celui des interſections des lignes de différens degrés; on lui doit également l'équation générale des courbes, dont les développées, les ſecondes, les troiſièmes développées, en un mot les développées d'un ordre quelconque, ſont ſemblables à la courbe génératrice : équation remarquable par ſon extrême ſimplicité.

La Théorie générale des ſurfaces courbes, étoit peu connue, & M. Euler eſt le premier qui l'ait développée dans un Ouvrage élémentaire : il y ajouta celle des rayons oſculateurs de ces ſurfaces; & il parvint à cette concluſion ſingulière, que la courbure d'un élément de ſurface eſt déterminée par deux des rayons oſculateurs des courbes formées par l'interſection de la ſurface & d'un plan qui paſſe par la perpendiculaire au point donné; que ces rayons ſont le plus grand & le plus petit de tous ceux qui appartiennent à la ſuite des courbes ainſi formées, & qu'enfin ils ſe trouvent toujours dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Il donna de plus, une méthode pour déterminer les ſurfaces

surfaces qui peuvent être développées sur un plan, & une théorie des projections géographiques de la sphère. Ces deux Ouvrages renferment une application de calcul des différences partielles à des problèmes géométriques : application qui peut s'étendre à beaucoup de questions intéressantes, & dont la première idée est dûe à M. Euler.

Ses recherches sur les courbes, qui, tracées sur une sphère, sont rectifiables algébriquement, & sur les surfaces courbes, dont les parties correspondantes à des parties d'uu plan donné, sont égales entr'elles, l'ont conduit à une nouvelle espèce d'analyse, à laquelle il donne le nom d'*Analyse infinitésimale indéterminée ;* parce que, comme dans l'Analyse indéterminée ordinaire, les quantités qui restent arbitraires sont assujetties à certaines conditions : & de même que l'analyse indéterminée a pu servir quelquefois à la perfection de l'Algèbre, M. Euler regardoit sa nouvelle Analyse comme une Science qui devoit un jour être utile au progrès du calcul intégral.

En effet, ces questions particulières, qui ne tiennent pas au corps méthodique des Sciences mathématiques, qui n'entrent point dans les applications qu'on peut en faire, ne doivent pas être regardées seulement comme des moyens d'exercer les forces ou de faire briller le génie des Géomètres ; presque toujours dans les Sciences, on commence par cultiver séparément quelques parties isolées, à mesure que les découvertes successives se multiplient, les liaisons qui unissent ces parties se laissent successivement apercevoir ; & le plus souvent c'est aux lumières qui résultent de cette réunion, que sont dûes les grandes découvertes qui font époque dans l'histoire de l'esprit humain.

La question de déterminer les courbes ou les surfaces pour lesquelles certaines fonctions indéfinies sont plus grandes ou plus petites que pour toutes les autres, avoit exercé les Géomètres les plus illustres du siècle dernier. Les solutions des problèmes du solide de la moindre résistance, de la courbe de plus vîte descente, de la plus

grande des aires iſopérimètres, avoient été célèbres en Europe. La méthode générale de réſoudre le problème, étoit cachée dans ces ſolutions, & ſur-tout dans celle que Jacques Bernoulli avoit trouvée pour la queſtion des iſopérimètres, & qui lui avoit donné ſur ſon frère un avantage que tant de chef-d'œuvres, enfantés depuis par Jean Bernoulli, n'ont pu faire oublier. Mais il falloit développer cette méthode, il falloit la réduire en formules générales; & c'eſt ce que fit M. Euler, dans un Ouvrage imprimé en 1744, & l'un des plus beaux monumens de ſon génie. Pour trouver ces formules il avoit été obligé d'employer la conſidération des lignes courbes; quinze ans après un jeune Géomètre (M. de la Grange), qui dans ſes premiers Eſſais annonçoit un digne ſucceſſeur d'Euler, réſolut le même problème par une méthode purement analytique: M. Euler admira le premier ce nouvel effort de l'art du calcul, s'occupa lui-même d'expoſer la nouvelle méthode, d'en préſenter les principes, & d'en donner le développement avec cette clarté, cette élégance qui brillent dans tous ſes Ouvrages; jamais le génie ne reçut & ne rendit un plus bel hommage, & jamais il ne ſe montra plus ſupérieur à ces petites paſſions que le partage d'un peu de gloire rend ſi actives & ſi violentes dans les hommes ordinaires.

Nous terminerons cet expoſé des travaux de M. Euler ſur l'analyſe pure, en obſervant qu'il ſeroit injuſte de borner ſon influence ſur les progrès des Mathématiques, aux découvertes ſans nombre dont ſes Ouvrages ſont remplis. Ces communications qu'il a ouvertes entre toutes les parties d'une Science ſi vaſte; ces vues générales, que ſouvent même il n'indique pas, mais qui n'échappent point à un eſprit attentif; ces routes dont il s'eſt contenté d'ouvrir l'entrée, & d'aplanir les premiers obſtacles, ſont encore autant de bienfaits dont les Sciences s'enrichiront, & dont la poſtérité jouira, en oubliant peut-être la main dont elle les aura reçus.

Le Traité de Mécanique que M. Euler donna en 1736, eſt le premier grand Ouvrage où l'Analyſe ait été appliquée à la Science du mouvement. Le nombre des choſes neuves ou préſentées d'une manière nouvelle, qui entrent dans ce Traité, eût étonné les Géomètres, ſi M. Euler n'en eût déjà publié ſéparément la plus grande partie.

Dans ſes nombreux travaux ſur la même Science, il fut toujours fidèle à l'analyſe; & l'uſage heureux qu'il en a fait a mérité à cette méthode la préférence qu'elle a enfin obtenue ſur toutes les autres.

La ſolution du problème où l'on cherche le mouvement d'un corps lancé dans l'eſpace & attiré vers deux points fixes, eſt devenue célèbre par l'Art avec lequel des ſubſtitutions dont M. Euler ſavoit ſi bien prévoir la forme, l'ont conduit à réduire aux quadratures, des équations que leur complication & leur forme pouvoient faire regarder comme inſolubles.

Il appliqua l'analyſe au mouvement d'un corps ſolide d'une figure donnée, & elle le conduiſit à ce beau théorème déjà donné par Segner, *qu'un corps d'une figure quelconque, peut tourner librement, d'un mouvement uniforme, autour de trois axes perpendiculaires entr'eux;* à la connoiſſance de pluſieurs propriétés ſingulières de ces trois axes principaux, & enfin aux équations générales du mouvement d'un corps, quelles que ſoient ſa figure & la loi des forces accélératrices qui agiſſent ſur ſes élémens & ſur quelques-unes de ſes parties.

Le problème des cordes vibrantes, & tous ceux qui appartiennent à la théorie du ſon ou des loix des oſcillations de l'air, ont été ſoumis à l'analyſe par les nouvelles méthodes dont il enrichit le calcul des différences partielles. Une théorie du mouvement des fluides, appuyée ſur ce même calcul, étonna par la clarté qu'il a répandue ſur des queſtions ſi épineuſes, & la facilité qu'il a ſu donner à des méthodes fondées ſur une analyſe ſi profonde.

Tous les problèmes de l'Aſtronomie phyſique, qui ont été traités dans ce ſiècle, ont été réſolus par des Méthodes

analytiques particulières à M. Euler. Son calcul des perturbations de l'orbite terreſtre, ſur-tout ſa théorie de la Lune, ſont des modèles de la ſimplicité, de la préciſion auxquelles on peut porter ces méthodes ; & en liſant ce dernier Ouvrage, on n'eſt pas moins étonné de voir juſqu'où un homme d'un grand génie, animé du deſir de ne rien laiſſer à faire ſur une queſtion importante, peut pouſſer la patience & l'opiniâtreté du travail.

L'Aſtronomie n'employoit que des méthodes géométriques, M. Euler ſentit tout ce qu'elle pouvoit eſpérer des ſecours de l'analyſe, & il le prouva par des exemples qui, imités depuis par pluſieurs Savans célèbres, pourront un jour faire prendre à cette Science une forme nouvelle.

Il embraſſa la Science navale, dans un grand Ouvrage auquel une ſavante analyſe ſert de baſe, & où les queſtions les plus difficiles ſont ſoumiſes à ces méthodes générales & fécondes qu'il ſavoit ſi bien créer & employer : long-temps après, il publia, ſur la même matière, un abrégé élémentaire de ce même Traité, où il renferme, ſous la forme la plus ſimple, ce qui peut être utile à la pratique, & ce que doivent ſavoir ceux qui ſe conſacrent au ſervice de mer : cet Ouvrage, quoique deſtiné par l'Auteur aux ſeules écoles de l'empire de Ruſſie, lui mérita une gratification du Roi, qui jugea que des travaux utiles à tous les hommes, avoient des droits à la reconnoiſſance de tous les Souverains, & voulut montrer que même aux extrémités de l'Europe, des talens ſi rares ne pouvoient échapper ni à ſes regards ni à ſes bienfaits. M. Euler fut ſenſible à cette marque de l'eſtime d'un Roi puiſſant, & elle reçut un nouveau prix à ſes yeux, de la main qui la lui tranſmit : c'étoit celle de M. Turgot, Miniſtre reſpecté dans l'Europe, par ſes lumières comme par ſes vertus, fait pour commander à l'opinion plutôt que pour lui obéir, & dont le ſuffrage, toujours dicté par la vérité, & jamais par le deſir d'attirer ſur lui-même l'approbation publique, pouvoit flatter un Sage trop accoutumé à la gloire pour être encore ſenſible au bruit de ſa renommée.

Dans les hommes d'un génie ſupérieur, l'extrême ſimplicité de caractère peut s'allier avec les qualités de l'eſprit, qui ſemblent le plus annoncer de l'habileté ou de la fineſſe; auſſi M. Euler, malgré cette ſimplicité qui ne ſe démentit jamais, ſavoit cependant diſtinguer avec une ſagacité, toujours indulgente il eſt vrai, les hommages d'une admiration éclairée, & ceux que la vanité prodigue aux Grands hommes pour s'aſſurer du moins le mérite de l'enthouſiaſme.

Ses travaux ſur la Dioptrique, ſont fondés ſur une analyſe moins profonde, & on eſt tenté de lui en ſavoir gré, comme d'une eſpèce de ſacrifice: les différens rayons dont un rayon ſolaire eſt formé, ſubiſſent dans le même milieu, des réfractions différentes; ſéparés ainſi des rayons voiſins, ils paroiſſent ſeuls, ou moins mélangés, & donnent la ſenſation de couleur qui leur eſt propre ; cette réfrangibilité varie dans les différens milieux pour chaque rayon, & ſuivant une loi qui n'eſt pas la même que celle de la réfraction moyenne dans ces milieux : cette obſervation donnoit lieu de croire que deux priſmes inégaux & de différentes matières, combinés enſemble, pourroient détourner un rayon de ſa route, ſans le décompoſer, ou plutôt en replaçant par une triple réfraction, les rayons élémentaires dans une direction parallèle.

De la vérité de cette conjecture, pouvoit dépendre, dans les lunettes, la deſtruction des iris qui colorent les objets vus à travers les verres lenticulaires: M. Euler étoit convaincu de la poſſibilité du ſuccès, d'après cette idée métaphyſique, *que ſi l'œil a été compoſé de diverſes humeurs, c'eſt uniquement dans l'intention de détruire les effets de l'aberration de réfrangibilité;* il ne s'agiſſoit donc que de chercher à imiter l'opération de la Nature, & il en propoſa les moyens, d'après une théorie qu'il s'étoit formée. Ses premiers eſſais excitèrent les Phyſiciens à s'occuper d'un objet qu'ils paroiſſoient avoir négligé; leurs expériences ne s'accordèrent point avec la théorie de M. Euler, mais elles confirmèrent les vues qu'il avoit eues ſur la perfection

des lunettes. Inſtruit alors par eux des loix de la diſperſion dans les différens milieux, il abandonna ſes premières idées, ſoumit au calcul les réſultats de leurs expériences, & enrichit la Dioptrique de formules analytiques, ſimples, commodes, générales, applicables à tous les inſtrumens qu'on peut conſtruire.

On a encore de M. Euler, quelques Eſſais ſur la théorie générale de la lumière, dont il cherchoit à concilier les phénomènes avec les loix des oſcillations d'un fluide; parce que l'hypothèſe de l'émiſſion des rayons en ligne droite, lui paroiſſoit préſenter des difficultés inſurmontables. La théorie de l'aimant, celle de la propagation du feu, les loix de la cohéſion des corps & celles des frottemens, devinrent auſſi pour lui l'occaſion de ſavans calculs, appuyés malheureuſement ſur des hypothèſes, plutôt que ſur des expériences.

Le calcul des Probabilités, l'Arithmétique politique, furent encore l'objet de ſes infatigables travaux; nous ne citerons ici que ſes recherches ſur les Tables de mortalité, & ſur les moyens de les déduire des phénomènes avec plus d'exactitude; ſa méthode de prendre un milieu entre des obſervations, ſes calculs ſur l'établiſſement d'une Caiſſe d'emprunt, dont le but eſt d'aſſurer aux veuves, aux enfans, ou une ſomme fixe ou une rente, payable après la mort d'un mari ou d'un père; moyen ingénieux, imaginé par des Géomètres philoſophes, pour contre-balancer le mal moral qui réſulte de l'établiſſement des rentes viagères, & pour rendre utiles aux familles, les plus petites épargnes que leur chef peut faire ſur ſon gain journalier, ou ſur les appointemens, ſoit d'une commiſſion, ſoit d'une place.

On a vu dans l'éloge de M. Daniel Bernoulli, qu'il avoit partagé avec M. Euler ſeul la gloire d'avoir remporté treize Prix à l'Académie des Sciences; ſouvent ils travaillèrent pour les mêmes ſujets, & l'honneur de l'emporter ſur ſon Concurrent, fut encore partagé entr'eux, ſans que jamais cette rivalité ait ſuſpendu les témoignages réciproques de

leur eſtime, ou refroidi le ſentiment de leur amitié. En examinant les ſujets ſur leſquels l'un & l'autre ont obtenu la victoire, on voit que le ſuccès a dépendu ſur-tout du caractère de leur talent: lorſque la queſtion exigeoit de l'adreſſe dans la manière de l'enviſager, un uſage heureux de l'expérience, ou des vues de Phyſique ingénieuſes & neuves, l'avantage étoit pour M. Daniel Bernoulli; n'offroit-elle à vaincre que de grandes difficultés de calcul, falloit-il créer de nouvelles méthodes d'analyſe, c'étoit M. Euler qui l'emportoit: & ſi l'on pouvoit avoir la témérité de vouloir juger entr'eux, ce ne ſeroit pas entre deux hommes qu'on auroit à prononcer, ce ſeroit entre deux genres d'eſprit, entre deux manières d'employer le génie.

Nous n'aurions donné qu'une idée très-imparfaite de la fécondité de M. Euler, ſi nous n'ajoutions à cette foible eſquiſſe de ſes travaux, qu'il eſt peu de ſujets importans pour leſquels il ne ſoit revenu ſur ſes traces, en refaiſant même pluſieurs fois ſon premier Ouvrage; tantôt il ſubſtituoit une méthode directe & analytique, à une méthode indirecte; tantôt il étendoit ſa première ſolution à des cas qui lui avoient d'abord échappé; ajoutant preſque toujours de nouveaux exemples qu'il ſavoit choiſir avec un art ſingulier, parmi ceux qui offroient ou quelque application utile ou quelque remarque curieuſe: la ſeule intention de donner à ſon travail une forme plus méthodique, d'y répandre plus de clarté, d'y ajouter un nouveau degré de ſimplicité, ſuffiſoit pour le déterminer à des travaux immenſes; jamais Géomètre n'a tant écrit, & jamais aucun n'a donné à ſes Ouvrages un tel degré de perfection. Lorſqu'il publioit un Mémoire ſur un objet nouveau, il expoſoit avec ſimplicité la route qu'il avoit parcourue, il en faiſoit obſerver les difficultés ou les détours; & après avoir fait ſuivre ſcrupuleuſement à ſes lecteurs la marche de ſon eſprit dans ſes premiers eſſais, il leur montroit enſuite comment il étoit parvenu à trouver une route plus ſimple: on voit qu'il préféroit l'inſtruction de ſes diſciples

à la petite satisfaction de les étonner, & qu'il croyoit n'en pas faire assez pour la Science, s'il n'ajoutoit aux vérités nouvelles dont il l'enrichissoit, l'exposition naïve des idées qui l'y avoient conduit.

Cette méthode d'embrasser ainsi toutes les branches des Mathématiques, d'avoir, pour ainsi dire, toujours présentes à l'esprit toutes les questions & toutes les théories, étoit pour M. Euler une source de découvertes, fermée pour presque tous les autres, ouverte pour lui seul : ainsi dans la suite de ses travaux, tantôt s'offroit à lui une méthode singulière d'intégrer des équations, en les différenciant, tantôt une remarque sur une question d'Analyse ou de Mécanique, le conduisoit à la solution d'une équation différentielle très-compliquée, qui échappoit aux méthodes directes; c'est quelquefois un problème, en apparence très-difficile, qu'il résout en un instant par une méthode très-simple, ou un problème qui paroît élémentaire, & dont la solution a des difficultés qu'il ne peut vaincre que par de grands efforts; d'autres fois, des combinaisons de nombres singuliers, des séries d'une forme nouvelle, lui présentent des questions piquantes par leur nouveauté, ou le mènent à des vérités inattendues. M. Euler avertissoit alors avec soin que c'étoit au hasard qu'il devoit les découvertes de ce genre; ce n'étoit pas en diminuer le mérite, car on voyoit aisément que ce hasard ne pourroit arriver qu'à un homme qui joindroit à une vaste étendue de connoissances, la sagacité la plus rare. D'ailleurs, peut-être ne faudroit-il pas le louer de cette candeur, quand même elle lui auroit coûté un peu de sa gloire: les hommes d'un grand génie ont rarement ces petites ruses de l'amour-propre, qui ne servent qu'à rapetisser aux yeux des juges éclairés, ceux qu'elles agrandissent dans l'opinion de la multitude; soit que l'homme de génie sente qu'il ne sera jamais plus grand qu'en se montrant tel qu'il est, soit que l'opinion n'ait pas sur lui cet empire qu'elle exerce avec tant de tyrannie sur les autres hommes.

Lorsqu'on

Lorsqu'on lit la vie d'un grand homme, soit conviction de l'imperfection attachée à la foiblesse humaine, soit que la justice dont nous sommes capables, ne puisse atteindre jusqu'à reconnoître dans nos semblables une supériorité dont rien ne nous console, soit enfin que l'idée de la perfection dans un autre nous blesse ou nous humilie encore plus que celle de la grandeur; il semble qu'on a besoin de trouver un endroit foible, on cherche quelque défaut qui puisse nous relever à nos propres yeux, & l'on est involontairement porté à se défier de la sincérité de l'Écrivain, s'il ne nous montre pas cet endroit foible, s'il ne soulève point le voile importun dont ces défauts sont couverts.

M. Euler paroissoit quelquefois ne s'occuper que du plaisir de calculer, & regarder le point de Mécanique ou de Physique, qu'il examinoit, seulement comme une occasion d'exercer son génie & de se livrer à sa passion dominante. Aussi les Savans lui ont-ils reproché d'avoir quelquefois prodigué son calcul à des hypothèses physiques, ou même à des principes métaphysiques, dont il n'avoit pas assez examiné ou la vraisemblance ou la solidité; ils lui reprochoient aussi de s'être trop reposé sur les ressources du calcul, & d'avoir négligé celles que pouvoit lui donner l'examen des questions mêmes qu'il se proposoit de résoudre. Nous conviendrons que le premier reproche n'étoit pas sans fondement, nous avouerons que dans M. Euler le Métaphysicien, ou même le Physicien, n'a pas été si grand que le Géomètre; & l'on doit regretter sans doute que plusieurs parties de ses Ouvrages, par exemple de ceux qu'il a faits sur la Science navale, sur l'Artillerie n'aient presque été utiles qu'aux progrès de la Science du calcul: mais nous croyons que le second reproche est beaucoup moins mérité; par-tout dans les Ouvrages de M. Euler, on le voit occupé d'ajouter aux richesses de l'analyse, d'en étendre & d'en multiplier les applications; en même-temps qu'elle paroît son instrument unique, on voit qu'il a voulu en faire un instrument universel: la

progrès naturel des Sciences mathématiques, devoit amener cette révolution; mais il l'a vu pour ainſi dire s'accomplir ſous ſes yeux, c'eſt à ſon génie que nous la devons; elle a été le prix de ſes efforts & de ſes découvertes. Ainſi, lors même qu'il paroiſſoit abuſer de l'Analyſe & en épuiſer tous les ſecrets pour réſoudre une queſtion dont quelques réflexions étrangères au calcul lui euſſent donné une ſolution ſimple & facile, ſouvent il ne cherchoit qu'à montrer les forces & les reſſources de ſon Art; & on doit lui pardonner, ſi quelquefois, en paroiſſant s'occuper d'une autre Science, c'étoit encore au progrès & à la propagation de l'Analyſe, que ces travaux étoient conſacrés, puiſque la révolution qui en a été le fruit, eſt un de ſes premiers droits à la reconnoiſſance des hommes, & un de ſes plus beaux titres à la gloire.

Je n'ai pas cru devoir interrompre le détail des travaux de M. Euler, par le récit des évènemens très-ſimples & très-peu multipliés de ſa vie.

Il s'établit à Berlin en 1741, & y reſta juſquen 1766.

Madame la Princeſſe d'Anhalt-Deſſau, nièce du Roi de Pruſſe, voulut recevoir de lui quelques leçons de Phyſique, ces leçons ont été publiées ſous le nom de *Lettres à une Princeſſe d'Allemagne ;* ouvrage précieux par la clarté ſingulière avec laquelle il y a expoſé les vérités les plus importantes de la Mécanique, de l'Aſtronomie-phyſique, de l'Optique & de la Théorie des ſons, & par des vues ingénieuſes moins philoſophiques, mais plus ſavantes que celles qui ont fait ſurvivre la pluralité des Mondes de Fontenelle, au ſyſtème des tourbillons. Le nom d'Euler, ſi grand dans les Sciences, l'idée impoſante que l'on ſe forme de ſes Ouvrages deſtinés à développer ce que l'Analyſe a de plus épineux & de plus abſtrait, donnent à ces Lettres ſi ſimples, ſi faciles, un charme ſingulier: ceux qui n'ont pas étudié les Mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un Ouvrage d'Euler, lui ſavent gré de s'être mis à leur portée; & ces détails élémentaires des

Sciences, acquièrent une ſorte de grandeur par le rapprochement qu'on en fait avec la gloire & le génie de l'homme illuſtre qui les a tracés.

Le Roi de Pruſſe employa M. Euler à des calculs ſur les monnoies, à la conduite des eaux de Sans-ſouci, à l'examen de pluſieurs canaux de navigation; ce Prince n'étoit pas né pour croire que de grands talens & des connoiſſanees profondes, fuſſent jamais des qualités ſuperflues ou dangereuſes; & le bonheur de pouvoir être utile, un avantage réſervé par la Nature à l'ignorance & à la médiocrité.

En 1750, M. Euler fit le voyage de Francfort pour y recevoir ſa mère, veuve alors, & la ramener à Berlin; il eut le bonheur de l'y conſerver juſqu'en 1761: pendant onze ans elle jouit de la gloire de ſon fils, comme le cœur d'une mère ſait en jouir, & fut plus heureuſe encore peut-être, par ſes ſoins tendres & aſſidus, dont cette gloire augmentoit le prix.

Ce fut pendant ſon ſéjour à Berlin, que M. Euler, lié par la reconnoiſſance à M. de Maupertuis, ſe crut obligé de défendre ce Principe de la moindre action, ſur lequel le Préſident de l'Académie de Pruſſe avoit fondé l'eſpérance d'une ſi grande renommée; le moyen que choiſit M. Euler, ne pouvoit guère être employé que par lui, c'étoit de réſoudre par ce Principe quelques-uns des problèmes les plus difficiles de la Mécanique: ainſi dans les temps fabuleux, les Dieux daignoient fabriquer pour les guerriers qu'ils favoriſoient, des armes impénétrables aux coups de leurs adverſaires. Nous deſirerions que la reconnoiſſance de M. Euler ſe fût bornée à une protection ſi noble & ſi digne de lui, mais on ne peut ſe diſſimuler qu'il n'ait montré trop de dureté dans ſes réponſes à Kœnig; & c'eſt avec douleur que nous ſommes obligés de compter un Grand homme parmi les ennemis d'un Savant malheureux & perſécuté: heureuſement toute la vie de M. Euler le met à l'abri d'un ſoupçon plus grave; ſans cette ſimpli-

cité, cette indifférence pour la renommée, qu'il a montrées constamment, on auroit pu croire que les plaisanteries d'un illustre Partisan de M. Kœnig (plaisanteries que M. de Voltaire lui-même a depuis condamnées à un juste oubli), avoient altéré le caractère du sage & paisible Géomètre; mais s'il fit alors une faute, c'est à l'excès seul de la reconnoissance qu'il faut l'attribuer; & c'est par un sentiment respectable qu'il a été injuste, une seule fois dans sa vie.

Les Russes ayant pénétré dans la Marche de Brandebourg, en 1760, pillèrent une métairie que M. Euler avoit auprès de Charlotembourg: mais le Général Tottleben n'étoit pas venu faire la guerre aux Sciences; instruit de la perte que M. Euler avoit essuyée, il s'empressa de la réparer, en faisant payer le dommage à un prix fort au-dessus de la valeur réelle; & il rendit compte de ce manque d'égards involontaire à l'Impératrice Élisabeth, qui ajouta un don de quatre mille florins à une indemnité déjà beaucoup plus que suffisante: ce trait n'a point été connu en Europe, & nous citons avec enthousiasme quelques actions semblables que les Anciens nous ont transmises; cette différence dans nos jugemens, n'est-elle pas une preuve de ces progrès heureux de l'espèce humaine, que quelques Écrivains s'obstinent à nier encore, apparemment pour éviter qu'on ne les accuse d'en avoir été les complices?

Le Gouvernement de Russie n'avoit jamais traité M. Euler comme un étranger, une partie de ses appointemens lui fut toujours payée malgré son absence; & l'Impératrice l'ayant appelé, en 1766, il consentit à retourner à Pétersbourg.

En 1735, les efforts que lui avoit coûtés un calcul astronomique, pour lequel les autres Académiciens demandoient plusieurs mois, & qu'il acheva en peu de jours, lui avoient causé une maladie suivie de la perte d'un œil; il avoit lieu de craindre une cécité complète s'il s'exposoit de nouveau dans un climat dont l'influence lui étoit contraire: l'intérêt de ses enfans l'emporta sur cette crainte; & si on songe que l'étude étoit pour M. Euler une passion

exclusive, on jugera sans doute que peu d'exemples d'amour paternel ont mieux prouvé qu'il est la plus puissante & la plus douce de nos affections.

Il essuya peu d'années après, le malheur qu'il avoit prévu, mais il conserva, heureusement pour lui & pour les Sciences, la faculté de distinguer encore de grands caractères tracés sur une ardoise avec de la craie; ses fils, ses élèves copioient ses calculs, écrivoient sous sa dictée le reste de ses Mémoires; & si on en juge par leur nombre, & souvent par le génie qu'on y retrouve, on pourroit croire que l'absence encore plus absolue de toute distraction, & la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donnoit à toutes ses facultés, lui ont fait plus gagner, que l'affoiblissement de sa vue n'a pu lui faire perdre de facilité & de moyens pour le travail.

D'ailleurs, M. Euler, par la nature de son génie, par l'habitude de sa vie, s'étoit même involontairement préparé des ressources extraordinaires : en examinant ces grandes formules analytiques, si rares avant lui, si fréquentes dans ses Ouvrages, dont la combinaison & le développement réunissent tant de simplicité & d'élégance, dont la forme même plaît aux yeux comme à l'esprit, on voit qu'elles ne sont pas le fruit d'un calcul tracé sur le papier, & que produites toutes entières dans sa tête, elles y ont été créées par une imagination également puissante & active. Il existe dans l'Analyse (& M. Euler en a beaucoup multiplié le nombre), des formules d'une application commune & presque journalière; il les avoit toujours présentes à l'esprit, les savoit par cœur, les récitoit dans la conversation; & M. d'Alembert, lorsqu'il le vit à Berlin, fut étonné d'un effort de mémoire qui supposoit dans l'esprit de M. Euler tant de netteté, & tant de vigueur à la fois. Enfin sa facilité à calculer de tête, étoit portée à un degré qu'on croiroit à peine, si l'histoire de ses travaux n'avoit accoutumé aux prodiges: on l'a vu, dans l'intention d'exercer son petit-fils aux extractions de racines, se former la Table des six premières puissances de tous les nombres, depuis 1,

jusqu'à 100, & la conserver exactement dans sa mémoire: deux de ses disciples avoient calculé jusqu'au dix-septième terme, une série convergente assez compliquée; leurs résultats, quoique formés d'après un calcul écrit, différoient d'une unité au cinquantième chiffre; ils firent part de cette dispute à leur maître, M. Euler refit le calcul entier dans sa tête, & sa décision se trouva conforme à la vérité.

Depuis la perte de sa vue, il n'avoit d'autre amusement que de faire des aimants artificiels, & de donner des leçons de Mathématique à un de ses petits-fils, qui lui paroissoit annoncer d'heureuses dispositions.

Il alloit encore quelquefois à l'Académie, principalement dans les circonstances difficiles, où il croyoit que sa présence pouvoit être utile pour y maintenir la liberté: on sent combien un Président perpétuel, nommé par la Cour, peut troubler le repos d'une Académie, & tout ce qu'elle en doit craindre, lorsque n'étant pas choisi dans la classe des Savans, il ne se sent pas même arrêté par le besoin qu'a sa réputation du suffrage de ses Confrères; comment des hommes, uniquement occupés de leurs paisibles travaux, & ne sachant parler que le langage des Sciences, pourroient-ils alors se défendre, sur-tout si étrangers, isolés, éloignés de leur patrie, ils tiennent tout du Gouvernement auquel ils ont à demander justice contre le Chef que ce Gouvernement même leur a donné ?

Mais il est un degré de gloire où l'on se trouve au-dessus de la crainte; c'est lorsque l'Europe entière s'élèveroit contre une injure personnelle faite à un Grand homme, qu'il peut sans risque déployer contre l'injustice l'autorité de sa renommée, & élever en faveur des Sciences, une voix qu'on ne peut empêcher de se faire entendre; M. Euler, tout simple, tout modeste qu'il étoit, sentoit ses forces, & les a plus d'une fois heureusement employées.

En 1771, la ville de Pétersbourg éprouva un incendie terrible, les flammes gagnèrent la maison de M. Euler; un Bâlois, M. Pierre Grimm (dont le nom mérite sans doute d'être conservé), apprend le danger de son illustre

compatriote, aveugle & ſouffrant, il ſe précipite au travers des flammes, pénètre juſqu'à lui, le charge ſur ſes épaules & le ſauve au péril de ſa vie: la bibliothèque, les meubles de M. Euler furent conſumés, mais les ſoins empreſſés du comte Orloff, ſauvèrent ſes manuſcrits; & cette attention, au milieu du trouble & des horreurs de ce grand déſaſtre, eſt un des hommages les plus vrais & les plus flatteurs que jamais l'autorité publique ait rendus au génie des Sciences: la maiſon de M. Euler étoit un des bienfaits de l'Impératrice, un nouveau bienfait en répara promptement la perte.

Il a eu de ſa première femme treize enfans, dont huit morts en bas âge; ſes trois fils lui ont ſurvécu, & il eut le malheur de perdre ſes deux filles dans la dernière année de ſa vie; de trente-huit petits-enfans, vingt-ſix vivoient encore à l'époque de ſa mort. En 1776, il épouſa en ſecondes nôces, M.lle Gſell, ſœur de père de ſa première femme; il avoit gardé toute la ſimplicité de mœurs dont la maiſon paternelle lui avoit donné l'exemple; tant qu'il a conſervé la vue, il raſſembloit tous les ſoirs, pour la prière commune, ſes petits-enfans, ſes domeſtiques & ceux de ſes élèves qui logeoient chez lui; il leur liſoit un chapitre de la Bible, & quelquefois accompagnoit cette lecture d'une exhortation.

Il étoit très-religieux; on a de lui une preuve nouvelle de l'exiſtence de Dieu & de la ſpiritualité de l'ame, cette dernière même a été adoptée dans pluſieurs écoles de Théologie: il avoit conſervé ſcrupuleuſement la Religion de ſon pays, qui eſt le Calviniſme rigide; & il ne paroît pas qu'à l'exemple de la plupart des Savans Proteſtans, il ſe ſoit permis d'adopter des opinions particulières, & de ſe former un ſyſtème de Religion.

Son érudition étoit très-étendue, ſur-tout dans l'hiſtoire des Mathématiques; on a prétendu qu'il avoit porté ſa curioſité juſqu'à s'inſtruire des procédés & des règles de l'Aſtrologie, & que même il en avoit fait quelques appli-

cations; cependant lorſqu'en 1740, on lui donna ordre de faire l'horoſcope du Prince Yvan, il repréſenta que cette fonction appartenoit à M. Kraaff, qui, en qualité d'Aſtronome de la Cour, fut obligé de la remplir. Cette crédulité qu'on eſt étonné de trouver à cette époque dans la Cour de Ruſſie, étoit générale un ſiècle auparavant dans toutes les Cours de l'Europe; celles de l'Aſie n'en ont pas encore ſecoué le joug, & il faut avouer, que ſi on en excepte les maximes communes de la Morale, il n'y a juſqu'ici aucune vérité qui puiſſe ſe glorifier d'avoir été adoptée auſſi généralement & auſſi long-temps, que beaucoup d'erreurs, ou ridicules ou funeſtes.

M. Euler avoit étudié preſque toutes les branches de la Phyſique, l'Anatomie, la Chimie, la Botanique; mais ſa ſuperiorité dans les Mathématiques ne lui permettoit pas d'attacher la plus petite importance à ſes connoiſſances dans les autres genres, quoiqu'aſſez étendues pour qu'un homme plus ſuſceptiple des petiteſſes de l'amour-propre, eût pu aſpirer à une ſorte d'univerſalité.

L'étude de la Littérature ancienne & des Langues ſavantes, avoit fait partie de ſon éducation; il en conſerva le goût toute ſa vie, & n'oublia rien de ce qu'il avoit appris; mais il n'eut jamais ni le temps ni le deſir d'ajouter à ſes premières études: il n'avoit pas lû les Poëtes modernes, & ſavoit par cœur l'Énéïde. Cependant M. Euler ne perdoit pas de vue les Mathématiques, même lorſqu'il récitoit les vers de Virgile; tout étoit propre à lui rappeler cet objet preſque unique de ſes penſées, & on trouve dans ſes Ouvrages un ſavant Mémoire ſur une queſtion de Mécanique, dont il racontoit qu'un vers de l'Énéïde lui avoit donné la première idée.

On a dit, que, pour les hommes d'un grand talent, le plaiſir du travail en étoit une récompenſe plus douce encore que la gloire; ſi cette vérité avoit beſoin d'être prouvée par des exemples, celui de M. Euler ne permettroit plus d'en douter.

Jamais,

Jamais, dans ſes ſavantes diſcuſſions avec de célèbres Géomètres, il n'a laiſſé échapper un ſeul trait qui puiſſe faire ſoupçonner qu'il ſe ſoit occupé des intérêts de ſon amour-propre. Jamais il n'a réclamé aucune de ſes découvertes; & ſi on revendiquoit quelque choſe dans ſes Ouvrages, il s'empreſſoit de réparer une injuſtice involontaire, ſans même trop examiner ſi l'équité rigoureuſe exigeoit de lui un abandon abſolu. Y avoit-on relevé quelqu'erreur, ſi le reproche étoit mal fondé, il l'oublioit; s'il étoit juſte, il ſe corrigeoit, & ne ſongeoit même pas à obſerver, que ſouvent le mérite de ceux qui ſe vantoient d'avoir aperçu ſes fautes, conſiſtoit ſeulement dans une application facile des méthodes que lui-même leur avoit enſeignées, à des théories dont il avoit aplani d'avance les plus grandes difficultés.

Preſque toujours les hommes médiocres cherchent à ſe faire valoir par une ſévérité proportionnée à la haute idée qu'ils veulent donner de leur jugement ou de leur génie; inexorables pour tout ce qui s'élève au-deſſus d'eux, ils ne pardonnent même pas à l'infériorité; on diroit qu'un ſentiment ſecret les avertit du beſoin qu'ils ont de rabaiſſer les autres. Au contraire, le premier mouvement de M. Euler le portoit à célébrer les talens dès l'inſtant où quelques eſſais heureux frappoient ſes regards, & ſans attendre que l'opinion publique eût ſollicité ſon ſuffrage. On le voit employer ſon temps à refaire, à éclaircir ſes Ouvrages, & même à réſoudre des problèmes déjà réſolus, qui ne lui laiſſoient plus que le mérite de plus d'élégance & de méthode, avec la même ardeur, la même conſtance qu'il eût miſes à pourſuivre une vérité nouvelle dont la découverte auroit ajouté à ſa renommée. D'ailleurs, ſi le deſir ardent de la gloire eût exiſté au fond de ſon cœur, la franchiſe de ſon caractère ne lui eût pas permis d'en cacher les mouvemens. Mais cette gloire dont il s'occupoit ſi peu, vint le chercher. La fécondité ſingulière de ſon génie frappoit même ceux qui n'étoient pas en état

d'entendre ses Ouvrages; quoiqu'uniquement livré à la Géométrie, sa réputation s'étendit parmi les hommes les plus étrangers à cette Science; & il fut pour l'Europe entière, non-seulement un grand Géomètre, mais un grand homme. Il est d'usage, en Russie, d'accorder des titres militaires à des hommes très-étrangers au service; c'est rendre hommage au préjugé qui faisoit regarder cet état comme la seule profession noble, & avouer en même temps qu'on en reconnoît toute la fausseté: quelques Savans ont obtenu jusqu'au grade de Général-Major; M. Euler n'en eut & n'en vouloit avoir aucun: mais quel titre pouvoit honorer le nom d'Euler? Et alors le respect pour la conservation des droits naturels de l'homme, impose en quelque sorte le devoir de donner l'exemple d'une sage indifférence pour ces hochets de la vanité humaine, si puérils, mais si dangereux.

La plupart des Princes du Nord, dont il étoit personnellement connu, lui ont donné des marques de leur estime, ou plutôt de la vénération qu'on ne pouvoit refuser à la réunion d'une vertu si simple & d'un génie si vaste & si élevé. Dans le voyage que le Prince Royal de Prusse fit à Pétersbourg, il prévint la visite de M. Euler, & passa quelques heures à côté du lit de cet illustre vieillard, ayant ses mains dans les siennes, & tenant sur ses genoux un petit-fils d'Euler, que ses dispositions précoces pour la Géométrie, avoient rendu l'objet particulier de sa tendresse paternelle.

Tous les Mathématiciens célèbres qui existent aujourd'hui, sont ses Élèves: il n'en est aucun, qui ne se soit formé par la lecture de ses Ouvragees, qui n'ait reçu de lui les formules, la méthode qu'il emploie, qui, dans ses découvertes, ne soit guidé & soutenu par le génie d'Euler. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les Sciences Mathématiques, en les soumettant toutes à l'analyse; à sa force pour le travail, qui lui a permis d'embrasser toute l'étendue de ces Sciences; à l'ordre

qu'il a ſu mettre dans ſes grands Ouvrages ; à la ſimplicité, à l'élégance de ſes formules ; à la clarté de ſes méthodes & de ſes démonſtrations qu'augmentent encore la multiplicité & le choix de ſes exemples. Ni Newton, ni Deſcartes même, dont l'influence a été ſi puiſſante, n'ont obtenu cette gloire, & juſqu'ici, ſeul entre les Géomètres, M. Euler l'a poſſédée toute entière & ſans partage.

Mais comme Profeſſeur, il a formé des Élèves qui lui appartiennent plus particulièrement, & parmi leſquels nous citerons ſon fils aîné, que l'Académie des Sciences a choiſi pour le remplacer, ſans craindre que cette ſucceſſion honorable accordée au nom d'Euler, comme à celui de Bernoulli, pût devenir un exemple dangereux ; un ſecond fils, livré aujourd'hui à l'étude de la Médecine, mais qui dans ſa jeuneſſe a remporté dans cette Académie un Prix ſur les altérations du moyen mouvement des Planètes ; M. Lexell, qu'une mort prématurée vient d'enlever aux Sciences ; enfin, M. Fuſſ, le plus jeune de ſes diſciples, le compagnon de ſes derniers travaux, qui, envoyé de Bâle à M. Euler, par M. Daniel Bernoulli, s'eſt montré digne par ſes Ouvrages, du choix de Bernoulli & des leçons d'Euler ; & qui, après avoir rendu dans l'Académie de Péterſbourg, un hommage public à ſon illuſtre Maître, vient de s'unir à ſa petite-fille.

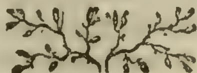
De ſeize Profeſſeurs attachés à l'Académie de Péterſbourg, huit avoient été formés par lui ; & tous, connus par leurs Ouvrages, & décorés de titres académiques, ſe glorifioient de pouvoir y ajouter celui de diſciples d'Euler.

Il avoit conſervé toute ſa facilité, & en apparence toutes ſes forces ; aucun changement n'annonçoit que les Sciences fuſſent menacées de le perdre. Le 7 Septembre 1783, après s'être amuſé à calculer ſur une ardoiſe les loix du mouvement aſcenſionnel des machines aéroſtatiques, dont la découverte récente occupoit alors toute l'Europe, il dîna avec M. Lexell & ſa famille, parla de la Planète d'Herſchell, & des calculs qui en déterminent

l'orbite ; peu de temps après il fit venir ſon petit-fils, avec lequel il badinoit en prenant quelques taſſes de thé, lorſque tout-à-coup, la pipe qu'il tenoit à la main lui échappa, & il ceſſa de calculer & de vivre.

Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands & les plus extraordinaires que la Nature ait jamais produits; dont le génie fut également capable des plus grands efforts & du travail le plus continu, qui multiplia ſes productions au-delà de ce qu'on eût oſé attendre des forces humaines, & qui cependant fut original dans chacune; dont la tête fut toujours occupée & l'ame toujours calme, qui enfin, par une deſtinée malheureuſement trop rare, réunit & mérita de réunir un bonheur preſque ſans nuage, à une gloire qui ne fut jamais conteſtée.

Sa mort a été regardée comme une perte publique, même dans le pays qu'il habitoit : l'Académie de Péterſbourg a porté ſolennellement ſon deuil, & lui a décerné à ſes frais un buſte de marbre qui doit être placé dans ſes ſalles d'aſſemblées; elle lui avoit déjà rendu pendant ſa vie, un honneur plus ſingulier. Dans un tableau allégorique, la Géométrie s'appuie ſur une planche chargée de calculs, & ce ſont les formules de ſa nouvelle théorie de la Lune, que l'Académie a ordonné d'y inſcrire. Ainſi, un pays, qu'au commencement de ce ſiècle nous regardions encore comme barbare, apprend aux nations les plus éclairées de l'Europe, à honorer la vie des grands hommes & leur mémoire récente : il donne à ces nations un exemple que pluſieurs d'entr'elles auroient à rougir, peut-être, de n'avoir ſu ni prévenir, ni même imiter.





ÉLOGE DE M. BÉZOUT.

ÉTIENNE BÉZOUT, de l'Académie des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Gardes de la Marine & des Élèves du Corps de l'Artillerie, naquit à Nemours, le 31 Mars 1730, de Pierre Bézout & d'Hélène Filz.

Le hasard lui offrit dans le cours de ses études, quelques Livres de Géométrie élémentaire, qui lui en inspirèrent le goût, & les Éloges de Fontenelle, qui lui apprirent qu'une carrière paisible & honorée est presque toujours le prix du talent & même de l'amour des Sciences. Son père vit avec peine des dispositions qui s'opposoient aux vues qu'il avoit formées; mais il fallut céder à un penchant devenu bientôt irrésistible.

Il ne faut pas regarder cette opposition dont l'histoire des Sciences offre tant d'exemples, même dans ce siècle, comme la suite d'un mépris pour elles, heureusement bien éloigné de nos mœurs. Il est souvent difficile de distinguer si ce penchant pour l'étude, au lieu d'être l'effet ou le signe d'un véritable talent, n'est pas plutôt le fruit d'une effervescence passagère, si même il ne sert pas de voile à un dégoût pour d'autres états dont les commencemens exigent plus de contrainte & de sacrifices : ainsi un père qui sait que l'instruction & les lumières ne mènent dans les différentes classes de la société, ni aux distinctions ni à la fortune, est très-excusable de regarder comme perdu le temps qu'après ses études ordinaires, son fils auroit employé à perfectionner son esprit ou sa raison; & dans cette circonstance, comme dans bien d'autres, les fautes des particuliers sont l'ouvrage des institutions publiques.

M. Bézout prouva bientôt que son ardeur pour l'étude des Mathématiques, ne l'avoit pas trompé sur la véritable destination à laquelle la Nature l'avoit appelé, & dès 1758 ses travaux lui méritèrent une place à l'Académie.

Il lui avoit présenté deux Mémoires sur le Calcul intégral: dans le premier, il déterminoit la forme des fonctions semblables dont les variables sont liées entr'elles par une équation, & qui, multipliées par des facteurs constans, & ajoutées ensemble, deviennent intégrables algébriquement, quoique chacune d'elles en particulier ne le soit pas. Il donnoit dans le second, l'équation générale des courbes rectifiables, & dans certains cas de celles dont la rectification dépend de leur quadrature.

Ces Mémoires annonçoient dans M. Bézout, le goût des recherches générales de Calcul, & le talent propre à réussir dans ces recherches.

En 1763, M. le Duc de Choiseul crut devoir exiger de ceux qui se destinoient à la Marine, des connoissances mathématiques plus étendues, & les assujettir à un examen. M. Bézout fut chargé à la fois des fonctions d'Examinateur, & de la composition d'un Cours de Mathématiques, destiné pour les Gardes de la Marine. Quelques années après, à la mort de M. Camus, il fut nommé Examinateur des Élèves de l'Artillerie.

Il sentit que ces places exigeoient le sacrifice de ses goûts, & qu'il seroit obligé de renoncer à la fois au plaisir de suivre dans ses études l'impulsion de son talent, & à une partie de la gloire qu'il pouvoit espérer. Cependant il étoit père de famille, il étoit sans fortune, & il ne se crut point permis de balancer; mais il prit le parti qu'un esprit très-sage devoit choisir: il vit que s'il ne traçoit pas une ligne bien marquée entre son devoir & sa passion, il faudroit la combattre sans cesse, & finir toujours par lui céder. Il résolut donc de concentrer sur un seul objet ses méditations mathématiques, afin d'être plus sûr de ne leur donner que la partie de son temps qui n'appartenoit point

à l'État; & il choiſit la Théorie générale des Équations déterminées.

On ſait que les équations du troiſième degré, & même celles du quatrième, ont été réſolues par des Géomètres Italiens, vers le milieu du ſeizième ſiècle. Depuis ce temps l'analyſe a fait des pas immenſes, pluſieurs découvertes importantes ſur les équations, ont illuſtré les noms de Viete & de Deſcartes; cependant l'équation du cinquième degré n'a pas encore été réſolue; & ſi les efforts que tous les Géomètres célèbres ont dirigé vers cet objet depuis deux cents ans, ont été plus d'une fois utiles aux progrès de la Science en général, ils l'ont été très-peu à la ſolution de ce problème en particulier.

M. Bézout trouva d'abord la ſolution d'une claſſe particulière d'Équations de tous les degrés. Sa méthode différente des méthodes déjà connues, ſe trouvoit générale pour le troiſième & le quatrième degré, & commençoit à devenir particulière préciſément au cinquième.

Cependant pour ce degré & pour les degrés ſupérieurs, ſi elle ne conduiſoit pas à la ſolution générale, du moins elle fourniſſoit des lumières utiles ſur la route qu'il falloit ſuivre pour y parvenir, & ſur les obſtacles qui juſqu'ici ont empêché d'y faire des progrès. Par cette méthode enfin on pénétroit un peu plus avant dans la connoiſſance de la nature des équations, & même elle ſemble offrir un fil qui peut-être ſervira quelque jour pour conduire à cette ſolution ſi deſirée. Mais il ſe préſentoit un grand obſtacle, l'énorme longueur des calculs auxquels il faudroit ſe livrer. Il étoit donc néceſſaire de donner une méthode de ſimplifier ces calculs, d'éviter toute complication inutile, & ſur-tout les erreurs où cette complication pourrroit conduire. Ainſi le perfectionnement de la méthode d'éliminer, devoit être un premier pas ſans lequel il étoit difficile de ſe flatter de parvenir à la ſolution du problème principal.

En ſuppoſant un nombre d'équations d'un degré quel-

conque, entre un nombre égal d'inconnues, il s'agit de trouver le degré où doit monter l'équation finale, & par conséquent de trouver cette équation telle qu'elle doit être sans aucune racine inutile : car en suivant la marche ordinaire, il arrive qu'on complique l'équation finale, qu'on la charge de racines superflues ; inconvénient d'autant plus grand, que ces racines ne servent pas à la solution des problèmes, & que l'élimination une fois achevée, il seroit ou très-difficile, ou très-pénible de les distinguer de celles qui doivent seules être employées.

Les équations proposées peuvent être complettes, ou manquer d'une partie de leurs termes, & c'est encore ici une nouvelle difficulté ; car ce seroit un défaut dans une solution de ce genre, d'être obligé de traiter l'équation comme complète, & d'achever l'opération dans cette hypothèse, pour déterminer ensuite d'après le résultat les changemens que le manquement de termes a pu produire. D'ailleurs, l'un des avantages les plus essentiels d'une méthode générale d'éliminer, est de dispenser dans bien des cas du travail d'exécuter cette opération, en donnant d'avance la forme & le degré de l'équation finale. Il se présente même un grand nombre de questions, & ce ne sont pas les moins importantes, où cette seule connoissance est nécessaire.

Le Traité sur l'Élimination, de M. Bézout, contient la solution de ce problème épineux & difficile, & il y parvient par le moyen de plusieurs théorèmes nouveaux sur le calcul des différences finies ; car toutes les parties de l'analyse, enchaînées l'une à l'autre, se prêtent des secours mutuels. Ces distinctions n'ont été faites que pour faciliter la méthode d'étudier ; & dans cette Science, comme dans toutes les autres, la Nature se joue de ces divisions qui doivent leur origine à son immensité & à notre foiblesse.

Cet Ouvrage ne parut qu'en 1779, & depuis 1762 M. Bézout n'avoit cessé de s'en occuper. Les Mathématiciens ne sont pas en général pressés de jouir, on a d'autant

d'autant moins beſoin de l'opinion des autres, qu'on eſt plus ſûr d'avance de celle qu'ils doivent avoir. D'ailleurs M. Bézout ne ſe permit de publier ce travail entrepris pour ſa gloire, & ſur-tout pour le plaiſir de s'y livrer, qu'après avoir donné ceux qui étoient pour lui des Ouvrages d'obligation. Il avoit compoſé deux Cours de Mathématiques; l'un pour la Marine, l'autre pour l'Artillerie; le fonds de ces Ouvrages étoit le même; les applications ſeules étoient différentes, & analogues dans chaque Cours, à l'objet principal des études de ceux auxquels il étoit deſtiné. La meilleure preuve du mérite des Livres Élémentaires, c'eſt leur ſuccès; ceux qui les enſeignent, ou qui les étudient trouvent trop d'avantage à choiſir celui qui en renfermant une égale inſtruction, leur donne le moins de peine, pour ne pas être juſtes même par intérêt. Les Cours élémentaires de M. Bézout ont été adoptés dans un grand nombre d'Écoles & par beaucoup de Maîtres; & ce ſuccès nous diſpenſe d'en apprécier le mérite.

Les Examens des Élèves de deux Écoles, & les voyages auxquels ces examens l'obligeoient, étoient pour M. Bézout une diſtraction pénible, dont ſon zèle pour le bien public pouvoit ſeul le conſoler. Encourager un Élève timide, faire oublier par un ton de bonhommie & par une douce familiarité, tout ce que le caractère d'Examinateur a d'impoſant pour un jeune homme tourmenté à la fois par l'amour de la gloire & par celui de la liberté, par le déſir de plaire à ſa famille, & par l'ambition de s'avancer; diſtinguer dans les fautes qui échappent à un Élève, celles dont le défaut d'intelligence ou d'inſtruction eſt la cauſe, & celles qui naiſſent d'un trouble involontaire; démêler dans celui qui s'énonce mal, le ſavoir & le talent qui ſe cachent; ne pas confondre la facilité qui vient de la mémoire ou de la confiance, avec celle qui annonce la ſagacité ou une conception rapide; juger le mérite d'un Élève d'après la manière dont il réſout les queſtions qu'on lui propoſe,

& non d'après ſon exactitude plus ou moins ſervile à ſuivre les ſolutions que l'Examinateur a données dans ſes Ouvrages; mettre enfin chacun d'eux à ſa place, & prononcer entre le plus jeune qui donne des eſpérances plus brillantes, & celui qui, éprouvé plus long-temps, en donne de plus certaines; entre l'Élève qui, également inſtruit ſur toutes les parties, montre une heureuſe facilité d'apprendre, & celui qui, foible ſur quelques-unes & ſupérieur ſur d'autres, annonce une tête capable de plus d'efforts & de combinaiſons plus profondes; tels ſont les devoirs d'un Examinateur & le tableau des examens de M. Bézout.

Il eſt auſſi dans cette place d'autres devoirs qui tiennent plus à l'Homme qu'au Savant; nous ne dirons pas ici avec quel ſcrupule il les a remplis, parce qu'un trait que nous allons rapporter, en fera mieux juger que tout ce que nous pourrions dire.

Pendant un examen à Toulon, il apprend que deux Élèves ne pourront ſe préſenter, parce qu'ils ſont attaqués de la petite vérole; il n'avoit pas eu cette maladie, il la craignoit; cependant il ſait que s'il ne voit pas ces Élèves, il retardera d'un an leur avancement; dès ce moment ſes répugnances ſe taiſent, il ſe fait conduire au lit des malades, les examine & ſe trouve heureux de ce qu'ils ont été dignes du ſacrifice qu'il a fait pour eux.

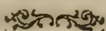
Un pareil acte d'une juſtice rigoureuſe exercée même au péril de ſes jours, eſt un de ces traits qui répondent d'une vie entière.

M. Bézout, quoique livré preſque excluſivement à la Géométrie, n'avoit pas négligé d'acquérir des connoiſſances même très-étendues ſur la plupart des branches de la Phyſique; & c'eſt à lui que l'Académie doit la première connoiſſance de ces grès criſtalliſés de Fontainebleau, ſur leſquels M. de Laſſone a donné depuis pluſieurs ſavans Mémoires.

M. Bézout s'étoit marié très-jeune, & comme alors il étoit ſans fortune, il avoit pu ſuivre le choix de ſon cœur;

cette union fut heureuse, il fut très-bon père, non-seulement parce que c'est un devoir, mais parce qu'il aimoit à vivre au milieu de sa famille, & qu'il préféroit cette société si douce & si pure, ces soins si touchans, aux plaisirs qu'on trouve ou qu'on croit trouver dans le monde. Né avec un cœur droit, il aimoit le travail & la retraite, aussi eut-il toutes les vertus & quelques-uns des défauts qui sont la suite du goût de la solitude; défauts bien plus excusables que ceux qui se contractent par l'habitude du monde & des affaires; les premiers font souffrir, sur-tout celui qui n'a pu s'en préserver, au lieu que le poids des derniers retombe tout entier sur les autres hommes. Réservé dans la société, parce qu'il y étoit étranger, il ne s'y montroit pas tel qu'il étoit; son extérieur étoit froid, & il avoit une ame ardente & sensible; sa conversation n'annonçoit ni la sagacité de son esprit ni ses connoissances à la fois & étendues profondes: aussi son portrait tracé par ses amis, ou par ceux qui ne l'ont connu que superficiellement, paroîtroit celui de deux hommes absolument étrangers l'un à l'autre.

Tout sembloit lui promettre des jours heureux; sa fortune suffisoit non-seulement à son bien-être personnel, mais aux desirs qu'il formoit pour sa famille, avec une modération égale à celle qu'il avoit pour lui-même. Il jouissoit de la juste réputation que ses Ouvrages lui avoient méritée, de l'estime de ses Confrères, de la considération des Ministres, qui connoissoient son zèle & sa droiture, & auxquels la voix publique avoit appris à respecter ses lumières; enfin, de la tendresse de quelques amis & de celle d'une famille à laquelle il tenoit encore par le besoin qu'elle avoit de lui. Mais le travail, la fatigue de ses places, quelques chagrins personnels avoient altéré ses forces; il fut attaqué d'une fièvre maligne, & y succomba le 27 Septembre 1783, regretté de sa famille, de ses Confrères, de ses amis, de ses Élèves, de tous ceux qui avoient pu le bien connoître.





ÉLOGE
DE M. D'ALEMBERT.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT, Secrétaire perpétuel de l'Académie Françoiſe, Membre des Académies des Sciences de France, de Pruſſe, de Ruſſie, de Portugal, de Naples, de Turin, de Norvège, de Padoue; de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suède, de l'Inſtitut de Bologne, de la Société littéraire de Caſſel, & de la Société philoſophique de Boſton, naquit à Paris le 17 Novembre 1717.

Nous ne chercherons point à lever le voile dont le nom de ſes parens a été couvert pendant ſa vie; & qu'importe ce qu'ils ont pu être? les véritables aïeux d'un homme de génie, ſont les Maîtres qui l'ont précédé dans la carrière; & ſes vrais deſcendans ſont des Élèves dignes de lui.

Expoſé près de l'égliſe de Saint Jean-le-Rond, M. d'Alembert fut porté chez un Commiſſaire, qu'heureuſement l'habitude des triſtes fonctions de ſa place n'avoit point endurci; il craignit que cet enfant débile & preſque mourant, ne pût trouver dans un hoſpice public les ſoins, les attentions ſuivies, néceſſaires pour ſa conſervation, il en chargea une ouvrière dont il connoiſſoit les mœurs & l'humanité; & c'eſt de ce haſard heureux qu'a dépendu l'exiſtence d'un homme qui devoit être l'honneur de ſa patrie & de ſon ſiècle, & que la Nature avoit deſtiné à enrichir de tant de vérités nouvelles le ſyſtème des connoiſſances humaines.

Cet abandon, qui peut-être n'étoit même qu'apparent, ne dura que très-peu de jours; le père de M. d'Alembert le répara auſſitôt qu'il en fut inſtruit, il fit pour l'éducation

de ſon fils, & pour lui aſſurer une ſubſiſtance indépendante, ce qu'exigeoient la Nature & le devoir : ſa famille regarda M. d'Alembert, tant qu'il fut inconnu, comme un parent à q i elle devoit des ſoins & des égards; & lorſqu'il fut devenu célèbre, elle s'honora de ces liens que la reconnoiſſance avoit reſſerrés.

M. d'Alembert fit ſes études au collége des Quatre-nations, & les fit d'une manière brillante, indice quelquefois trompeur de ce qu'un homme doit être un jour.

L'importance que le Cardinal Mazarin eut la foibleſſe ou l'imprudence de donner aux diſputes des amis de Saint-Cyran avec les Jéſuites, avoit produit des troubles qui, après quatre-vingts ans, agitoient encore la France, & dont le progrès des lumières a depuis preſque anéanti juſqu'au ſouvenir; mais en 1730, il n'y avoit aucun Corps, aucun Collége, pour ainſi dire aucun homme, qui, par zèle religieux, par politique ou par déſœuvrement, n'eût embraſſé un des deux partis.

Les Maîtres de M. d'Alembert étoient de celui qu'on appeloit *Janſéniſte*, car dans les diſputes de ce genre, on cherche toujours à rendre ſes adverſaires odieux par un nom de ſecte dont ils ont grand ſoin de ſe défendre; eſpèce d'hommage qu'ils rendent à la raiſon. M. d'Alembert fit, dans ſa première année de Philoſophie, un Commentaire ſur l'Épître de Saint Paul aux Romains, & commença comme Newton avoit fini ; ce Commentaire donna de grandes eſpérances à ſes Maîtres : les hommes diſtingués dans la Littérature ou dans les Sciences, montroient alors preſque ſeuls à la Nation, l'exemple d'une indifférence ſalutaire; on ſe flatta que M. d'Alembert rendroit au parti de Port-royal une portion de ſon ancienne gloire, & qu'il ſeroit un nouveau Paſcal.

Pour rendre la reſſemblance plus parfaite, on lui fit ſuivre des leçons de Mathématiques ; mais bientôt on s'aperçut qu'il avoit pris pour ces Sciences une paſſion qui décida du ſort de ſa vie : en vain ſes Maîtres cherchèrent

à l'en détourner, en lui annonçant que cette étude lui deſſécheroit le cœur (ils ne ſentoient pas ſans doute toute la force de l'aveu que renferme cette expreſſion): M. d'Alembert fut moins docile que Paſcal, jamais on ne put lui faire regarder l'amour un peu excluſif des vérités certaines & claires, comme une erreur dangereuſe, ou comme un penchant de la Nature corrompue.

En ſortant du Collége, il jeta un coup-d'œil ſur le monde, il s'y trouva ſeul, & courut chercher un aſile auprès de ſa nourrice; l'idée conſolante, que ſa fortune, toute médiocre qu'elle étoit, répandroit un peu d'aiſance dans cette famille, la ſeule qu'il pût regarder comme la ſienne, étoit encore pour lui un motif puiſſant: il y vécut près de quarante années, conſervant toujours la même ſimplicité, ne laiſſant apercevoir l'augmentation de ſon revenu que par celle de ſes bienfaits, ne voyant dans la groſſièreté des manières de ceux avec leſquels il vivoit, qu'un ſujet d'obſervations plaiſantes ou philoſophiques, & cachant tellement ſa célébrité & ſa gloire, que ſa nourrice qui l'aimoit comme un fils, qui étoit touchée de ſa reconnoiſſance & de ſes ſoins, ne s'aperçut jamais qu'il fût un Grand homme: ſon activité pour l'étude, dont elle étoit témoin, ſes nombreux Ouvrages dont elle entendoit parler, n'excitoient ni ſon admiration, ni le juſte orgueil qu'elle auroit pu reſſentir, mais plutôt une ſorte de compaſſion: *vous ne ſerez jamais qu'un Philoſophe*, lui diſoit-elle; *& qu'eſt-ce qu'un Philoſophe! — c'eſt un fou qui ſe tourmente pendant ſa vie, pour qu'on parle de lui lorſqu'il n'y ſera plus.*

Dans cette maiſon, M. d'Alembert s'occupoit preſque uniquement de Géométrie, achetant quelques livres, allant chercher dans les Bibliothèques publiques ceux qu'il ne pouvoit acheter: ſouvent il ſe préſentoit à lui des vues nouvelles, il les ſuivoit, il goûtoit déjà le plaiſir de faire des découvertes; mais ce plaiſir étoit court, il conſultoit les Livres, & voyoit avec un ſentiment un peu pénible, que ce qu'il croyoit avoir trouvé le premier, étoit déjà

connu: alors il se persuada que la Nature lui avoit refusé le génie, qu'il devoit se borner à savoir ce que les autres auroient découvert, & il se résigna sans peine à cette destinée; il sentoit que le plaisir d'étudier, même sans la gloire, suffiroit encore à son bonheur. Cette anecdote que nous tenons de lui-même, nous paroît un fait moral bien précieux; il est rare de pouvoir observer le cœur humain si près de sa pureté naturelle, & avant que l'amour-propre l'ait corrompu.

Cependant on fit apercevoir à M. d'Alembert, qu'avec une pension de douze cents livres, on n'étoit pas assez riche pour renoncer aux moyens d'augmenter son aisance; on lui fit sentir la nécessité de prendre un état, car celui de Géomètre n'en est pas un, & même les places où les connoissances mathématiques sont nécessaires, ne donnent pas cette heureuse indépendance que le Jurisconsulte & le Médecin sans fortune obtiennent dès les premiers pas de leur carrière. M. d'Alembert étudia d'abord en Droit & y prit des degrés, mais il abandonna bientôt cette étude: l'Ouvrage de Montesquieu n'existoit point encore, on ne prévoyoit pas la révolution qu'il devoit produire dans nos esprits; l'étude du Droit ne pouvoit paroître que celle de l'opinion, de la volonté, du caprice des hommes, qui, depuis trente siècles, avoient joui ou abusé du pouvoir, en Grèce, à Rome & chez les Barbares: comment un jeune Géomètre n'eût-il pas été bientôt dégoûté de pareils objets, sur lesquels il trouvoit à exercer sa mémoire bien plus que sa raison? Il préféra donc la carrière de la Médecine, mais la passion de la Géométrie lui faisoit encore négliger ses nouvelles études, & il prit le parti courageux de se séparer des objets de sa passion; ses Livres de Mathématiques furent portés chez un de ses amis, où il ne devoit les reprendre qu'après avoir été reçu Docteur en Médecine, lorsqu'ils ne seroient plus pour lui qu'un délassement, & non une distraction.

Cependant poursuivi par ses idées, il demandoit de

temps en temps à ſon ami, un livre qui lui étoit néceſſaire pour ſe délivrer de cette inquiétude pénible que ſi peu d'hommes connoiſſent, & que produit le ſouvenir confus d'une vérité dont on cherche en vain les preuves dans ſa mémoire; peu-à-peu tous ſes Livres ſe retrouvèrent chez lui: alors, bien convaincu de l'inutilité de ſes efforts pour combattre ſon penchant, il y céda, & ſe voua pour toujours aux Mathématiques & à la pauvreté; les années qui ſuivirent cette réſolution, furent les plus heureuſes de ſa vie, il ſe plaiſoit à en répéter les détails: à ſon réveil, il penſoit, diſoit-il, avec un ſentiment de joie, au travail commencé la veille, & qui alloit remplir la matinée; dans les intervalles néceſſaires de ſes méditations, il ſongeoit au plaiſir vif que le ſoir il éprouveroit au Spectacle, où, pendant les entre-actes, il s'occupoit du plaiſir plus grand que lui promettoit le travail du lendemain.

En 1741, il entra dans l'Académie des Sciences, il s'en étoit fait connoître par un Mémoire où il relevoit quelques fautes échappées au Père Reinau, dont l'*Analyſe démontrée* étoit alors regardée en France comme un Livre claſſique; & c'étoit en l'étudiant pour s'inſtruire, que le jeune Géomètre avoit appris à le corriger.

Il s'étoit occupé enſuite d'examiner quel devoit être le mouvement d'un corps qui paſſe d'un fluide dans un autre plus denſe, & dont la direction n'eſt pas perpendiculaire à la ſurface qui les ſépare: lorſque cette direction eſt très-oblique, on voit le corps, au lieu de s'enfoncer dans le ſecond fluide, ſe relever & former un ou pluſieurs ricochets, phénomène qui avoit amuſé les enfans long-temps avant la découverte des premiers principes des Sciences, & que cependant, juſqu'à M. d'Alembert, on n'avoit pas encore bien expliqué.

Deux ans après ſon entrée à l'Académie, il publia ſon traité de Dynamique.

Dans la Science du mouvement, il faut diſtinguer deux ſortes

ſortes de principes; les uns ſont des vérités de pure définition, les autres ſont ou des faits donnés par l'obſervation, ou des loix générales déduites de la nature des corps conſidérés comme impénétrables, indifférens au mouvement, & ſuſceptibles d'en recevoir : de ces derniers principes, celui de la décompoſition des forces, étoit le ſeul vraiment général qui fût connu juſqu'alors; & joint à ces vérités de définition, ſur leſquelles Huygens & Newton n'avoient rien laiſſé à découvrir, il avoit ſuffi pour établir leurs ſublimes théories, & pour réſoudre ces problèmes de Statique, ſi célèbres dans le commencement de ce ſiècle. Mais ſi les corps ont une forme finie, ſi on les imagine liés entr'eux par des fils flexibles, ou par des verges inflexibles, & qu'on les ſuppoſe en mouvement, alors ces principes ne ſuffiſent plus, & il falloit en inventer un nouveau; M. d'Alembert le découvrit, & il n'avoit que vingt-ſix ans: ce principe conſiſte à établir l'égalité, à chaque inſtant, entre les changemens que le mouvement du corps a éprouvés, & les forces qui ont été employées à les produire, ou, en d'autres termes, à ſéparer en deux parties l'action des forces motrices, à conſidérer l'une comme produiſant ſeule le mouvement du corps dans le ſecond inſtant, & l'autre comme employée à détruire celui qu'il avoit dans le premier: ce principe ſi ſimple, qui réduiſoit à la conſidération de l'équilibre toutes les loix du mouvement, a été l'époque d'une grande révolution dans les Sciences Phyſico-mathématiques. À la vérité, pluſieurs des problèmes réſolus dans le traité de Dynamique, l'avoient déjà été par des méthodes particulières; différentes en apparence pour chaque problème, elles n'étoient ſans doute réellement qu'une ſeule & même méthode, ſans doute elles renfermoient le principe général qui y étoit caché, mais perſonne n'avoit pu l'y découvrir; & ſi on refuſoit, ſous ce prétexte, à M. d'Alembert, la juſte admiration qu'il mérite, on pourroit, avec autant de raiſon, faire honneur à Huygens des découvertes de Newton,

& accorder à Wallis la gloire que Léibnitz & Newton ſe ſont diſputée.

Les découvertes ſucceſſives qui forment les Sciences, naiſſent les unes des autres; celle qui appartient excluſivement à un ſeul homme, eſt dûe à ſon génie aidé des travaux de ceux qui l'ont précédé, lui ont aplani la carrière, & ne lui ont plus laiſſé qu'un dernier obſtacle à vaincre : mais parmi ces découvertes, il en eſt qui par leur étendue, leur influence ſur le progrès général des Sciences, la nombreuſe ſuite de théories nouvelles qui n'en ſont que le développement, ſemblent former une claſſe particulière, & mériter à leur inventeur un rang à part dans le nombre déjà ſi petit des hommes de génie.

Telle a été celle du principe de M. d'Alembert; déjà, en 1744, il l'avoit appliqué à la théorie de l'équilibre & du mouvement des fluides, & tous les problèmes réſolus juſqu'alors par les Géomètres, étoient devenus en quelque ſorte des corollaires de ce principe: mais il avoit fallu employer en même temps les hypothèſes ingénieuſes de M. Daniel Bernoulli, que leur accord avec les phénomènes les plus généraux de l'Hydraulique, permettoit preſque de regarder comme des faits. Dans la théorie des fluides, comme dans celle du mouvement des corps ſuſceptibles de changer de forme, le principe de M. d'Alembert, lorſqu'on l'employoit ſeul, conduiſoit à des équations qui échappoient aux méthodes connues, & cette première découverte ſembloit rendre néceſſaire celle d'un nouveau calcul; M. d'Alembert en eut encore l'honneur: dans un Ouvrage ſur la théorie générale des Vents, couronné par l'Académie de Berlin, en 1746, il donna les premiers eſſais du calcul des différences partielles; l'année ſuivante, il l'appliqua au problème des cordes vibrantes, dont la ſolution, ainſi que la théorie des oſcillations de l'air & de la propagation du ſon, n'avoient pu être données que d'une manière incomplète par les Géomètres qui

l'avoient précédé, & ces Géomètres étoient ou ses maîtres ou ses rivaux.

L'invention de ce calcul est encore une de ces découvertes destinées à être dans les Sciences une époque mémorable : elle le mérite d'autant plus, qu'en donnant un nouvel instrument d'un usage très-étendu, elle a montré en même-temps la route qu'il falloit suivre pour en former d'autres du même genre ; & toutes les parties de l'analyse où l'on considère des équations dont l'intégrale peut contenir des fonctions arbitraires de quantités variables, doivent être regardées comme des branches du calcul de M. d'Alembert, quels que soient la forme de ces arbitraires & le système de différentiation qui les ait fait évanouir.

Dans cette pièce sur la théorie des Vents, il ne considéra que l'effet qui peut être produit par l'action combinée de la Lune & du Soleil sur le fluide dont la Terre est enveloppée; il examina quelle figure l'atmosphère doit prendre à chaque instant, en vertu de cette action, la force & la direction des courans qui en résultent, & les changemens que doit produire sur leur direction & sur leur vîtesse, la forme des grandes vallées qui sillonnent la surface du globe.

Les changemens de température, produits dans l'atmosphère par la présence du Soleil, sont une autre cause générale, régulière, & susceptible d'être mesurée, M. d'Alembert se borne à en remarquer l'existence ; il auroit fallu, pour la calculer, adopter quelque hypothèse sur les loix de la dilatation de l'air, sur l'intensité de l'action de la chaleur du Soleil aux différentes hauteurs, & pour des couches d'air plus ou moins denses ; ses recherches n'eussent servi qu'à donner une preuve de plus de son génie pour l'analyse, mais sans conduire à aucun résultat réel; il n'eût travaillé que pour la gloire, & il vouloit réserver ses forces pour des Ouvrages utiles aux progrès des Sciences.

Il lui restoit encore à donner un moyen d'appliquer son principe au mouvement d'un corps fini, d'une figure donnée; & en 1749, il résolut le problème de la précession

des équinoxes. L'axe de la Terre ne répond point toujours au même lieu du ciel, mais il se dirige successivement vers tous les points d'un cercle parallèle au plan de l'orbite terrestre; & par une suite de ce mouvement, les équinoxes & les solstices répondent, dans la même période, à toutes les parties du Zodiaque: ce phénomène, connu sous le nom de *précession des équinoxes*, a été observé par les Anciens; Hipparque en avoit supposé la période de 25200, & les Modernes, par des observations plus exactes, l'ont fixée à environ 720 ans de plus. Ce mouvement en longitude n'est pas le seul qu'éprouve l'axe de la Terre; il en a un autre en latitude bien plus petit, qui n'est qu'un espèce de balancement, & dont la période est de dix-huit ans seulement; cette nutation n'a été découverte que dans ce siècle par Bradley, & jusqu'à lui on la confondoit avec les mouvemens irréguliers, propres aux Étoiles fixes. Newton attribuoit avec raison la précession des équinoxes à l'effet de l'attraction de la Lune & du Soleil sur la Terre; il savoit que notre Planète est un sphéroïde aplati vers les pôles, & que ces deux astres étant mus dans des plans où ils n'agissent pas d'une manière semblable sur les parties semblablement disposées autour de l'axe de la Terre, doivent altérer son mouvement de rotation; mais ce n'étoit pas assez, Newton avoit appris le premier aux Philosophes, à n'admettre pour vraies que des explications calculées, qui rendent raison du phénomène en lui-même, de sa quantité & de ses loix; aussi essaya-t-il de déterminer l'effet de l'attraction de la Lune & du Soleil sur le mouvement de l'axe de la Terre, mais les méthodes d'analyse & les principes même de Mécanique nécessaires pour une solution directe, manquoient à son génie, & il fut obligé d'admettre des hypothèses qui ne le conduisirent à un résultat conforme à l'observation, que par la compensation des erreurs produites par chacune d'elles: vingt-trois ans après sa mort, cette limite qu'il sembloit avoir posée, n'avoit pas été franchie; M. d'Alembert en eut la gloire, il expliqua

également le phénomène de la nutation, nouvellement découvert, & répara l'honneur de la France, ou plutôt du Continent, qui jufqu'alors n'avoit eu rien à oppofer aux découvertes de Newton.

Un feul Géomètre, M. Euler, eût pu difputer cette gloire à M. d'Alembert; mais en donnant une folution nouvelle du problème, il avoua qu'il avoit lû l'Ouvrage de M. d'Alembert, & fit cet aveu avec cette noble franchife d'un Grand-homme qui fent qu'il peut, fans rien perdre de fa renommée, convenir du triomphe de fon rival.

En 1752, M. d'Alembert publia un Traité fur la réfiftance des fluides, auquel il donna le titre modefte d'*Effai*, & qui eft un de fes Ouvrages où l'on trouve le plus de chofes originales & neuves.

La fimple fuppofition, que chaque élément de la maffe fluide, en changeant de forme à chaque inftant, conferve le même volume, lui fuffit pour appliquer fon principe aux queftions les plus difficiles, & il eft conduit à des équations de la nature de celles dont fa nouvelle analyfe peut donner la folution: les réflexions fur les caufes générales des vents, contenoient le germe de ces découvertes; mais ici elles font développées, & la théorie du mouvement des fluides eft enfin véritablement affujettie au calcul.

A la même époque, M. d'Alembert avoit donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, des recherches fur le Calcul intégral, où la méthode de Jean Bernoulli, pour les fonctions rationnelles, étoit perfectionnée; où, par un ufage adroit des fubftitutions, il étendoit cette méthode à plufieurs claffes de fonctions irrationnelles; où il réduifoit à une même expreffion toutes les imaginaires, fous quelque forme qu'elles fe préfentent, quelle que foit l'équation à laquelle elles doivent fatisfaire; où il donnoit la théorie des points de rebrouffement de la feconde efpèce, dont plufieurs Géomètres célèbres, & M. Euler lui-même, avoient combattu l'exiftence; où enfin il propofoit une

méthode d'intégrer les équations linéaires d'un ordre quelconque, intégration importante, qui eſt le fondement de toutes les méthodes d'approximation pour les équations différentielles, & par conſéquent, dans l'état actuel de l'analyſe, la clef de toutes les queſtions de l'Aſtronomie-phyſique. M. Euler avoit publié avant lui, une méthode également générale pour ces équations; mais le Géomètre françois l'avoit auſſi prévenu ſur quelques autres points.

M. d'Alembert n'a donné aucun grand Ouvrage ſur le Calcul; ſes Mémoires même, à l'exception de ceux que nous venons de citer, & d'un petit nombre d'autres, ont pour objet des queſtions de Mécanique; mais il a répandu dans tous, de nouvelles méthodes d'analyſe, ou des remarques importantes ſur les méthodes déjà connues, & on lui doit en grande partie les progrès rapides que le Calcul intégral a faits dans ce ſiècle. Il ſembloit ſeulement que l'idée de quelque application utile étoit néceſſaire pour réveiller ſon génie qui déployoit alors toute ſa fineſſe, toute ſa profondeur & toute ſa fécondité.

C'eſt ainſi que M. d'Alembert s'étoit montré, à trente-deux ans, le digne ſucceſſeur de Newton, en réſolvant le problème de la préceſſion des équinoxes, dont la ſolution confirme, par une preuve victorieuſe, la théorie de la gravitation univerſelle, en ſe conſacrant comme lui à l'étude des loix mathématiques de la Nature, en créant comme lui une ſcience nouvelle, en inventant auſſi un nouveau calcul, mais dont perſonne n'a conteſté la découverte à M. d'Alembert, ou n'a voulu la partager.

Tant qu'il n'a été que Géomètre, à peine étoit-il connu dans ſa Patrie; borné à la ſociété de quelques amis, n'ayant jamais vu, parmi les gens en place, que deux Miniſtres qui, par les agrémens de leur eſprit, auroient été des particuliers aimables *; réduit au néceſſaire le plus ſimple, mais heureux du plaiſir que donne l'étude & de ſa liberté, il avoit conſervé ſa gaieté naturelle dans toute la naïveté de la jeuneſſe. Content de ſon ſort, il ne deſiroit ni fortune

* M.[rs] d'Argenſon.

ni diſtinctions, & il n'en avoit point obtenu, parce qu'il eſt plus commode de les accorder à ceux qui les demandent, qu'à ceux qui ſavent les mériter. Sa gaieté, des ſaillies piquantes, le talent de conter & même de jouer ſes contes, de la malice dans le ton avec de la bonté dans le caractère, autant de fineſſe dans la converſation que de ſimplicité dans la conduite : toutes ces qualités, en le rendant, par leur réunion, à la fois eſtimable & amuſant, le faiſoient rechercher dans le monde. On aimoit en lui cette bonhomie, ſi touchante quand elle ſe trouve dans les hommes ſupérieurs, chez qui pourtant elle eſt bien moins rare que dans ceux qui n'ont que la prétention de l'être.

Cependant un Roi, déjà illuſtré par cinq victoires, & dont la gloire devoit croître encore, avertit enfin la France qu'elle avoit un Grand-homme de plus; ſes bienfaits vinrent chercher M. d'Alembert, & il y joignit des témoignages d'eſtime & d'amitié fort au-deſſus de ſes bienfaits.

Peu de temps après, M. d'Alembert reçut une penſion du Gouvernement; il la devoit à l'amitié de M. le Comte d'Argenſon, qui aimoit les gens d'eſprit & n'en étoit point jaloux, parce que lui-même avoit beaucoup d'eſprit. Cette jalouſie eſt plus commune qu'on ne le croit, & elle a été ſouvent le motif ſecret de l'indifférence ou de la haine de quelques Miniſtres, pour les hommes de génie que le haſard avoit fait naitre dans le même pays & dans le même ſiècle.

La tranquillité de M. d'Alembert fut altérée dès que ſa réputation fut plus répandue. Lorſque ſon goût pour la Littérature & ſes méditations ſur la Philoſophie, étoient un ſecret connu ſeulement de ſes amis; borné aux yeux de tous les autres à l'étude des Sciences abſtraites, il échappoit à leur jugement; apprécié par un petit nombre de rivaux ou de diſciples, admiré d'eux ſeuls, ſa gloire n'offenſoit encore perſonne.

Mais il s'étoit lié, depuis ſa jeuneſſe, par une amitié

tendre & ſolide avec un homme d'un eſprit étendu, d'une imagination vive & brillante, dont le coup-d'œil vaſte embraſſoit à la fois les Sciences, les Lettres & les Arts, également paſſionné pour le vrai & pour le beau, également propre à pénétrer les vérités abſtraites de la Philoſophie, à diſcuter avec fineſſe les principes des Arts, & à peindre leurs effets avec enthouſiaſme; Philoſophe ingénieux & ſouvent profond, Écrivain à la fois agréable & éloquent, hardi dans ſon ſtyle comme dans ſes idées: inſtruiſant ſes Lecteurs, mais ſur-tout leur inſpirant le deſir d'apprendre à penſer, & faiſant toujours aimer la vérité, même lorſqu'entraîné par ſon imagination, il avoit le malheur de la méconnoître.

Une Traduction de l'Encyclopédie Angloiſe de Chambers, qui avoit été propoſée à M. Diderot, devint entre ſes mains l'entrepriſe la plus grande & la plus utile que l'eſprit humain ait jamais formée. Il ſe propoſa de réunir dans un Dictionnaire tout ce qui avoit été découvert dans les Sciences, ce qu'on avoit pu connoître des productions du Globe, les détails des Arts que les hommes ont inventés, les principes de la Morale, ceux de la Politique & de la Légiſlation, les Loix qui gouvernent les Sociétés, la Métaphyſique des Langues & les règles de la Grammaire, l'analyſe de nos facultés, & juſqu'à l'Hiſtoire de nos opinions. M. d'Alembert fut aſſocié à ce projet, & ce fut alors qu'il donna le Diſcours préliminaire de l'Encyclopédie.

Il y trace d'abord le développement de l'eſprit humain, non tel que l'Hiſtoire des Sciences & celle des Sociétés nous le préſentent, mais tel qu'il s'offriroit à un homme qui auroit embraſſé tout le ſyſtême de nos connoiſſances, & qui réfléchiſſant ſur l'origine & la liaiſon de ſes idées, s'en formeroit un tableau dans l'ordre le plus naturel; il verroit la Morale & la Métaphyſique naître de ſes obſervations ſur lui-même; la ſcience des Gouvernemens, & celle des Loix, de ſes obſervations ſur la Société.

Excité

Excité par ses besoins, il voudroit acquérir la connoissance des productions de la Nature, & celle des moyens de les multiplier & de les employer. Le desir de soulager ses maux lui feroit inventer toutes les Sciences sur lesquelles la Médecine s'appuie, & dont le but est de perfectionner ou de rendre plus sûr l'Art de guérir; l'envie naturelle de connoître les propriétés les plus générales des corps, le conduiroit aux vérités de la Chimie & de la Physique. Bientôt dépouillant successivement ces corps de toutes leurs qualités, pour ne conserver que le nombre & l'étendue, il formeroit toutes les Sciences Mathématiques, il détermineroit ensuite pour chaque Science l'objet qu'elle doit se proposer, la méthode qu'elle doit suivre, le degré de certitude auquel elle peut atteindre. Forcé de les séparer pour en pouvoir saisir & embrasser chaque partie, il observeroit encore les liens imperceptibles qui les unissent, les secours qu'elles peuvent se prêter, & leur influence réciproque.

La suite de ce Discours contient un tableau précis de la marche des Sciences depuis leur renouvellement, de leurs richesses à l'époque où M. d'Alembert en traçoit l'Histoire, & des progrès qu'elles devoient espérer encore; les grands Hommes des siècles passés y sont jugés par un de leurs égaux; les Sciences, par un homme qui les avoit enrichies de grandes découvertes: & la réunion d'une vaste étendue de connoissances, cette manière d'envisager les Sciences qui n'appartient qu'à un homme de génie, un style clair, noble, énergique, ayant toute la sévérité qu'exige le sujet, & tout le piquant qu'il permet, ont mis le Discours préliminaire de l'Encyclopédie au nombre de ces Ouvrages précieux que deux ou trois hommes tout au plus dans chaque siècle sont en état d'exécuter.

Dès le moment où M. d'Alembert fut connu pour mériter une place distinguée parmi les Philosophes & les Écrivains, il eut, & il mérita toujours depuis d'avoir les ennemis que les succès dans les Lettres & dans la Philosophie ne manquent jamais d'attirer, c'est-à-dire, la foule

de ceux pour qui la Littérature eſt un métier, & la claſſe plus nombreuſe encore de ces hommes aux yeux de qui la vérité ne paroît qu'une innovation dangereuſe.

Il publia, peu de temps après, des Mélanges de Philoſophie, d'Hiſtoire & de Littérature, qui augmentèrent le nombre de ſes détracteurs. Les Mémoires de Chriſtine montrèrent qu'il connoiſſoit les droits des hommes, & qu'il avoit le courage de les réclamer.

L'Eſſai ſur la ſociété des Gens de Lettres avec les Grands, déplut à ceux des Littérateurs qui trouvoient dans cette Société une utilité réelle ou l'aliment d'une vaine gloire, & qui furent bleſſés de voir expoſer aux yeux du Public la honte des fers qu'ils n'oſoient rompre ou qu'ils ambitionnoient de porter. On ne peut mieux juger cet Eſſai, qu'en rapportant la réponſe d'une femme de la Cour à des hommes qui reprochoient à M. d'Alembert d'avoir exagéré le deſpotiſme des Grands & l'aſſerviſſement qu'ils exigent: *S'il m'avoit conſultée, je lui en aurois appris bien davantage.*

Peut-être devons-nous en partie à cet Ouvrage le changement qui s'eſt fait dans la conduite des Gens de Lettres, & qui remonte vers la même époque; ils ont ſenti enfin que toute dépendance perſonnelle d'un Mécène leur ôtoit le plus beau de leurs avantages, la liberté de faire connoître aux autres la vérité lorſqu'ils l'ont trouvée, & d'expoſer dans leurs Ouvrages, non les preſtiges de l'art d'ecrire, mais le tableau de leur ame & de leurs penſées: ils ont renoncé à ces Épitres Dédicatoires qui aviliſſoient l'Auteur, même lorſque l'Ouvrage pouvoit inſpirer l'eſtime ou le reſpect; ils ne ſe permettent plus ces flatteries, toujours d'autant plus exagérées, qu'ils mépriſoient davantage au fond du cœur l'homme puiſſant dont ils mendioient la protection; & par une révolution heureuſe, la baſſeſſe eſt devenue un ridicule que très-peu d'Hommes de Lettres ont eu le courage de braver.

M. d'Alembert joignit à ces Ouvrages philoſophiques

la traduction de quelques morceaux choisis de Tacite; c'étoit s'exposer aux coups d'une classe d'hommes qui n'auroient pu l'atteindre, s'il fût resté dans la région où il s'étoit placé à côté de Newton: mais il sortit victorieux de ce combat, du moins au jugement des Philosophes & des gens du monde; & on convint qu'il n'y avoit personne qui, par son genre d'esprit & la précision de son style, fût plus en état d'entendre Tacite, & plus digne de le traduire.

Les occupations littéraires de M. d'Alembert ne lui avoient point fait négliger les Mathématiques; une foule d'articles insérés dans l'Encyclopédie, montrent, dans une exposition en apparence élémentaire, & le génie d'un Géomètre, & le coup-d'œil d'un Philosophe.

C'est dans le même espace de temps qu'il composa ses Recherches sur différens points importans du Systême du Monde; il y perfectionna sa solution du problème des perturbations des Planètes, déjà connue depuis plusieurs années de l'Académie & des Savans. Deux Géomètres en partageoient la gloire avec lui; tous trois, à peu-près dans le même-temps, donnoient une solution de ce problème; le fond de leur méthode étoit le même: tous trois avoient trouvé, par un premier calcul, que le mouvement de l'apogée de la Lune, n'étoit que la moitié de ce qu'il est réellement; tous trois, en calculant un terme de plus, avoient reconnu la conformité des résultats du calcul & de l'observation.

Cette concurrence qui subsista également dans l'application de la même méthode aux mouvemens des Comètes, produisit une longue discussion entre M. d'Alembert & M. Clairaut, car M. Euler resta simple spectateur. Lorsqu'on examine les disputes de ce genre, long-temps après le moment où elles se sont élevées, lorsque le temps a calmé les premiers mouvemens de l'amour-propre, lorsque l'amitié même, dont le zèle est quelquefois plus durable, peut considérer de sang-froid les objets de la discussion, souvent on s'étonne de l'importance qu'on y avoit attachée.

On pourroit demander ici pourquoi M. d'Alembert n'imita point la tranquillité de M. Euler; & comment, lorſque le mérite d'avoir réſolu le problème, ne lui étoit point conteſté, lorſqu'il ne partageoit avec perſonne, ni la gloire d'avoir découvert un principe fondamental de la Mécanique, & de l'avoir appliqué, ſoit à la théorie des fluides, ſoit au mouvement des corps finis, ni celle d'avoir inventé un nouveau calcul, il pouvoit mettre tant de prix à la part plus ou moins grande qu'il devoit obtenir dans l'honneur de la ſolution d'un problème moins difficile ? Mais il eſt un effort preſque impoſſible à notre foibleſſe, celui de ſupporter tranquillement l'injuſtice; peut-être le ſentiment de nos forces, qui fait ſouffrir tant de maux avec conſtance, eſt-il plus propre à fortifier qu'à détruire ce mouvement de la Nature indignée, qu'il ne faut pas confondre avec la vanité ou avec la jaloufie.

M. d'Alembert éprouvoit alors les effets de cette injuſtice; depuis qu'il s'étoit placé parmi les gens de Lettres du premier ordre, on s'étoit rendu plus difficile ſur ſa réputation comme Géomètre. Le Public, qui laiſſe aſſez paiſiblement les Mathématiciens (dont il ne connoît que les noms) régler les rangs entre eux, & ſe diſtribuer la gloire à leur gré, n'eut pas la même indulgence pour un Géomètre Littérateur & Philoſophe; quelques Savans profitèrent de cette diſpoſition générale, ils eſſayèrent modeſtement de faire croire qu'ils étoient au moins ſes égaux; & ſouvent des Étrangers, qui n'avoient pas le même intérêt de déprimer ſa réputation, ont été frappés de la contradiction qu'ils obſervoient entre l'opinion des Sociétés de Paris & le jugement de l'Europe. M. d'Alembert crut voir la ſuite de la même injuſtice dans la manière dont ſa ſolution du problème des trois corps étoit appréciée par quelques perſonnes (ce n'étoient pas celles qui l'avoient réſolu ou qui auroient pu le réſoudre), & il défendit avec chaleur des droits qu'il eût abandonnés même par amour-propre, ſi on avoit été juſte envers lui.

Dans ses recherches sur le Système du Monde, M. d'Alembert examina la question de la figure de la Terre; Newton doit être regardé comme celui qui l'a traitée le premier, car Huygens avoit seulement démêlé l'influence que le changement de la force centrifuge aux différeutes latitudes devoit avoir sur la force de gravité, mais sans avoir bien connu la vraie direction & la véritable loi de la pesanteur. Newton résolut le problème, en regardant la Terre comme un solide homogène de révolution. M. Clairaut en donna la solution dans l'hypothèse d'une densité variable, mais la même dans chaque couche concentrique, & en supposant par conséquent que la force de la pesanteur est toujours perpendiculaire à la surface. Ces suppositions, quelques naturelles qu'elles paroissent, sont un peu arbitraires, & M. d'Alembert traita le problème d'une manière plus générale & plus rigoureuse, en supposant seulement la figure peu différente d'une sphère, & la densité assujettie à une loi quelconque.

On sait que dans ces questions, l'on suppose à la Terre une figure telle que, si elle étoit fluide, ses parties resteroient en équilibre, & qu'elle conserveroit la même figure, sans aucun autre changement que les oscillations produites dans la masse fluide par l'action des corps célestes; cette supposition fit découvrir à M. d'Alembert, qu'il existoit pour les fluides deux états d'équilibre, l'un fixe, auquel la masse reviendroit après avoir éprouvé un petit dérangement; & l'autre non-fixe, qu'un léger mouvement suffit pour détruire sans retour; observation qui, s'étendant à toutes les espèces de corps, est très-importante dans l'application des principes de la Mécanique aux phénomènes de la Nature.

Telles avoient été les découvertes de M. d'Alembert, lorsqu'en 1756, l'Académie lui donna le titre de Pensionnaire surnuméraire; cette distinction, accordée à son génie & à ses Ouvrages, prouve que les Compagnies savantes ont quelquefois assez d'équité, ou entendent assez bien les intérêts de leur gloire, pour honorer dans un

de leurs Membres un mérite & des talens ſupérieurs; ſi leur juſtice eſt plus lente, elle eſt auſſi plus éclairée que celle des particuliers. Quelques Académiciens animés d'un zèle ſans doute reſpectable par ſes motifs, s'oppoſoient à cette violation de l'uſage; ils alléguoient les inconvéniens de l'exemple: *Eh bien*, leur répondit M. Camus, *ſi un autre prétend à la même diſtinction, & qu'il ait autant de titres, il faudra bien l'accorder encore.*

En 1759, M. d'Alembert publia ſes Élémens de Philoſophie.

Il y développe les premiers principes & la véritable méthode des différentes Sciences; il montre les écueils qu'on doit éviter dans chacune, quand on ne veut pas riſquer de s'égarer: il eſt peu de Livres qui, dans un ſi petit eſpace, renferment plus de vérités; & l'Auteur, par la clarté avec laquelle il les analyſe, par la propriété des expreſſions & la préciſion de ſon ſtyle, a ſu rendre ces vérités uſuelles & acceſſibles aux Lecteurs les moins familiariſés avec les idées abſtraites. En retranchant un petit nombre de pages, où il eſt aiſé de reconnoître les ſacrifices que des convenances du moment ont exigés, cet Ouvrage mérite d'entrer dans l'éducation de tous les hommes qui cherchent à s'inſtruire; parce qu'il eſt également propre à donner des idées juſtes ſur tous les objets de nos connoiſſances à ceux qui ne veulent en approfondir aucun, & à préſerver les Savans des préjugés que l'étude à laquelle ils ſe livrent pourroit leur donner. On ſait que chaque Science a les ſiens, dont l'étendue des connoiſſances ou le génie ne ſauroient nous garantir, qui nuiſent au progrès de la Science même, & dont la Philoſophie eſt le ſeul préſervatif.

On trouve dans ces Élémens la ſolution d'une queſtion importante, déjà diſcutée dans la Préface du Traité de Dynamique. Les Philoſophes diſputoient encore pour ſavoir ſi les loix du mouvement ſont d'une vérité néceſſaire ou contingente; c'eſt-à-dire, ſi elles ſont les unes des vérités de définition, les autres des conſéquences abſolues

de l'étendue & de l'impénétrabilité des corps, ou bien si ces loix sont l'effet d'une volonté libre, qui les a établies pour conserver l'ordre de l'Univers : M. d'Alembert résolut la question, & montra que ces loix sont nécessaires ; la découverte de son principe lui donna les preuves de cette vérité, & on peut regarder cette partie de son Ouvrage comme une découverte en Métaphysique, celle de toutes les Sciences où jusqu'ici il a été le plus rare d'en faire de vraiment dignes de ce nom.

M. d'Alembert établit pour principe de morale l'obligation de ne pas regarder comme légitime l'usage de son superflu lorsque d'autres hommes sont privés du nécessaire ; & de ne disposer pour soi-même que de la portion de sa fortune, qui est formée non aux dépens du nécessaire des autres, mais par la réunion d'une partie de leur superflu.

Il fait sentir dans ce même Ouvrage l'utilité d'Élémens de Morale mis à la portée de tous les hommes, où les règles du devoir seroient établies par la raison, & les motifs de le remplir fondés sur la Nature & sur la vérité. Plus d'une fois il fut tenté d'entreprendre ces Élémens ; une seule raison l'en empêcha ; il en avoit formé le plan, & ce plan l'avoit conduit à une question importante pour laquelle il n'avoit pas trouvé de solution. L'Ouvrage auroit été incomplet, & auroit perdu une grande partie de son utilité, si cette question n'y avoit pas été résolue ; il pensoit d'ailleurs que, tant qu'elle restoit indécise, il n'étoit ni juste ni prudent de rendre publiques les difficultés qu'elle présentoit, & nous croyons devoir imiter ici sa discrétion.

Le Roi de Prusse lut ces Élémens de Philosophie, & montra combien il les estimoit, en proposant à l'Auteur des difficultés sur lesquelles il lui demanda des éclaircissemens ; ils ont été imprimés depuis, mais non absolument tels qu'ils avoient été envoyés au Roi : on pouvoit dire à ce Prince des vérités que des particuliers, revêtus ailleurs d'une autorité précaire, auroient craint d'entendre ; & il falloit développer aux hommes ordinaires ce qu'il suffisoit d'indiquer à ce Monarque.

Qu'il me ſoit permis de tracer ici, d'après les converſations, comme d'après les Ouvrages de M d'Alembert, un tableau foible, mais fidèle, des principes de ſa Philoſophie, & de diſcuter même quelques-uns des reproches qu'on a pu lui faire ſur ſes opinions; l'amitié ne me fera point altérer la vérité, elle a auſſi ſon orgueil, & je croirois l'offenſer ſi je paroiſſois craindre que M. d'Alembert ne fût pas aſſez Grand pour que ſes amis même puiſſent avouer ſes défauts.

Long-temps occupé de Sciences Mathématiques, M. d'Alembert avoit contracté l'habitude de n'être frappé que des vérités ſuſceptibles de preuves rigoureuſes; il voyoit la certitude s'éloigner, à meſure que l'on ajoutoit des idées acceſſoires aux idées ſimples, ſur leſquelles s'exercent la Géométrie pure & la Mécanique rationnelle; & ſon goût pour les Sciences, ſembloit ſuivre abſolument la même proportion. Il vouloit que les Sciences phyſiques ſe bornaſſent à des faits & à des explications calculées; que pour juger de la réalité d'un phénomène, on vérifiât le fait en lui-même, au lieu de le rejeter d'après une impoſſibilité apparente; qu'on ne dît pas d'une choſe qui bleſſe les idées communes, elle eſt abſurde, mais elle n'eſt pas prouvée. On l'accuſoit de faire peu de cas des Sciences Phyſiques, & cette accuſation étoit injuſte; il ne mépriſoit que ces ſyſtèmes dont les preuves ſe réduiſent à montrer que l'impoſſibilité abſolue n'en eſt pas encore rigoureuſement démontrée; ces aperçus incertains, qu'on annonce pour de grandes vues; ces explications appuyées ſur des raiſonnemens vagues, qui pourroient tout au plus conduire à de légères probabilités, enfin cet abus du langage ſcientifique, qui change quelquefois en une Science de mots, ce qui ne devroit être qu'une Science de faits & de calculs. On pourroit croire ſeulement qu'il a pouſſé trop loin ſa rigueur; car ſi ces hypothèſes, ces vues, ces explications ne forment point une véritable Science, elles ſervent à multiplier les expériences, les obſervations, à les montrer ſous leurs différentes faces; elles nous guident dans

dans nos recherches, elles préparent les découvertes, & ſemblent être l'aurore du jour dont peuvent eſpérer de jouir les Siècles qui nous ſuivront.

M. d'Alembert réduiſoit à un petit nombre de vérités générales, de premiers principes, le peu que nous pouvons ſavoir certainement ſur la Métaphyſique, ſur la Morale, ſur les Sciences politiques; peut-être donnoit-il à l'eſprit humain des limites trop étroites, peut-être qu'accoutumé à des vérités démontrées & formées d'idées ſimples & déterminées avec préciſion, il n'étoit pas aſſez frappé des vérités d'un autre ordre, qui ont pour objet des idées plus compliquées, & dans la diſcuſſion deſquelles il faut même ſe faire des définitions, & pour ainſi dire, des idées nouvelles, parce que les mots employés dans ces Sciences, tirés de la Langue vulgaire, & employés dans le langage commun, n'ont qu'un ſens vague & indéterminé. Peut-être paroiſſoit-il n'avoir pas aſſez ſenti que, dans des Sciences dont le but eſt d'enſeigner comment on doit agir, l'homme peut, comme dans la conduite de la vie, ſe contenter de probabilités plus ou moins fortes, & qu'alors la véritable méthode conſiſte moins à chercher des vérités rigoureuſement prouvées, qu'à choiſir entre des propoſitions probables, & ſur-tout à ſavoir évaluer leur degré de probabilité.

L'opinion de M. d'Alembert a le danger de trop reſſerrer le champ où l'eſprit humain peut s'exercer, de rendre l'ignorance préſomptueuſe, en lui montrant ce qu'elle ne connoît pas comme impoſſible à connoître; enfin, de livrer au doute, à l'incertitude, & par conſéquent à des principes vagues & arbitraires, des queſtions importantes au bonheur de l'humanité; inconvénient d'autant plus grand, que bien des hommes ſont intéreſſés à faire croire que ces queſtions ne peuvent avoir de principes fixes, pour ſe réſerver le droit de les décider ſuivant leurs vues perſonnelles ou leur caprice.

Mais ce danger eſt peut-être moindre que celui d'une Philoſophie plus tranchante, qui érigeroit en vérités certaines,

ſes opinions & ſes préjugés: Après tout, ceux qu'on refuſe de croire n'ont pas à ſe plaindre lorſqu'on ſe borne à être difficile ſur les preuves; & quand on eſt bien ſûr d'avoir trouvé la vérité, on ne peut ſe ſâcher contre ceux qui nous diſent : *prouvez; & nous vous croirons,*

Auſſi le tort de M. d'Alembert ſe réduit-il à n'avoir pas voulu quelquefois examiner ces preuves qu'on lui diſcit certaines, ou approfondir ces queſtions qu'il regardoit comme inſolubles; & ce tort eſt bien léger, ſi l'on ſonge combien de fois il avoit été trompé par de fauſſes promeſſes.

Les Philoſophes qui, ſur les opinions ſpéculatives, ſe renferment dans le doute preſque abſolu, ont, par une conſéquence néceſſaire, des opinions pratiques très-modérées.

M. d'Alembert croyoit, comme Fontenelle, que l'homme ſage n'eſt pas obligé de ſacrifier ſon repos à l'eſpérance incertaine d'être utile, qu'il doit la vérité aux hommes, mais avec les ménagemens néceſſaires pour ne point avertir ceux qu'elle bleſſe de ſe ſoulever & de ſe réunir contre elle; que ſouvent, au lieu d'attaquer de front des préjugés dangereux, il vaut mieux élever à côté d'eux les vérités, dont la fauſſeté de ces opinions eſt une conſéquence facile à déduire; qu'au lieu de porter à l'erreur des coups directs, il ſuffit d'accoutumer peu-à-peu les hommes à raiſonner juſte, afin qu'après en avoir pris l'heureuſe habitude, ils puiſſent avoir eux-mêmes le plaiſir & la gloire de rompre les chaînes dont leur raiſon étoit opprimée, & de briſer les idoles devant leſquelles ils étoient laſſés de fléchir.

Il regardoit l'amour de l'occupation, le goût du repos, celui de la vie privée, comme les barrières les plus ſûres qu'on pût oppoſer aux vices; il craignoit que ceux qui aſpirent à des vertus plus éclatantes ne ſe trompaſſent eux-mêmes, ou ne cherchaſſent à tromper les autres, & que l'amour trop inquiet du bien public, ne fût ſouvent une ambition déguiſée. Il étoit indulgent par philoſophie comme par caractère, perſuadé qu'il faut exiger peu des hommes, pour être plus ſûr d'en obtenir ce qu'on exige, leur preſcrire

ſeulement ce qu'on leur a montré, par ſon exemple, n'être pas au-deſſus des forces humaines, & ne pas mettre l'eſtime publique, la ſatisfaction intérieure à trop haut prix, de peur que la plupart des hommes n'aiment mieux y renoncer que d'y prétendre.

Dans les différens travaux de l'eſprit, il proſcrivoit avec ſévérité tout ce qui ne tendoit pas à la découverte de vérités poſitives, tout ce qui n'étoit pas d'une utilité immédiate. Un motif très-reſpectable, l'amour du vrai & celui du bien général, lui avoit fait même exagérer un peu cette ſévérité : en effet, il n'exiſte pas d'étude où l'on ne trouve du moins l'avantage d'employer le temps d'une manière qui n'eſt ni dangereuſe pour ſoi, ni nuiſible pour les autres : il en eſt du travail de l'eſprit comme de l'exercice, celui même qui n'a pas d'objet, contribue à la ſanté, fortifie le corps ; il n'emploie pas nos forces, mais il nous apprend à les employer : des vérités iſolées peuvent être indifférentes, mais aucun ſyſtème, aucun ordre de vérités ne peuvent l'être ; il n'en eſt point dont une main ſage & induſtrieuſe ne ſache tirer quelque jour une utilité réelle.

M. d'Alembert avoit appliqué l'eſprit de raiſonnement & de diſcuſſion à la Littérature & aux principes du goût ; avec une philoſophie plus profonde que Fontenelle & la Motte, il avoit marché ſur leurs traces, en évitant les erreurs où l'amour du paradoxe & l'eſprit de parti avoient pu les entraîner : il ne croyoit pas qu'il y eût en Littérature des loix générales fondées ſur la raiſon. Écrire ſimplement, & ſur-tout avec clarté ; n'employer que des mots dont le ſens ſoit précis, ou du moins déterminé par l'uſage qu'on en fait ; éviter ce qui offenſe l'oreille, ce qui choque les convenances, le ſimple bon ſens a dicté ces règles, & il n'en vouloit point d'autres ; *l'art d'écrire*, diſoit-il, *n'eſt que l'art de penſer*, & *celui de l'éloquence n'eſt que le don de réunir une logique exacte & une ame paſſionnée.* Quant à la poëſie, dont le but principal eſt de plaire, M. d'Alembert ajoutoit ſeulement à ces règles la néceſſité de ſe ſoumettre

aux loix de convention établies; il faut craindre de bleſſer les hommes dont on veut captiver les ſuffrages, & l'on doit reſpecter alors les jugemens de leurs préjugés, preſque autant que ceux de leur raiſon. Ces opinions furent combattues par beaucoup de Littérateurs, qui apparemment croyoient qu'ils auroient trop à perdre ſi l'on vouloit borner leur mérite à celui de leurs idées. Les Poëtes ſur-tout furent indignés d'être jugés par un Géomètre. La ſéchereſſe des Mathématiques leur ſembloit devoir éteindre l'imagination, & ils ignoroient ſans doute qu'Archimède & Euler en ont mis autant dans leurs Ouvrages, qu'Homère ou l'Arioſte en ont montré dans leurs Poëſies.

Cependant M. d'Alembert avoit auſſi fait des vers, mais en petit nombre: il réuſſiſſoit ſur-tout dans ceux qui, placés au bas d'un portrait, doivent renfermer en peu de mots une penſée vraie, fine ou profonde, exprimée d'une manière forte ou piquante, & rendre, par un petit nombre de traits, le caractère, les talens, les vertus d'un homme célèbre.

Il n'avoit pas prononcé, à beaucoup près, toutes ſes opinions littéraires & philoſophiques: ce qu'il en avoit laiſſé pénétrer lui avoit ſuſcité aſſez de haines; auſſi propoſoit-il que chaque homme de Lettres, pour concilier les intérêts de la vérité ou ceux de ſon repos, déposât dans une eſpèce de teſtament littéraire ſes opinions bien entières, bien dégagées de toutes reſtrictions. Il ne faut pas croire qu'il entendît par-là certaines doctrines hardies, déjà ſi clairement énoncées dans un grand nombre de livres: mais il exiſte en Littérature, en Philoſophie, en Morale, beaucoup d'opinions très-vraies, qu'on n'oſe avouer, non qu'elles expoſent à quelque danger réel celui qui les ſoutiendroit, mais parce qu'elles bleſſent l'opinion commune de la Société, dont il faut ménager les erreurs générales, ſi l'on ne veut pas renoncer aux agrémens qu'elle procure. Cette condeſcendance preſque néceſſaire, perpétue une foule de petits préjugés, la plupart peu importans s'ils étoient ſeuls, mais qui, réunis enſemble, forment un grand obſtacle aux

progrès de la vérité, & entretiennent l'habitude de penſer & de juger d'après autrui.

Nous devons regretter que M. d'Alembert n'ait pas exécuté ce projet; peu d'hommes auroient pu faire un Ouvrage meilleur & plus étendu; il en eſt peu qui aient conſervé moins de préjugés. Malheureuſement la plupart de ceux qui ſe vantent de n'en plus avoir, en ont ſeulement abandonné un ou deux des plus groſſiers, & tiennent d'autant plus fortement à ceux qui leur reſtent, qu'ils s'enorgueilliſſent davantage de la victoire qu'ils ont remportée ſur les autres. Combien d'hommes croient dans ce Siècle à la Philoſophie, comme leurs pères ont cru à l'Aſtrologie judiciaire! & ſouvent une chimère nouvelle n'a pas d'enthouſiaſtes plus zélés que les fougueux adverſaires des vieux préjugés.

Sage ſans être timide, alliant la prudence & l'amour de la vérité, M. d'Alembert ſembloit pouvoir eſpérer que ſon repos ne ſeroit pas troublé. L'Encyclopédie en fut l'écueil: un ſeul article de ce Dictionnaire (l'article *Genève*) lui ſuſcita deux diſputes très-vives. Cette ville, que Calvin & Beze avoient rendue célèbre dans le ſeizième Siècle, étoit devenue une ſeconde fois, par le ſéjour de M. de Voltaire, l'objet de l'attention de l'Europe. M. d'Alembert avoit fait l'éloge de la Conſtitution que Genève avoit alors, de la douceur de ſes Loix, de l'équité de ſes Magiſtrats, de l'eſprit philoſophique qui s'étoit répandu même parmi le peuple; mais il montroit quelques doutes ſur l'orthodoxie de ſes Paſteurs, & regrettoit que la proſcription prononcée par Calvin contre les Spectacles, fût encore reſpectée.

Il étoit en effet ſingulier que les Paſteurs Génevois ou leurs Protecteurs prétendiſſent au droit d'empêcher des Citoyens libres de ſe livrer à un amuſement qui n'a rien de contraire aux droits des autres hommes. Cette liberté étoit le ſeul objet de la réclamation de M. d'Alembert; il ne propoſoit point de ſacrifier une partie du tréſor public pour diſſiper l'ennui qui pourſuit les gens oiſifs, & de faire payer par une Nation libre les plaiſirs de ſes chefs; mais il croyoit que, puiſque les hommes ont beſoin d'amu-

ſement, un plaiſir dont le goût, même exceſſif, n'expoſe point au riſque de perdre ou ſa fortune, ou ſon temps, ou ſa ſanté; un plaiſir qui exerce l'eſprit, donne le goût de la Littérature, & peut, s'il eſt bien dirigé, inſpirer des vertus, ou détruire des préjugés, devoit mériter quelque indulgence, ou même quelque encouragement. M. Rouſſeau combattit l'opinion de M. d'Alembert avec beaucoup d'éloquence & de chaleur; cet Écrit contre les Théâtres, compoſé par un Auteur qui avoit fait une Comédie & un Opéra, eut en France un ſuccès prodigieux, ſur-tout parmi les gens du monde qui fréquentent le plus les Spectacles: il ſembloit que pour y aller avec plus de plaiſir, ils avoient attendu à être bien ſûrs de ne pouvoir en retirer aucune utilité réelle. M. d'Alembert répondit à la Lettre de M. Rouſſeau, & nous avouerons ſans peine que ſa réponſe eut moins de ſuccès; c'eſt, dans toute diſpute, le ſort des Ouvrages dont l'Auteur, ſachant éviter les deux extrêmes, garde ce juſte milieu où ſe plaît la vérité. Les ennemis de M. d'Alembert eſpérèrent un moment que ſa querelle avec les Paſteurs Génevois laiſſeroit quelques doutes ſur la pureté de ſa conduite, mais ils virent bientôt que cette eſpérance n'étoit pas fondée, & la diſpute fut oubliée.

Pendant que les Éditeurs de l'Encyclopédie s'occupoient à rendre ce Livre plus digne de ſon ſuccès; que les défauts qu'on avoit reprochés aux premiers volumes, s'effaçoient de plus en plus; que les hommes les plus éclairés s'empreſſoient d'y contribuer, ce même Ouvrage eſſuyoit une ſorte de perſécution. Les deux partis qui avoient long-temps partagé l'Égliſe de France, étoient alors dans le moment où la chute de l'un d'eux, devenue inévitable, alloit entraîner l'autre avec lui: l'Encyclopédie gardoit entr'eux une neutralité abſolue, & tous deux ſe réunirent contre elle; des Libelles enfantés par des Écrivains incapables de l'entendre ou d'en profiter, perſuadèrent à des hommes puiſſans, que ce Livre pouvoit être dangereux pour la Nation, ou du moins pour eux-mêmes. L'accuſation d'impiété avoit ceſſé d'être effrayante, à force d'avoir été

prodiguée ; on fit du mot d'*Encyclopédiste* & de *Philosophe*, le nom d'une secte à laquelle on imputa le projet de détruire la Morale & d'ébranler les fondemens de la paix publique ; tous ceux qu'on marquoit de ces noms, devoient être nécessairement de mauvais Citoyens, parce qu'alors la France étoit ennemie d'un Roi Philosophe, qui, juste appréciateur du mérite, avoit donné des témoignages publics d'estime à quelques-uns des Auteurs de l'Encyclopédie.

Cette guerre littéraire (qui eut l'honneur de faire quelquefois oublier aux oisifs de Paris les malheurs d'une guerre plus importante) compromettoit le repos de M. d'Alembert, & réunissoit aux ennemis méprisables que son génie lui avoit faits, d'autres ennemis dont il ne pouvoit du moins mépriser le pouvoir. Le Roi de Prusse lui offrit, après la paix de 1763, un asile dans sa Cour, la place de Président de son Académie, une fortune fort au-dessus de ses desirs, mais que le plaisir qu'il goûtoit à faire le bien, pouvoit rendre séduisante, enfin le repos & la liberté : M. d'Alembert refusa ces offres, il préféra sa Patrie, où il étoit pauvre & persécuté, à la Cour d'un Roi qui, dépouillé de l'éclat du trône, eût encore mérité qu'un homme de génie recherchât sa société & son suffrage, & ce sacrifice lui coûta peu ; ses amis, la liberté de suivre ses recherches mathématiques suffisoient à son bonheur, & il attendit tranquillement que le temps de l'injustice fût passé.

Ce Monarque, qu'il avoit vu à Clèves avant la guerre, & qui alors lui avoit proposé la survivance de M. de Maupertuis, ne fut point blessé de ce nouveau refus, & voulut que la place de Président de son Académie restât vacante, tant que l'homme qu'il en avoit jugé digne pourroit l'occuper ; M. d'Alembert crut lui devoir l'hommage de sa reconnoissance, & après l'avoir été trouver dans ses États de Westphalie, il le suivit à Berlin, où il passa plusieurs mois. On vit un Philosophe paisible, appelé sans aucun titre dans une Cour guerrière, & admis dans la familiarité d'un Roi qui, après avoir résisté à une

ligue formidable, venoit de couronner ſes victoires par une paix glorieuſe. Aucun Capitaine de ſon Siècle n'avoit gagné tant de batailles; & lui ſeul avoit enrichi par des découvertes cet Art deſtructeur de la guerre, dont les progrès ſont pourtant le ſeul moyen de faire jouir les Peuples d'une paix preſque perpétuelle; car telle eſt la nature de l'homme que ſa fureur pour les jeux de toute eſpèce diminue à meſure qne l'on y affoiblit l'influence du haſard. Cependant ce Prince n'étoit enivré ni de ſes triomphes, ni du bruit de ſa renommée, il ſe plaiſoit à cultiver, dans la paix, la Philoſophie & les Arts; parlant avec ſimplicité de ſes ſuccès, de ſes revers, de ſes dangers, de ſes reſſources, & même de ſes fautes, il comparoit la gloire d'avoir fait Athalie à celle de ſes victoires, en obſervant que le Poëte ne devoit rien au ſort ni à d'autres qu'à lui-même; & vivoit avec le Philoſophe François dans cette égalité qui, malgré la différence des rangs, s'établit néceſſairement entre les hommes de génie.

M. d'Alembert avoit refuſé, peu de temps auparavant, une offre plus brillante; l'Impératrice de Ruſſie lui avoit propoſé de le charger de l'éducation de ſon fils, & de l'en charger ſeul; les titres, les récompenſes, tous les avantages qui euſſent flatté ou ſéduit un homme ordinaire, étoient prodigués. La gloire d'élever l'héritier d'un grand Empire, eût pu éblouir un homme d'un eſprit ſupérieur; & l'eſpérance de contribuer au bonheur de cent Peuples réunis ſous les mêmes Loix, pouvoit toucher un Philoſophe; M. d'Alembert ne fût point ébranlé, il crut qu'il ne devoit pas à une Nation étrangère le ſacrifice de ſon repos; que ſi ſes talens pouvoient être utiles, ils appartenoient à ſa Patrie; & qu'une Cour orageuſe, où, dans l'eſpace de vingt ans, deux révolutions avoient renverſé le trône, & où le changement du Miniſtère avoit été ſouvent auſſi funeſte qu'une révolution, ne devoit pas être le ſéjour d'un Philoſophe qui étoit bien ſûr de n'avoir aucun des talens néceſſaires pour s'y conduire.

Il

Il refuſa donc cet honneur, comme il l'auroit accepté, ſans orgueil & ſans oſtentation; cependant ces offres lui furent utiles, elles ſervirent à faire mieux connoître à la Nation Françoiſe la valeur de ce qu'elle poſſédoit; & la jalouſie littéraire, la haine des partis furent envenimées, mais ſubjuguées par la force de l'opinion publique.

En 1765, M. d'Alembert donna ſon Ouvrage ſur la deſtruction des Jéſuites; l'abolition de cet Ordre lui parut un évènement aſſez important dans l'Hiſtoire des opinions humaines, pour mériter qu'il en traçât les détails, & cette Hiſtoire fut impartiale; auſſi ne manqua-t-elle pas d'augmenter la haine que les deux partis avoient contre lui: cette haine ſe ſignala par des Libelles dont les Auteurs ne prouvoient qu'une ſeule choſe, c'eſt que M. d'Alembert avoit eu raiſon dans ce qu'il avoit dit de leur parti; ils répondoient à l'accuſation d'être fanatiques, en laiſſant échapper naïvement les traits du fanatiſme le plus emporté & le plus ſtupide, & M. d'Alembert ne crut pas devoir répondre à des Adverſaires qui ſavoient ſi bien défendre ſa cauſe.

Après avoir donné ſes *Recherches ſur le Syſtème du Monde*, il n'entreprit plus de grands Ouvrages Mathématiques; mais il publia dans les Recueils des Académies dont il étoit Membre, & dans neuf volumes d'Opuſcules, un nombre très-grand de Mémoires; on y trouve l'application de ſes principes & de ſes méthodes au problème de la libration de la Lune, à ceux de la préceſſion des Équinoxes, & de la nutation de l'axe de la Terre dans l'hypothèſe de la diſſimilitude des méridiens, aux loix générales du mouvement de rotation, à celles des oſcillations des corps plongés dans les fluides; il y perfectionne ſa théorie des fluides, & ſa ſolution du problème des trois corps; il y étend ſes méthodes de calcul: mais nous devons nous arrêter ici ſeulement aux objets entièrement nouveaux, qui ont été alors le ſujet de ſes méditations.

Les Mathématiques offrent ſouvent des queſtions où les

résultats des calculs présentent des difficultés que le calcul ne peut résoudre seul ; il faut qu'il emploie le secours quelquefois dangéreux de la Métaphysique ; ce n'est plus seulement du génie de la Géométrie que dépend la solution des difficultés, mais de la finesse, de la justesse naturelle de l'esprit. M. d'Alembert a discuté, dans ses Opuscules, quelques-unes de ces questions.

Telle fut celle de la nature des logarithmes des quantités négatives ; Léibnitz & Jean Bernoulli l'avoient agitée, M.rs Euler & d'Alembert la renouvelèrent : le premier soutint l'avis de Léibnitz, le second celui de Bernoulli ; ils se servirent de toutes les raisons que les nouvelles vérités découvertes dans l'Analyse, pouvoient leur offrir ; avec un génie égal à celui des deux premiers combattans, ils employèrent des armes plus fortes ; cependant la victoire resta encore indécise, & l'on peut juger de la difficulté d'une question dont de tels hommes n'ont pu dissiper tous les nuages.

M. d'Alembert eut une autre discussion du même genre avec M.rs de la Grange & Euler, sur la discontinuité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, question plus importante, & sur laquelle leurs Ouvrages ont répandu plus de lumière.

Les premiers principes du mouvement, comme la loi du levier, celle de la décomposition des forces, paroissent d'une vérité si naturelle, si palpable, qu'il faut déjà de la sagacité pour sentir qu'elles ont besoin d'être prouvées, & que la démonstration rigoureuse en est difficile ; M. d'Alembert l'a cherchée avec succès dans la théorie générale des fonctions analytiques : c'est sans doute un spectacle bien intéressant pour les Philosophes, de voir, dans les objets soumis au calcul, des questions très-compliquées, résolues avec facilité & d'un trait de plume ; tandis que les vérités, en apparence les plus simples, exigent un appareil singulier de preuves établies sur des théories savantes dont on n'avoit pas encore la première idée, long-temps après que ces vérités, déjà découvertes & admises par tous les Savans, étoient devenues d'un usage universel & commun.

C'eſt dans les Opuſcules mathématiques de M. d'Alembert, que l'on trouve & ſes travaux ſur la théorie des lunettes acromatiques & ſes recherches ſur pluſieurs points d'Optique; il y demontre la fauſſeté de l'hypothèſe où l'on ne ſuppoſe dans la lumière ſolaire que ſept rayons différemment réfrangibles, quoique le ſpectre alongé par le priſme, reſte continu; il y remarque que nous rapportons les objets, non à leur vraie direction, mais à celle du rayon qui, perpendiculaire au fond de l'œil, exerce ſur cet organe une force plus grande.

Le calcul des probabilités occupe une partie importante de ces Opuſcules; & ſi ce calcul s'appuie un jour ſur des baſes plus certaines, c'eſt à M. d'Alembert que nous en aurons l'obligation.

Il expoſe dans ſes recherches, comment, ſi de deux évènemens contraires l'un eſt arrivé un certain nombre de fois de ſuite, on peut, en cherchant la probabilité que l'un de ces deux évènemens arrivera plutôt que l'autre, ou la trouver égale pour les deux évènemens, ou la ſuppoſer plus grande, ſoit en faveur de celui qu'on a déjà obtenu, ſoit en faveur de l'évènement contraire : il fait voir que ces concluſions oppoſées entr'elles, ſont la conſéquence de trois méthodes de raiſonner, qui paroiſſent également juſtes, également naturelles.

Il examine la règle qui preſcrit de faire les avantages en raiſon inverſe des probabilités, & montre combien, dans une foule d'exemples, les concluſions déduites de ce principe, ſemblent en contradiction avec celles où le ſimple bon ſens auroit conduit; il prouve que les moyens employés par pluſieurs Géomètres, pour détruire cette contradiction, ont été inſuffiſans; lui-même en propoſe de nouveaux, mais il a ſoin d'en remarquer également les difficultés & les exceptions.

Dans l'application de ce calcul à l'inoculation, M. d'Alembert fait ſentir que, s'il eſt facile de prouver combien cette opération eſt utile pour la ſociété en général, le calcul

de l'avantage dont elle peut être pour chaque particulier, exige d'autres principes: en effet, il s'agit pour chacun, de s'expoſer à un riſque certain & préſent, pour éviter un riſque plus grand, mais éloigné & incertain; & cette circonſtance paroît changer la nature de la queſtion. M. d'Alembert n'a pas donné la ſolution du problème enviſagé ſous ce point de vue, car celle qu'il propoſe, & qui conſiſte à comparer le riſque de mourir de l'inoculation dans un court eſpace de temps, à celui d'être attaqué de la pétite vérole naturelle, & d'en mourir auſſi dans un temps très-petit, donne ſeulement une limite au-deſſous de laquelle le riſque que court un inoculé, n'empêche pas que l'inoculation ne lui ſoit avantageuſe; mais ce riſque pourroit être au-deſſus de la même limite, ſans que l'on dût louer le courage ou condamner l'imprudence de celui qui s'expoſeroit à ce danger. La vraie ſolution du problème dépend d'une méthode d'évaluer la vie, ou plutôt de l'apprécier (car ſa durée ne doit pas entrer ſeule dans le calcul); & il ſeroit bien difficile de trouver pour cette méthode, des principes dont tous les hommes, même raiſonnables, vouluſſent convenir, ſoit pour eux-mêmes, ſoit pour leurs enfans. C'eſt principalement dans cette dernière hypothèſe, que la queſtion devient difficile, & qu'elle peut être importante; en prononçant ſur notre propre danger, nous pouvons ſuivre notre volonté, nos penchans; & après avoir balancé nos intérêts, nous décider pour celui que nous préférons: en prononçant ſur le ſort d'autrui, la juſtice la plus ſévère doit nous conduire: le droit que nous avons ſur l'exiſtence d'un autre, n'eſt fondé que ſur l'ignorance qui l'empêche de juger pour lui-même; c'eſt donc ſur ſon avantage réel, & non ſur notre ſeule opinion, que notre volonté doit ſe régler; il ne ſuffit point de croire qu'il ſoit utile pour lui de l'expoſer à un danger, il faut que cette utilité ſoit prouvée. On chercheroit vainement à éluder la difficulté, en décidant qu'alors l'intérêt général doit l'emporter, ce patriotiſme exagéré n'eſt qu'une illuſion dangereuſe, capable d'entraîner à des

injuſtices, & même à des crimes, les hommes ignorans & paſſionnés: ſans doute il eſt des circonſtances où l'on peut devoir au bonheur public le ſacrifice volontaire de ſes droits, mais jamais celui des droits d'un autre ne peut être ni juſte ni légitime.

Parmi les Mémoires de M. d'Alembert, on en trouve pluſieurs qui ont pour objet le Calcul intégral, & qui renferment en quelques pages un grand nombre de méthodes particulières ou de vues nouvelles ſur la théorie générale de ce calcul; telle eſt une méthode pour réduire à la ſolution d'une équation linéaire, la recherche de l'intégrale indéfiniment approchée d'une équation quelconque; méthode à la fois élégante & ſingulière: telles ſont des obſervations importantes ſur la forme générale du facteur, qui rend l'équation qu'il multiplie, la différentielle exacte d'une fonction ou finie, ou d'un ordre moins élevé: dans ces morceaux diſperſés, les vérités ſe preſſent, & comme elles ſont peu developpées, elles peuvent échapper à un lecteur inattentif ou peu inſtruit; l'Auteur y paroît plus occupé d'aſſurer aux Géomètres des vérités nouvelles, que de jouir de la gloire qu'il pouvoit en attendre; ainſi la plupart de ces Mémoires offriront à ceux qui ſauront les méditer & en faire uſage, des lumières utiles, & peut-être même leur vaudront beaucoup de gloire, s'ils n'ont pas la généroſité de la rapporter au premier auteur.

La ſolution du problème des tautochrones, mérite une mention particulière : ce problème, réſolu d'abord par Jean Bernoulli & par M. Euler, l'avoit été depuis par M. Fontaine, qui avoit employé une méthode nouvelle & vraiment originale; ſa ſolution, plus générale que les premières, contenoit des principes de calcul, d'une utilité plus étendue que celle du problème; cependant M. Fontaine n'avoit cherché, comme les Géomètres qui l'avoient précédé, qu'à déterminer la courbe tautochrone dans quelques hypothèſes de force accélératrice; & la queſtion de ſavoir s'il exiſte une tautochrone dans toutes les hypothèſes, & de déterminer celles où elle exiſte, n'avoit pas été encore

examinée. M. d'Alembert reçut de M. de la Grange une formule qui contenoit la ſolution de cette nouvelle queſtion, plus curieuſe & plus difficile; il en chercha la démonſtration, & non-ſeulement il la découvrit, mais il parvint à une formule plus générale encore, que M. de la Grange trouvoit auſſi en même temps: ces exemples ſont fréquens dans l'hiſtoire des Mathématiques, & ils doivent l'être, puiſque les objets ſur leſquels l'étendue & la nature des méthodes, permettent de s'exercer, ſont également ſous les yeux de tous; que le progrès des Sciences auxquelles on applique le calcul, offre également à tous, dans chaque époque, un certain nombre de queſtions à réſoudre; que la vérité eſt une, & qu'ils emploient à peu-près les mêmes inſtrumens: cependant il eſt rare que les preuves de l'égalité ſoient auſſi claires qu'elles l'ont été dans cette occaſion; d'ailleurs on n'y croit que dans le cas où chacun de ceux qui veulent partager la gloire d'une découverte, en ont fait d'autres qu'ils ne partagent avec perſonne.

M. d'Alembert a publié des Élémens de Muſique; on s'étonnera peut-être que l'Analyſte profond qui avoit réſolu le problème des cordes vibrantes, ſe ſoit borné à donner une expoſition du ſyſtème de Rameau, qu'il parvint à rendre intelligible; mais il ne croyoit pas que la théorie mathématique du corps ſonore pût encore rendre raiſon des règles de la Muſique. Il a aimé pendant toute ſa vie cet Art qui ſe lie, d'un côté, aux recherches les plus ſubtiles & les plus ſavantes de la Mécanique rationnelle, tandis que ſa puiſſance ſur nos ſens & ſur notre ame, offre aux Philoſophes des phénomènes non moins ſinguliers, & plus inexplicables encore.

On doit compter au nombre des ſervices que M. d'Alembert a rendus aux Mathématiques, & ſur-tout à la Philoſophie, le ſoin qu'il a pris d'éclaircir une diſpute célèbre ſur la meſure des forces, diſpute qui, pendant une partie de ce ſiècle, a partagé les Géomètres; & d'apprécier ces principes tirés de la métaphyſique des cauſes finales qu'on vouloit ſubſtituer aux principes directs de la Méca-

nique, & employer à la découverte des loix de la Nature: ces queſtions avoient égaré quelques bons eſprits, & conſumé en pure perte le temps toujours ſi précieux de pluſieurs hommes de génie; M. d'Alembert les diſcuta, & on n'en parla plus : les queſtions les plus profondes de la Métaphyſique ont eu ſouvent le même ſort que ces tours d'adreſſe ou de combinaiſon, qui étonnent, qui excitent la curioſité tant qu'on en ignore le ſecret, mais qu'on mépriſe auſſitôt qu'il a été deviné.

Nous n'avons pu donner ici qu'une eſquiſſe très-abrégée des travaux immenſes de M. d'Alembert, ſur les Mathématiques; travaux que ni les diſtractions, ni la foibleſſe de ſa ſanté, ni ſes infirmités n'interrompirent jamais, qu'il ſuivoit encore il n'y a pas une année, au milieu de ſes douleurs, & qui ont produit à cette époque un nouveau volume d'Opuſcules, où l'on retrouve ſon génie & cette même fineſſe, ce même eſprit philoſophique qui caractériſent toutes ſes productions.

Le goût très-vif quil avoit eu pendant quelque temps pour la Littérature & pour la Philoſophie, n'avoit point affoibli ſa première paſſion; ſes Ouvrages mathématiques étoient les ſeuls auxquels il attachât une importance ſérieuſe, il diſoit, il répétoit ſouvent qu'il n'y avoit de réel que ces vérités ; & tandis que les Savans lui reprochoient ſon goût pour la Littérature, & le prix qu'il mettoit à l'art d'écrire, ſouvent il offenſoit les Littérateurs, en laiſſant échapper ſon opinion ſecrète ſur le mérite ou l'utilité de leurs travaux.

L'Académie des Sciences a ſouvent profité de ces mêmes talens qu'on lui faiſoit un reproche d'avoir cultivés: dans ces aſſemblées ſolennelles, où des Souverains ſont venus au milieu de nous, rendre hommage aux Sciences, & recevoir celui de notre reconnoiſſance pour l'intérêt qu'ils prennent à leurs progrès, M. d'Alembert a été plus d'une fois l'organe de cette Compagnie; les circonſtances où il eſt permis de dire des vérités aux Princes, ſont ſi rares, que

M. d'Alembert n'en laissoit point alors échapper l'occasion, il savoit exprimer avec force celles qu'il étoit temps de prononcer, & faire entendre avec finesse d'autres vérités plus contraires aux opinions communes, mais aussi dont il croyoit plus utile que les Rois fussent convaincus; il avoit l'art de plaire aux Princes qui l'écoutoient, en défendant devant eux la cause de l'humanité, & savoit leur rendre les Sciences respectables en leur montrant que leur gloire véritable, leur puissance, leur sûreté même, dépendent, plus qu'on ne croit, de l'instruction répandue dans toutes les classes de leurs Sujets, & que, par une révolution dont l'origine remonte à l'invention de l'Imprimerie, & dont rien ne peut plus arrêter les progrès, la force, les richesses, la félicité des Nations, sont devenues le prix des lumières.

En 1772, M. d'Alembert fut nommé Secrétaire de l'Académie Françoise, dont il étoit Membre depuis 1754, & il s'imposa un devoir que ses prédécesseurs avoient jusqu'alors négligé, celui de continuer l'Histoire de cette Compagnie. Il s'engagea donc à écrire la vie de tous les Académiciens morts depuis 1700 jusqu'en 1772; l'obscurité de quelques-uns, l'esprit de parti qui exagéroit ou rabaissoit la réputation de plusieurs, le contraste du jugement de la Postérité & de l'opinion des Contemporains, la grande variété des talens par lesquels chacun d'eux s'étoit distingué, toutes ces difficultés auroient pu arrêter un Écrivain moins zélé pour la gloire de l'Académie, ou moins sûr de les vaincre; elles ne firent qu'exciter l'ardeur de M. d'Alembert, & dans l'espace de trois ans, près de soixante-dix Éloges furent achevés. Il s'étoit auparavant exercé dans le même genre; les Éloges de Jean Bernoulli & de l'Abbé Terasson avoient même été ses premiers essais; celui de Montesquieu étoit digne de l'Homme illustre à qui ce monument étoit consacré. L'article *Éloge*, dans l'Encyclopédie, contient des préceptes excellens sur les Éloges historiques; ces préceptes, dictés par la raison & par le goût, font sentir toute la difficulté de ce genre d'Ouvrages,

&

& doivent décourager ceux qui, honorés de cette fonction par une Compagnie ſavante, ſentent combien ils reſtent au-deſſous & des leçons que leur donne M. d'Alembert, & des exemples qu'il leur a tracés.

Les premiers Éloges de M. d'Alembert ſont écrits d'un ſtyle clair & précis, tantôt énergique, tantôt piquant & plein de fineſſe, mais toujours noble, rapide, ſoutenu. Dans ceux qu'il a faits pour l'Hiſtoire de l'Académie Françoiſe, il s'eſt permis plus de ſimplicité, de familiarité même; des traits plaiſans, des mots échappés à ceux dont il parle, ou dits à leur occaſion, un grand nombre d'anecdotes propres à peindre ou les hommes ou les opinions de leur temps, donnent à ces Ouvrages un autre caractère; & le Public, après avoir encouragé cette liberté par des applaudiſſemens multipliés, parut enſuite la déſapprouver. Nous oſons croire qu'avant de prononcer ſi cette ſévérité n'a pas été injuſte, il faut avoir vu tout l'Ouvrage; en effet, ſi dans une ſuite d'Éloges, ce ton familier rend la lecture de la collection plus facile, ſi cette liberté d'entre-mêler des plaiſanteries ou des anecdotes à des diſcuſſions philoſophiques & littéraires, augmente l'intérêt & le nombre des Lecteurs, alors il ſeroit difficile de blâmer M. d'Alembert d'avoir changé ſa manière; d'ailleurs le ton dans les Ouvrages, comme dans la ſociété, doit naturellement changer avec l'âge; on exige d'un jeune homme un maintien plus ſoigné, une attention ſur lui-même toujours ſoutenue; on pardonne à un vieillard plus de familiarité & de négligence; on veut que l'un marque par toutes ſes manières les égards qu'il doit à ceux qui l'environnent; on ne demande à l'autre que d'intéreſſer ou de plaire: ainſi, dans les premiers Ouvrages d'un Écrivain, on exige avec raiſon qu'il montre, par ſon attention à ſoigner, à ſoutenir ſon ſtyle, le deſir qu'il a de mériter le ſuffrage de ſes Lecteurs: mais lorſque ſa réputation eſt conſommée, lorſque ſon âge & ſes travaux lui ont donné le droit de regarder comme ſes diſciples une partie de ceux qui le liſent ou qui l'écoutent, alors

il peut ſe négliger davantage, s'abandonner à tous ſes mouvemens, & traiter ſes Lecteurs plutôt comme des amis que comme des juges.

La partie de cet Ouvrage, qui a déjà été publiée, nous aſſure que ce recueil ſera un monument précieux pour l'hiſtoire littéraire, & un de ces Livres ſi rares, où les hommes qui craignent l'application, mais qui aiment la vérité & les Lettres, peuvent trouver des leçons utiles de Philoſophie, de Morale & de goût.

On peut juger du caractère des grands Hommes par la liſte de leurs amis, & malheureuſement cette liſte a paru prouver quelquefois qu'ils aimoient mieux des flatteurs que des amis véritables, comme ſi l'idée de l'égalité les eût fatigués: cependant ſi l'on pénètre plus avant, ſi l'on va chercher juſqu'au fond de leur cœur le motif caché de cette préférence pour les hommes médiocres, peut-être s'apercevra-t-on que ce ſentiment tient à une défiance ſecrète d'eux-mêmes, qu'ils n'oſent avouer; on verra que la plupart de ceux qui ont mérité ce reproche, avoient uſurpé une partie de leur célébrité, & on en pourra conclure qu'ils craignoient plus les lumières de leurs égaux que leur ſociété, & d'être jugés que d'être ſurpaſſés. La réputation de M. d'Alembert eſt appuyée ſur une baſe trop ſolide, pour lui faire un mérite de s'être élevé au-deſſus de cette foibleſſe; ami conſtant de Voltaire pendant plus de trente ans, loin d'être fatigué de ſa gloire, comme tant d'autres, il s'occupoit avec un ſoin preſque ſuperſtitieux, de multiplier les hommages que ce Grand-homme recevoit de ſes compatriotes; il ne parla de l'illuſtre Euler à un grand Roi, dans les États duquel M. Euler vivoit alors, que pour lui apprendre à le regarder comme un Grand-homme; & même un ſacrifice d'amour-propre, que l'exacte équité n'eût pas exigé, ne lui coûta point pour faire rendre juſtice à un rival, dont le génie s'exerçant ſur une ſeule Science, ne pouvoit frapper ceux à qui cette Science étoit étrangère. Lorſque M. Euler retourna en Ruſſie,

M. d'Alembert, consulté par le même Prince, lui proposa de réparer cette perte en appelant à Berlin M. de la Grange; & ce fut par lui seul, qu'un Souverain qui l'estimoit, apprit qu'il existoit en Europe des hommes qu'on pouvoit regarder comme ses égaux.

Son amitié étoit active & même inquiète, les affaires de ses amis l'occupoient, l'agitoient, & souvent troubloient son repos encore plus que le leur; il étoit étonné de l'indifférence, de la tranquillité qu'ils montroient, leur en faisoit des reproches; & quelquefois son intérêt étoit si vif, qu'il les forçoit de desirer le succès pour lui plus encore que pour eux-mêmes.

Peu d'hommes ont été aussi bienfaisans, & il regardoit cette bienfaisance comme un devoir de justice; il ne croyoit pas (comme nous l'avons dit) qu'il fût permis d'avoir du superflu, lorsque d'autres hommes n'ont pas même le nécessaire; mais ses dons, si peu proportionnés à la médiocrité de sa fortune, ne suffisoient pas au besoin que son cœur avoit de faire du bien, son temps, le crédit de ses amis, l'autorité que lui donnoient son génie & ses vertus, tout appartenoit également aux malheureux & aux opprimés: en lisant ses Ouvrages, on est étonné que la vie d'un seul homme ait suffi à tant de travaux, & les soins de la bienfaisance & de l'amitié en ont rempli la moitié; & il y sacrifioit sans peine, nous ne disons pas une partie de sa gloire, ce sacrifice coûte peu aux hommes capables de véritables affections, mais l'attrait puissant qui l'entraînoit au travail. Son zèle pour le progrès des Sciences & la gloire des Lettres, ne se bornoit pas à y contribuer par ses Ouvrages, il devenoit le bienfaiteur, l'appui, le conseil de tous ceux qui, dans leur jeunesse, annonçoient du talent, ou montroient du zèle pour l'étude: souvent il a éprouvé de l'ingratitude, mais l'amitié, qu'il a trouvée quelquefois pour prix de ses services & de ses leçons, le consoloit, & il ne se croyoit pas malheureux d'avoir fait cent ingrats pour acquérir un ami. Vers la fin de sa vie, à mesure qu'il

voyoit successivement se briser les liens formés dans sa jeunesse, c'est parmi ses anciens disciples qu'il avoit choisi ses amis les plus chers, ceux qui étoient pour lui l'objet d'un sentiment plus tendre, & sur l'amitié desquels il comptoit le plus; & comme il avoit toujours préféré la Géométrie à toute autre étude, c'est sur deux Géomètres de l'Académie que le choix de son cœur s'étoit sur-tout arrêté.

Ami de l'humanité, les intérêts, les droits des hommes étoient pour lui des objets sacrés, souvent il les a défendus, & jamais il ne les a trahis: si on ne mérite pas le nom de citoyen en flattant bassement l'autorité, de quelque manière qu'elle s'exerce, en exaltant toujours les vertus & les actions de ceux qui gouvernent, au risque de louer tour à tour des principes contradictoires, on s'en rend également indigne en blâmant tout au hasard, en donnant pour patriotisme son attachement à une cabale dont on espère partager le crédit, en cachant, sous l'apparence de l'amour naturel & légitime de la liberté, l'humeur secrète de n'avoir pas d'empire sur celle des autres: un bon citoyen s'intéresse vivement au bonheur général, s'élève avec courage contre ceux qui font le mal ou qui le permettent; il obéit aux loix, mais en réclamant contre celles qui blessent l'humanité & la justice; soumis à l'autorité, il respecte ceux qui en sont les dépositaires, mais il les juge; il combat toutes les erreurs qui peuvent troubler la paix, ou attenter aux droits des hommes; il desire enfin qu'ils soient éclairés sur leurs vrais intérêts comme sur leurs droits, parce que leur félicité commune & la tranquillité publique dépendent de la liberté qu'ils ont de s'instruire, & de la destruction des préjugés: tel fut constamment M. d'Alembert, mauvais citoyen pour l'homme puissant & corrompu, mais bon patriote aux yeux des Ministres justes & éclairés, comme aux yeux de la Nation.

Il avoit prouvé, par des traits éclatans, qu'il étoit inaccessible à l'intérêt, autant qu'à la vanité; mais les augmentations successives, & toujours très-modiques, que reçut son revenu, n'étoient pas reçues avec l'indifférence

à laquelle on auroit pu s'attendre, elles lui donnoient plus de facilité pour acquitter des dettes de bienfaisance qu'il regardoit comme de véritables obligations ; ses inquiétudes sur ses affaires n'avoient jamais d'autre objet : *& je serai forcé de retrancher sur ce que je donne*, étoit la seule crainte qu'il confiât à ses amis, lorsque des circonstances imprévues le menaçoient de quelque perte ou de quelque retardement : avec de tels sentimens, il ne devoit avoir & il n'eut jamais qu'une fortune médiocre, on ne parvient pas à s'enrichir, quand c'est pour les autres seulement qu'on veut être riche ; & ceux qui en accumulant des trésors, parlent encore de leur mépris pour les richesses, prouvent seulement qu'ils joignent l'hypocrisie à leurs autres vices.

Le caractère de M. d'Alembert étoit franc, vif & gai, il se livroit à ses premiers mouvemens, mais il n'en avoit point qu'il eût intérêt de cacher. Dans ses dernières années, une inquiétude habituelle avoit altéré sa gaieté, il s'iritoit facilement, mais revenoit plus facilement encore ; cédoit à un mouvement de colère, mais ne gardoit point d'humeur ; malgré la tournure quelquefois maligne de son esprit, on n'a jamais eu à lui reprocher la plus petite méchanceté, & il n'a jamais affligé, même ses ennemis, que par son mépris & son silence. Après avoir demeuré près de quarante ans dans la maison de sa nourrice, sa santé l'obligea de quitter le logement qu'il occupoit chez elle, & l'âge de cette femme respectable ne lui permit pas de le suivre : tant qu'elle vécut, deux fois chaque semaine il se rendoit auprès d'elle, s'assuroit par ses yeux des soins qu'on avoit de sa vieillesse, cherchoit à prévenir, à deviner ce qui pouvoit rendre plus douce la fin d'une vie sur laquelle sa reconnoissance & sa tendresse avoient répandu l'aisance & le bonheur. En quittant cette maison, il chercha un asile dans l'amitié, dans la société habituelle d'une femme aimable, qui, par une sensibilité simple & vraie, par les grâces piquantes & naturelles de son esprit, par la force de son ame & de son caractère, avoit fait naître en lui un sentiment, que les malheurs qu'elle avoit long-temps

éprouvés, rendirent plus profond & plus tendre, & qui eût été la consolation de la vie de M. d'Alembert, s'il n'avoit pas eu le malheur de lui survivre.

Les Savans & les Écrivains les plus célèbres, des Étrangers distingués par leurs lumières, des hommes de tous les ordres, mais choisis parmi ceux qui aimoient la vérité, & qui étoient dignes de l'entendre, lui formèrent alors une société nombreuse, où se joignoient une foule de jeunes Littérateurs & de gens du monde, que le desir de voir un Grand-homme, ou la vanité de dire qu'ils l'avoient vu, attiroit auprès de lui ; cette société rassembloit, pour ainsi dire, tous les hommes qui, zélés pour les intérêts de l'humanité, mais différens par leurs occupations, leurs goûts, leurs opinions, n'étoient rapprochés que par un desir égal de hâter le progrès des lumières, un même amour pour le bien, & un respect commun pour l'homme illustre, que son génie & sa gloire avoient naturellement placé à leur tête : elle offroit aux jeunes gens qui entrent dans la carrière des Lettres, les moyens de faire des connoissances utiles à leur avancement ou à leur fortune, sans se livrer à une dissipation d'autant plus funeste pour le talent, qu'il est encore moins formé ; ils y trouvoient les encouragemens que donne le suffrage libre & éclairé des hommes supérieurs, les lumières utiles qui s'échappent de leur conversation, enfin la crainte salutaire pour la jeunesse, de perdre par sa conduite, l'estime d'une société qu'on respecte & qu'on recherche. Ce n'est point ici mon jugement que j'expose, c'est l'expression fidèle des sentimens de plusieurs de ceux qui étoient admis chez M. d'Alembert, telle qu'elle leur est échappée au milieu de leurs regrets.

La constitution de M. d'Alembert étoit naturellement foible ; le régime le plus exact, l'abstinence absolue de toute liqueur fermentée, l'habitude de ne manger que seul d'un très-petit nombre de mets sains & apprêtés simplement, ne purent le préserver d'éprouver avant l'âge les infirmités & le dépérissement de la vieillesse ; il ne lui restoit depuis long-temps que deux plaisirs, le travail & la

conversation ; son état de foiblesse lui enlevoit celui des deux qui lui étoit le plus cher : cette privation altéra un peu son humeur, son penchant à l'inquiétude augmenta, son ame paroissoit s'affoiblir comme ses organes, mais cette foiblesse n'étoit qu'apparente ; on le croyoit accablé par la douleur, & on ignoroit qu'il en employoit les intervalles à discuter quelques Questions mathématiques qui avoient piqué sa curiosité, à perfectionner son Histoire de l'Académie, à augmenter sa Traduction de Tacite, & à la corriger; on ne devinoit pas que, dans le moment où il verroit que son terme approchoit, & qu'il n'avoit plus qu'à quitter la vie, il reprendroit tout son courage. Dans ses derniers jours, au milieu d'une société nombreuse, écoutant la conversation, l'animant encore quelquefois par des plaisanteries ou par des contes, lui seul étoit tranquille, lui seul pouvoit s'occuper d'un autre objet que de lui-même, & avoit la force de se livrer à la gaieté & à des amusemens frivoles.

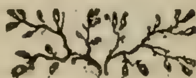
Illustre par plusieurs de ces grandes découvertes qui assurent au siècle où elles ont été dévoilées, l'honneur de former une époque dans la suite éternelle des siècles ; digne par sa modération, son désintéressement, la candeur & la noblesse de son caractère, de servir de modèle à ceux qui cultivent les Sciences, & d'exemple aux Philosophes qui cherchent le bonheur; ami constant de la vérité & des hommes ; fidèle jusqu'au scrupule aux devoirs communs de la Morale, comme aux devoirs que son cœur lui avoit prescrits ; défenseur courageux de la liberté, & de l'égalité dans les Sociétés savantes ou littéraires dont il étoit Membre ; admirateur impartial & sensible de tous les vrais talens; appui zélé de quiconque avoit du mérite ou des vertus ; aussi éloigné de toute jalousie que de toute vanité ; n'ayant d'ennemis que parce qu'il avoit combattu des partis, aimé la vérité & pratiqué la justice; ami assez tendre pour que la supériorité de son génie, loin de refroidir l'amitié en blessant l'amour-propre, ne fît qu'y ajouter un charme plus touchant, il a mérité de vivre dans le cœur de ses amis, comme dans la mémoire des hommes.

Il s'eſt aſſuré que ſes vues de bienfaiſance ſeront exécutées après lui; que les Ouvrages qu'il laiſſe, diſpoſés par lui-même dans le plus grand ordre, ſeront donnés au Public, à l'utilité duquel il les a conſacrés, & il a confié ſes diſpoſitions à trois de ſes amis: l'un ſon Confrère à l'Académie Françoiſe, diſtingué par des Ouvrages ingénieux & utiles, par ſon goût éclairé pour les Arts, par un caractère aimable & ſolide, étoit uni avec lui par une amitié de trente ans, qui avoit toujours été ſans nuage[a]; un autre, Magiſtrat d'une Cour ſouveraine, reſpecté pour ſa probité ſévère, l'avoit connu dès ſon enfance, l'avoit aimé avant que ſa gloire fût répandue, & l'a toujours aimé depuis[b]: je n'ai pu avoir d'autre titre pour être placé dans une liſte ſi honorable, que l'amitié même de M. d'Alembert, amitié que mon zèle pour l'étude m'avoit méritée dès ma jeuneſſe, que pendant plus de quinze ans j'ai regardée comme un des premiers biens de ma vie, & dont le ſouvenir doux & cruel ne s'affoiblira jamais dans mon cœur, car il eſt des pertes qui ne peuvent s'oublier, parce qu'elles ne peuvent ſe réparer; & lorſque l'ami qui nous a été enlevé, étoit un de ces hommes rares que pluſieurs générations ne peuvent quelquefois remplacer; lorſque ſon amitié, tendre, active, courageuſe, éclairée, étoit unique comme lui-même; lorſqu'on étoit uni avec lui par ces rapports d'opinions, de goûts, de ſentimens, par cet attrait naturel, qui rendroient irréparable la privation même d'un ami qui n'auroit point d'autres titres à nos regrets, il ne doit reſter à ceux qui ont éprouvé de telles pertes, & qui les ont vues ſe renouveler en peu d'années, que la triſte & douloureuſe conſolation de n'avoir pas vécu ſans connoître le bonheur.

[a] M. Watelet.

[b] M. Remi.

M. d'Alembert eſt mort le 29 Octobre 1783.



ÉLOGE



ÉLOGE DE M. DE TRESSAN.

Louis-Élisabeth de la Vergne, Comte de Tressan, Lieutenant général des armées du Roi, Commandeur de l'Ordre de Saint-Lazare, l'un des quarante de l'Académie Françoise, Associé-libre de celle des Sciences; de la Société royale de Londres; des Académies de Berlin & d'Édimbourg, naquit au *Mans*, le 4 Novembre 1705, de François de la Vergne-Tressan & de Magdeleine Brulart de Genlis.

La *Maison* de la Vergne étoit établie en Languedoc, lorsque Simon de Montfort, à la tête d'une troupe de Brigands que l'amour du pillage & le fanatisme rassembloient sous sa bannière, vint convertir & ravager cette belle province: les la Vergne, fidèles à leur Prince, Raimond, Comte de Toulouse, prirent avec lui la défense de son peuple; mais la férocité l'emporta sur le courage, plus de trois cents mille habitans paisibles & désarmés, furent la proie des Soldats & des bourreaux, tandis que les biens & les titres de ceux qui avoient voulu les défendre, devinrent la récompense de leurs assassins.

Les la Vergne abandonnèrent leurs possessions & leur patrie, heureusement qu'un siècle après, un Cardinal de la Vergne, Archevêque de Sens, répara le mal que les Légats d'Innocent III avoient fait à sa famille, & acheta la terre de Tressan, dont une des branches de la Vergne a depuis toujours porté le nom.

Cette branche embrassa, au seizième siècle, la Religion réformée: à la bataille de Jarnac, la Vergne, suivi de vingt-cinq de ses neveux, défendit long-temps le Prince de Condé blessé & abandonné de son armée: quinze de ces braves Chevaliers y périrent, la plupart des autres furent

blessés & faits prisonniers. La Vergne, ami de Coligni, le suivit au mariage de Henri IV; mais plus défiant que l'Amiral, parce qu'on employa moins d'artifices pour le tromper, il prévit la trahison que l'on tramoit contre son parti, rassembla chez lui les Gentilshommes qui l'avoient suivi à la guerre, arma ses domestiques, se précautionna contre une surprise, & au premier bruit du massacre, fit monter sa troupe à cheval, chargea celle des Meurtriers qui entouroient déjà sa maison, les dispersa, & courut se réfugier dans ses terres: ainsi par sa prudence & sa valeur il sut échapper à cette horrible conspiration d'un Roi contre son peuple, attentat dont on ne sauroit trop souvent rappeler la mémoire, pour apprendre aux Rois quels crimes ils s'exposent à commettre; & aux peuples, à quels malheurs ils doivent s'attendre, lorsqu'ils n'ont pas la sagesse d'étouffer les premiers cris du fanatisme sous le poids du mépris & de la risée publique.

Le fils de la Vergne, digne de son père, commanda l'Infanterie de l'aile droite à la bataille d'Ivri, & y reçut trois blessures; il eut pour fils François de Tressan, bisaïeul de celui dont nous faisons ici l'éloge; Louise de Monteinard sa femme étoit dans Béziers, lorsque le Duc de Montmorenci son parent y fut assiégé, elle demanda au Commandant de l'armée du Roi, ou plutôt du Cardinal de Richelieu, la liberté de sortir de la ville, l'obtint, & emmena avec elle dans sa voiture, le Duc de Montmorenci caché sous son vertugadin; le Cardinal ne put s'empêcher de louer hautement cette action qui lui enlevoit cependant une victime, à la vérité pour bien peu de temps.

Elle eut vingt-deux enfans, dont dix-neuf vécurent plus de soixante-dix ans, une des filles en vécut cent.

Ces détails généalogiques paroîtront peut-être étrangers à l'éloge d'un Académicien, mais ce sont les actions de ses ancêtres, & non leurs titres, que nous venons de rapporter; & ces actions sont une partie du patrimoine de leurs descendans.

M. le Comte de Treſſan fut élevé d'abord chez l'Évêque du Mans, ſon grand-oncle, car ſa famille avoit quitté la Religion réformée, elle avoit même produit un Miſſionnaire célèbre, qui, ſous le règne de Louis XIV, convertit beaucoup de Proteſtans, & n'en fut pas moins perſécuté comme janſéniſte. L'Évêque du Mans avoit quitté la Cour de bonne heure, pour ſe retirer volontairement dans ſon diocèſe, avec un Évêque anglois, ſon ami : ils vécurent enſemble pendant quarante-deux ans, & eurent le bonheur de mourir le même jour : M. de Treſſan fut alors élevé par ſon oncle, archevêque de Rouen, premier Aumônier du duc d'Orléans, Régent du royaume.

L'archevêque de Rouen fit venir ſon neveu à la Cour, école bien dangereuſe pour un jeune homme de treize ans : mais ce jeune homme ne ſe borna ni aux leçons qu'il pouvoit y recevoir, ni aux ſociétés qu'il y trouva ; il ſe lia dès ſa première jeuneſſe avec Voltaire & avec Fontenelle, eut l'avantage de leur plaire, & le mérite de ſentir le prix de leur amitié ; ils lui inſpirèrent le goût de la Philoſophie & des Lettres, & ce reſpect pour les Hommes illuſtres dans les Sciences ou dans la Littérarure, qui malheureuſement n'en eſt pas toujours une ſuite : car on a vu ſouvent les gens du monde, loin de trouver des plaiſirs ou un remède contre l'ennui, dans la culture des beaux Arts, devenir les victimes de cet amour-propre malheureux, qui accompagne les demi-talens, & haïr les hommes célèbres, dont la gloire humilioit en ſecret leur orgueil.

M. de Treſſan, quoiqu'occupé autant qu'aucun autre homme de la Cour, des plaiſirs ou de ce qui en a le nom, réſervoit tous les jours quelques heures qu'il conſacroit au travail ; il s'inſtruiſoit par le commerce des Savans, dont il avoit ſu ſe concilier la bienveillance, & ſe préparoit des reſſources pour le temps de ſa vieilleſſe, des conſolations contre les malheurs de l'ambition & de la fortune.

Il fit dans la guerre de 1741, toutes les campagnes de Flandre, avec le feu Roi, dont il étoit Aide-de-camp à

la bataille de Fontenoi, la première qu'un roi de France eût gagnée contre les Anglois, depuis celle de Taillebourg.

En 1750 il entra dans l'Académie comme Associé-libre; il s'étoit déclaré Physicien peu de temps auparavant, par un Mémoire sur l'Électricité; matière alors très-nouvelle & très-peu connue. Dans cet Ouvrage, il s'étoit un peu livré à son imagination, & elle l'avoit bien servi, puisqu'il a prédit une partie des découvertes qui ont été faites depuis.

Ces Recherches qui n'ont pas encore été imprimées, annoncent une étendue de connoissances qu'on est étonné que M. le Comte de Tressan ait eu le temps d'acquérir, & montrent une sagacité qu'on regrette de n'avoir pas été plus constamment employée; elles donnent même lieu de croire que son goût pour la Physique seroit devenu un véritable talent, s'il avoit pu le suivre avec cette opiniâtreté & cette constance sans lesquelles on ne fait, dans les Sciences, ni de véritables découvertes, ni même de véritables progrès.

Vers le même-temps, il composa pour l'Encyclopédie plusieurs articles, presque tous sur l'Art Militaire; & il eut soin d'y faire entrer quelques leçons d'humanité & de justice, que malheureusement on ne peut pas encore regarder comme absolument inutiles.

M. le Comte de Tressan passa de la Cour de France à celle de Lorraine, où il fut grand Maréchal-des-Logis du Roi de Pologne Stanislas, & successivemeut Commandant du Toulois & de la Lorrraine-allemande.

Il contribua beaucoup à l'établissement de l'Académie de Nanci; il y lut plusieurs Discours, & y prononça souvent l'Éloge des hommes célèbres qu'il y avoit fait associer. Le Roi de Pologne qui aimoit les Lettres & qui les cultivoit, avoit pris pour M. de Tressan un goût assez vif pour inspirer de la jalousie au père Menou; aussi ce Jésuite ne manqua-t-il pas d'accuser M. de Tressan d'avoir mis de la philosophie dans quelques-uns de ses Discours Académiques; le Roi lui en parla: *Je conviens de mon tort,* lui répondit

M. de Treſſan, *mais je ſupplie votre Majeſté, de ſe rappeler qu'à la Proceſſion de la Ligue, il y avoit trois mille Moines & pas un Philoſophe.*

La mort de ce Prince, celle de ſa fille & de ſon petit-fils, firent perdre à M. de Treſſan, toutes les perſonnes auguſtes dont les bontés pouvoient nourrir en lui des reſtes d'ambition; c'eſt en général pour les hommes la dernière de leurs paſſions, & ſur-tout elle ne quitte jamais abſolument ceux qui ont vécu dans les Cours. Ce fut alors qu'il ſentit le prix de l'habitude qu'il s'étoit formée de cultiver ſon eſprit, & par la lecture & par la compoſition de quelques Ouvrages. Le premier fruit de ſa retraite fut conſacré à l'éducation de ſes enfans, mais après avoir rempli ce devoir par un Livre ſérieux, intitulé *Réflexions ſur l'Eſprit*, il renonça aux Recherches philoſophiques, abrégea les Amadis, traduiſit l'Arioſte, & fit des Romans de Chevalerie.

Il trouvoit dans ſa famille les noms de *Laure*, de *Diane* de *Château-Morand*, de *la Fayette*, noms célèbres dans les Romans; mais ce dernier pouvoit l'expoſer à une comparaiſon dangereuſe, auſſi eut-il ou la galanterie ou la prudence de ne pas s'expoſer au parallèle.

Il crut qu'un Chevalier ne devoit point parler d'amour comme une femme tendre & ſenſible, il ſubſtitua une gaieté piquante, mais modeſte; des images voluptueuſes, mais toujours enveloppées du voile de la décence; une liberté qui amuſe, qui ſéduit, mais ſans alarmer la pudeur, à cette douce ſenſibilité, à cette délicateſſe, à cette pureté de ſentimens qui caractériſent les Ouvrages de Mme de la Fayette: tous deux ſemblent avoir conſervé le caractère de leur ſexe, dans leur manière de peindre l'amour, & l'on y aperçoit à peu-près la même différence que parmi les gens du monde on peut obſerver dans la manière de le ſentir.

Il ne nous appartient pas de fixer la place que mérite M. le Comte de Treſſan dans un genre moins frivole qu'on ne croit, puiſque la plupart des hommes, & ſur-tout des femmes, ont pris dans les Romans qu'ils ont lûs, une partie de leurs préjugés ou de leurs principes, mais nous

nous bornerons à obſerver qu'il n'eſt aucun Romancier, ni même aucun Poëte, qui ne puiſſe envier le tableau ſi naïf, ſi original, & ſi touchant de l'éducation d'Urſino.

C'eſt à l'âge de ſoixante-treize ans qu'on vit M. de Treſſan ſe livrer à ces Ouvrages dans leſquels on trouve toute la fraîcheur, toute la gaieté d'une imagination jeune & riante; c'eſt à cet âge qu'il montra pour le travail une ardeur telle qu'un homme de Lettres avide de renommée, peut l'avoir au commencement de ſa carrière.

Au milieu des douleurs de la goutte, il dictoit un conte rempli des peintures les plus animées : il ſembloit que ſon corps & ſes ſens euſſent vieilli ſeuls, & que l'âge & les infirmités euſſent reſpecté ſon imagination & ſon eſprit.

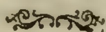
Si l'on regarde ces Ouvrages comme ceux d'un vieillard, combien doit-on regretter que dans ſa jeuneſſe il n'ait pas ſuivi la carrière des Lettres avec la même ardeur? mais peut-être auſſi que ſon eſprit, qu'il avoit exercé toujours ſans ſe fatiguer jamais, avoit conſervé toute ſa force, & que la dépendance où l'ame eſt de nos organes, n'eſt ni ſi abſolue ni aſſujettie à des loix ſi régulières, qu'une obſervation ſuperficielle nous porte à le croire.

Il deſira vivement d'être de l'Académie Françoiſe, & obtint à l'âge de ſoixante-quinze ans un titre dont il ne devoit pas jouir long-temps, mais dont il jouit avec toute la vivacité, toute la ſenſibilité d'un jeune homme qui l'auroit obtenu pour le prix d'un premier ſuccès.

Le dernier Ouvrage de M. de Treſſan doit intéreſſer particulièrement l'Académie des Sciences : c'eſt un éloge de Fontenelle, de cet homme qu'elle regrettera long-temps, à qui peut-être elle doit une partie de ſa gloire, & ce qui eſt encore plus précieux de cet eſprit philoſophique qui lui fait tolérer toutes les hypothèſes ſans en adopter aucune; réſiſter aux opinions nouvelles, mais encourager les découvertes; &, en conſervant l'eſprit de doute dans les juſtes bornes que preſcrit la ſageſſe, être à la fois un appui utile pour les véritables inventeurs, & une barrière contre le charlataniſme. M. de Treſſan avoit beaucoup vécu avec

Fontenelle; il l'avoit vu contribuer au progrès des Sciences autant peut-être qu'aucun homme de génie, ſans cependant les avoir enrichies d'une ſeule découverte; & cacher avec autant de ſoin, la profondeur & l'étendue de ſes vues philoſophiques, que d'autres mettent de prétention à en montrer, ne voulant pas que les hommes appriſſent trop-tôt, tout le bien que la raiſon pouvoit leur faire, ne diſant les vérités qu'à meſure qu'il les croyoit utiles, mais ayant ſoin de faire entendre celles qu'il ne diſoit pas, pour qu'elles ne fuſſent point perdues, & qu'on pût les retrouver lorſqu'il ſeroit temps de les révéler. M. de Treſſan avoit vu Fontenelle, pendant le cours d'une ſi longue vie, rendre les Sciences reſpectables par ſes mœurs, en inſpirer le goût, & en faire ſentir l'utilité par ſes Ouvrages, ſans jamais leur attirer d'ennemis, ſans bleſſer l'amour-propre des ignorans, ſans les éblouir par trop d'éclat, ou les effrayer en attaquant de front trop de préjugés à la fois. Modeſte, réſervé dans ſon zèle pour la vérité, comme dans ſa conduite, il exerçoit ainſi ſur les eſprits de ſon ſiècle une influence d'autant plus forte qu'elle ſe faiſoit moins ſentir, & qu'on profitoit de la lumière qu'il avoit répandue ſans apercevoir de quel point elle étoit partie; c'étoit à lui que M. de Treſſan devoit en grande partie le bonheur que la culture des Lettres avoit répandu ſur les dernières années de ſa vie, & c'eſt à lui qu'il voulut conſacrer les derniers fruits de ſa vieilleſſe. Dans la préface de cet Éloge, M. de Treſſan ſemble prévoir ſa fin prochaine, & céder ſans regret à la force qui l'entraînoit dans le tombeau, pourvu qu'elle lui permît de s'arrêter encore un moment pour rendre un dernier hommage à une mémoire chérie.

Des attaques de goutte répétées avoient épuiſé ſes forces, & il y ſuccomba le 31 Octobre 1783, laiſſant deux fils au ſervice, dont l'un ne lui a ſurvécu que très-peu de temps, un troiſième Grand-Vicaire de Rouen, & une fille mariée à M. le Marquis de Maupeou.





ÉLOGE
DE M. WARGENTIN.

PIERRE WARGENTIN, Chevalier de l'Étoile polaire; Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Stockolm; des Académies de Péterſbourg, d'Upſal, de Copenhague, de Gottingue; de la Société Royale de Londres; Aſſocié-étranger de l'Académie des Sciences, naquit le 22 Septembre 1717, dans la paroiſſe de Junne en Suède, de Guillaume Wargentin, Paſteur de cette Égliſe, & de Chriſtine Aroſell.

Parmi les découvertes qui ajoutent ſucceſſivement à la maſſe toujours croiſſante des connoiſſances humaines, il en eſt dont une ſeule ſuffiſant pour aſſurer à celui qui l'a faite, la reconnoiſſance de ſes contemporains, ou même les hommages de la poſtérité, le diſpenſe en quelque ſorte de chercher d'autres titres à la gloire; elles doivent cet avantage à leur utilité, à leur éclat, ou au mérite d'offrir la réunion inattendue de vérités long-temps iſolées: l'on pourroit être tenté de regarder comme l'ouvrage du haſard, le bonheur qu'ont eu quelques Savans, d'être conduits par leurs recherches à de telles découvertes, ſi ce choix n'étoit pas déjà par lui-même, une preuve d'un bon eſprit, qui connoît l'état de la Science qu'il cultive, & ſait diſtinguer, dans les travaux qu'elle préſente, ceux qui ſont importans, & dont le ſuccès n'eſt au-deſſus ni de ſes forces ni des reſſources qu'offrent les méthodes connues.

Telle a été la découverte des équations empiriques des ſatellites de Jupiter, par M. Wargentin.

Les Aſtronomes qui conſidèrent les mouvemens des corps céleſtes comme circulaires & uniformes, ont nommé

équation,

équation, la loi régulière suivant laquelle les mouvemens d'une Planète s'écartent de cette hypothèse.

Depuis la découverte de la force générale à laquelle les Planètes obéissent, il existe deux manières de déterminer ces équations; l'une par le calcul des perturbations que cause dans le mouvement d'une Planète l'attraction des autres corps célestes; l'autre, en cherchant par l'examen des effets, & sans remonter à leur cause, une loi constante formée d'un petit nombre de termes qui puisse satisfaire à toutes les observations, & l'on a donné le nom d'*équations empiriques* à celles qui sont trouvées par cette dernière méthode: lorsque M. Wargentin s'occupa de déterminer les équations des satellites de Jupiter, les Géomètres n'avoient pas encore donné une méthode générale pour ces sortes de recherches; comme Képler, il n'eut d'autres secours que celui de cet instinct du génie, qui sait suppléer aux méthodes, & cet instinct le servit heureusement.

Il trouva d'abord pour chaque Satellite une équation du temps, & quelque temps après, les équations pour le changement d'inclinaison; ces équations représentoient le mouvement des Satellites, avec une exactitude à laquelle on n'eût osé s'attendre: à la vérité elle n'étoit pas égale pour toutes, mais la théorie, en prouvant depuis, qu'une équation d'un seul terme ne peut suffire à représenter les phénomènes dans les cas où celle de M. Wargentin s'en éloigne, a fait voir en même temps, qu'il seroit injuste d'attribuer à l'auteur de cette découverte, une imperfection qui naît uniquement de la nature du problème.

C'est en 1746, que M. Wargentin donna ses premières équations empiriques, il n'avoit alors que vingt-neuf ans; trois ans après, en 1749, l'Académie de Stockolm le choisit pour son Secrétaire: il a rempli cette place pendant trente-quatre ans. Un goût éclairé pour toutes les Sciences, qui lui faisoit pardonner sa préférence pour les Mathématiques; la douceur, la simplicité & la modération de son caractère, moyens plus sûrs que l'adresse pour concilier ou ménager

des amours-propres opposés ; son activité pour publier, pour répandre promptement les Ouvrages de ses Confrères, aux dépens même des travaux particuliers qui n'eussent illustré que lui ; son zèle pour le progrès des Sciences, & cette espèce d'abandon de sa propre renommée pour ne paroître occupé que de la gloire commune ou de l'utilité générale, une dignité modeste qui savoit faire respecter les Sciences, mais sans armer contre elles, en paroissant trop exiger, les préjugés encore puissans & dangereux ; une probité rigoureuse qui rassuroit même contre les effets de ces préventions auxquelles la vertu la plus pure n'échappe pas toujours; ce désintéressement sans faste qui touche les ames généreuses, & gagne si bien les autres en leur ôtant la crainte de la concurrence; enfin, ce desir d'être utile, qui se marquant dans les plus petites choses, annonce ce qu'on doit en attendre dans les occasions plus importantes, telles furent les qualités qui méritèrent à M. Wargentin l'estime générale & l'amitié de ses Confrères.

En 1759, on érigea un Observatoire à Stockolm, sur une hauteur à l'extrémité d'un faubourg; il étoit naturel qu'on en offrît la direction à M. Wargentin, on lui proposa de s'y établir & il y consentit: il savoit qu'entouré des objets qui l'intéressoient le plus, sa famille, ses instrumens & ses livres, il y trouveroit la solitude & la paix; & il y resta jusqu'à la fin de sa vie.

Il étoit Membre d'une Commission chargée de rassembler tous les détails relatifs à la population de la Suède, à la durée de la vie des hommes, à l'influence des différentes causes de mortalité, à la connoissance exacte de la culture & des productions, en un mot à tous les faits d'économie politique, que l'on peut avoir intérêt d'observer dans un grand royaume : on avoit cru, en Suède, qu'un Mathématicien habile, pouvoit, lorsqu'il s'agissoit de prononcer sur des résultats de calculs, siéger à côté des Membres de l'Administration; & qu'une sage politique pouvoit conseiller

d'honorer les Savans, & non de les tenir dans une dépendance qui repouſſe les vrais talens ou qui les rend inutiles.

Les regiſtres de ce Bureau lui ont fourni le ſujet de pluſieurs Mémoires intéreſſans qui ſont inſérés dans les Recueils de l'Académie de Stockolm, & il avoit raſſemblé le réſultat de tous ſes travaux en ce genre, dans un grand Ouvrage qu'il n'a pas eu le temps de publier: la ſagacité dont M. Wargentin a donné une preuve ſi éclatante, préciſément dans l'art de déduire des obſervations, leurs réſultats généraux, doit faire deſirer que l'on ne ſoit pas privé d'un travail ſi utile pour ſon pays, & peut-être pour l'Europe entière; il faut même former des vœux pour que cet établiſſement honorable à la Suède qui a donné l'exemple, ſoit imité par les autres peuples, & aſſure enfin à des connoiſſances dont dépend eſſentiellement le bonheur des hommes, une baſe à la fois moins incertaine & plus préciſe.

Comme Secrétaire de l'Académie de Stockolm, M. Wargentin a fait pluſieurs diſcours & quelques éloges d'Académiciens; ſes Compatriotes ſont les ſeuls juges compétens du mérite de cette partie de ſes travaux, & ils lui accordent celui d'avoir connu le véritable ſtyle de ce genre d'Ouvrages, d'y avoir été toujours ſimple & noble, élégant & naturel, d'avoir enfin mérité une place parmi les premiers Écrivains de ſa Nation.

Environ un an avant ſa mort, ſa ſanté avoit commencé à dépérir, de manière à laiſſer peu d'eſpérance, il apprit alors que l'Académie des Sciences de Paris lui avoit donné une de ſes huit places d'Aſſociés-étrangers, & qu'ainſi il ne mourroit point ſans avoir obtenu ce qui avoit fait l'objet le plus vif de ſon ambition littéraire.

Son déſintéreſſement ne lui avoit permis de s'occuper ni de ſa fortune ni de celle de ſa famille, & ſur la fin de ſa vie il éprouva des inquiétudes pour ſes enfans, il ſentit que l'homme iſolé & dégagé de tout bien, a ſeul la liberté de ſe livrer ſans réſerve à ce que l'élévation de ſon ame lui inſpire; il eut des remords, ou du moins des regrets

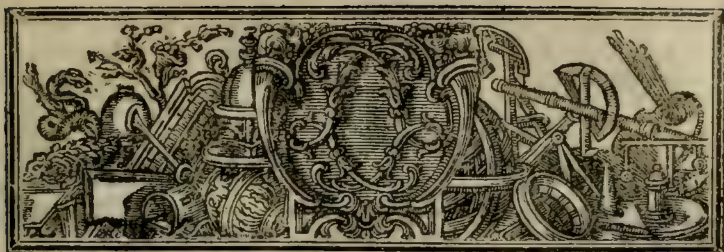
de l'avoir portée trop loin : heureusement l'amitié de ses Confrères avoit tout réparé; peu de temps avant sa mort il apprit que l'Académie lui avoit accordé une gratification sur les fonds dont elle dispose, & sollicitoit auprès du Gouvernement une pension pour ses enfans; à peine pouvoit-il encore faire entendre quelques sons, mais la joie que lui inspira cette nouvelle ranima ses traits que l'approche de la mort avoit effacés, & il expira en jetant sur ses enfans qui pleuroient autour de lui, un regard tendre & serein, dont aucune amertume n'empoisonnoit plus la douceur.

Il mourut le 13 Décembre 1783, âgé de soixante-six ans.

L'Académie de Suède lui a fait frapper une médaille, honneur qu'elle ne rend qu'à ses Membres les plus illustres.



MÉMOIRES



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES

de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXXIII.

MÉMOIRE

SUR

L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE,

ET SUR SA DIMINUTION.

Par M. LE GENTIL.

J'AI déjà traité deux fois cette matière. On trouve dans le Volume de 1757, un Mémoire de moi, très-détaillé, sur ce sujet, avec toutes les Obfervations que j'ai faites à

Lû le 3 Mai 1783.

l'Obſervatoire royal, ſous les yeux de M. Caſſini de Thury, en 1751 & 1756, avec le grand quart-de-cercle mobile, de 6 pieds de rayon; j'en ai conclu pour 1753, l'obliquité de l'Écliptique, de $23^d 28' 17'',6$, & par la comparaiſon de cette obliquité avec les obſervations du dernier ſiècle, celles qui m'ont paru mériter la préférence, j'ai conclu que l'on pouvoit admettre une diminution dans l'obliquité de l'Écliptique, de 34 ſecondes en cent ans.

Cette diminution, de laquelle je conviens dans mon Mémoire, que l'on pouvoit appeler aux obſervations futures, rempliſſoit pour lors l'objet que je me propoſois, qui étoit de réduire les obſervations de Bouillaud avec toute l'exactitude poſſible.

A Pondichéry, en 1768 & 1769, je me ſuis appliqué à la recherche de cet élément ſi important, d'Aſtronomie. Placé dans la Zone torride, à 12 degrés de latitude, dans un beau climat, où les objets paroiſſent plus éclairés, plus nets, & mieux terminés que dans celui-ci, je crus que c'étoit pour moi une circonſtance à ne pas laiſſer échapper: je m'appliquai d'abord aux réfractions, dont j'ai conſtruit une Table pour ce pays-là.

J'ai rapporté toutes ces obſervations dans mon Voyage, *(tome I, page 458 & ſuiv.)* où l'on trouve que pour 1768 complet, j'avois établi l'obliquité de l'Écliptique, de $23^d 28' 9'',1$. M. le Monnier *(volume de l'Académie, année 1771)* ayant réduit l'obſervation de M. Richer, faite à Cayenne, en conſultant la Table des Réfractions de M. Bouguer, pour la Zone torride, & donnant par ce moyen l'obliquité de l'Écliptique pour 1772, de $23^d 28' 39''$, j'en ai encore conclu une diminution de 31 ſecondes par ſiècle.

Étant ſûr, autant qu'on peut l'être, de la bonté de mon quart-de-cercle, par le grand nombre d'obſervations & de vérifications que j'ai faites dans mes voyages, j'ai encore recherché ici cette obliquité, que j'avois déjà obſervée il y a trente ans à l'Obſervatoire royal; j'en ai donc répété les obſervations l'an paſſé dans la tour occidentale: je les

communiquai à l'Académie quelques jours après le solstice. Il en résulte que j'avois trouvé la hauteur apparente du bord supérieur du Soleil, au moment du solstice, de $65^d\ 1'\ 12'',3$. (*Voyez ci-après page 12*).

La difficulté consistoit à vérifier mon quart-de-cercle, parce que je ne pouvois observer au Zénith, & que pour faire cette vérification, il faut user des plus grandes précautions, & avoir pour cela son quart-de-cercle dans un endroit commode, & sur-tout dont on ait la clef.

M. le Président de Saron ayant bien voulu que je fisse usage d'une guérite à lui, qui a ci-devant appartenu à M. le Marquis de Courtenvaux, elle s'est heureusement trouvée assez grande pour y mettre mon quart-de-cercle: je l'ai fait placer contre un mur de mon jardin, où elle m'est de la plus grande commodité pour observer à toutes sortes de hauteurs au-dessus de l'horizon, tant du côté du nord que du côté du midi; j'y ai même un assez vaste horizon, & je peux y prendre des hauteurs correspondantes, au moyen d'un compteur astronomique que j'y ai fait placer depuis peu: l'endroit où cette guérite est placée, est de vingt-une toises, & environ trois pieds plus septentrional que la fenêtre du sud-est de la tour occidentale où j'ai observé le solstice.

Lorsque j'ai été arrangé, j'ai commencé par observer *a* de Persée & de la Chèvre; la saison, sans être rigoureuse, a été fort pluvieuse, en sorte que je ne pus avoir de hauteurs de Persée que d'un côté; mais m'ayant paru assez bonnes, & y ayant joint celles de *a* de la Chèvre, faites du même côté, je crus qu'en employant le Catalogue des Étoiles de M. l'abbé de la Caille, je pouvois tirer un premier résultat qui ne pouvoit pas s'éloigner beaucoup du véritable: il me donna pour l'obliquité de l'Écliptique, $23^d\ 28'\ 14'',9$ apparente: ce fut cette obliquité que je communiquai à l'Académie, le mois de Février dernier.

La saison, comme je l'ai remarqué, n'a pas été rigoureuse lors de la première vérification de mon quart-de-cercle, & le thermomètre se soutint dans ma guérite pendant les obser-

vations que je fis de α de Perſée & de la Chèvre, depuis 7 degrés juſqu'à 10 degrés au-deſſus du terme de la glace, comptés ſur un excellent thermomètre de M. Lavoiſier.

Sachant bien que cette vérification n'étoit pas ſuffiſante, j'ai employé depuis, pour la même vérification, ι de la grande Ourſe (la boréale des deux qui ſont à l'extrémité du pied droit) que M. l'abbé de la Caille a obſervée particulièrement, & dont il s'eſt ſervi pour fixer la ligne de collimation de ſon ſextant de ſix pieds de rayon.

J'ai d'abord fait trois bonnes obſervations de cette Étoile, la face de mon quart-de-cercle regardant l'orient; & quoique j'aie été obligé de me faire éclairer, je fus fort ſatisfait de ces trois obſervations.

Ayant tourné le quart-de-cercle, la face à l'occident, j'obſervai deux jours de ſuite la même Étoile, & j'eus encore beſoin de la lumière ; mais le troiſième jour je l'obſervai ſans ce ſecours, & je fus ſatisfait de mon obſervation.

Je me contentai donc de cette ſeule obſervation faite à la faveur du crépuſcule, & elle me parut déciſive avec les deux précédentes: alors, je retournai le quart-de-cercle, la face à l'orient, afin de profiter de deux à trois jours encore, ſi le temps me le permettoit, pour voir l'Étoile pendant le crépuſcule, & vérifier, par ce moyen, les trois premières obſervations faites de ce côté, à la faveur de la bougie.

Je vis en effet encore l'Étoile, & j'en fis une fort bonne obſervation le 14 d'Avril; mais je ne fus pas également ſatisfait de celle du 17, ce qui me fit redoubler d'attention, le 18, que je vis encore l'Étoile pour la dernière fois, par le plus beau temps du monde. Toutes ces obſervations ſeront rapportées à la fin de ce Mémoire. Avant d'entamer actuellement le calcul de l'obliquité, je dois dire un mot de la hauteur du Pôle à l'Obſervatoire royal.

La hauteur du Pôle, à l'Obſervatoire royal, par les dernières obſervations de M. Caſſini de Thury, eſt de $48^d\ 50'\ 10''$, & $48^d\ 50'\ 12''$, avec une différence de 2 ſecondes ſeulement dans les réſultats. (*Mérid. vérifiée, p. 281.*)

La diſtance entre le zénith de l'Obſervatoire royal, & le zénith de l'Obſervatoire du collége Mazarin, eſt de 1′ 15″, ſelon M. de la Caille : or, la latitude de cet Obſervatoire, étant de 48^d 51′ 29″,2, ſelon le même Aſtronome, il en réſulte la hauteur du pôle à l'Obſervatoire royal, de 48^d 50′ 14″,2.

En l'année 1716, on trouve dans la Connoiſſance des Temps, 48^d 50′ 2″ pour la latitude de l'Obſervatoire royal, & dès 1720, on y met cette même latitude de 48^d 50′ 10″ à peu-près, telle qu'on la trouve aujourd'hui ; & ce n'eſt que dans la Connoiſſance des Temps de 1765, que M. de la Lande mit cette latitude de 48^d 50′ 14″, conformément à la détermination de celle du Collége Mazarin, par M. l'abbé de la Caille.

Il paroîtroit, d'après les recherches de M. de Thury, dont nous venons de parler, que l'on pourroit ſuppoſer 48^d 50′ 10″ ou 48^d 50′ 12″, & en prenant un milieu, 48^d 50′ 11″; en ſorte que toute la différence entre les Aſtronomes modernes, ſur la hauteur du pôle de l'Obſervatoire, ſe réduiroit à 3″ ſeulement ; & n'ayant nulle raiſon pour adopter un réſultat plutôt qu'un autre, c'eſt-à-dire, pour décider entre deux déterminations faites par d'habiles Obſervateurs, & qui diffèrent ſi peu entr'elles, je me ſuis trouvé embarraſſé dans le choix de cet élément, d'ailleurs ſi important pour la recherche de l'obliquité de l'Écliptique : mais ſans vouloir avoir la prétention de fixer les doutes que pourroient avoir les Aſtronomes ſur ces trois ſecondes de différence, je dirai que j'ai ſuppoſé dans mes calculs la hauteur de l'Équateur à l'Obſervatoire royal, de 41^d 9′ 47″,2 ; & voici ſur quoi je me ſuis fondé.

J'ai employé pour cela *a* de Perſée, que j'ai obſervé à Pondichéry à 52^d de hauteur ; hauteur, comme l'on voit, aſſez grande, & où la réfraction ne doit point varier dans un climat ſi beau que celui de Pondichéry, où les Étoiles n'ont aucune ſcintillation. Ici j'ai obſervé la même Étoile qui, paſſant par le Zénith, m'a procuré l'avantage de ne point employer la réfraction.

Voici donc la marche que j'ai suivie.

La déclinaison de α de Persée pour 1769, lorsque je l'observai à Pondichéry, étoit, selon le Catalogue de M. l'abbé de la Caille, de 49d 1′ 26″,2 apparente: je l'ai trouvée, par mes propres observations *(Voyage aux Indes, tome I)* de 49d 1′ 30″,8 apparente.

Différence...... 4″,6.

La déclinaison de la Chèvre pour 1783, lorsque je l'ai observée, étoit à très-peu de chose près, d'après le Catalogue de l'abbé de la Caille, de 45d 45′ 51″,2 apparente, & celle de *a* de Persée, de 49. 4. 43,4 apparente.

Différence...... 3. 18. 52,2.

Je l'ai trouvée par mon quart-de-cercle, corrigée par la réfraction, de........... 3d 18′ 52″.

Je peux donc supposer que j'ai bien observé, puisque je suis d'accord avec M. de la Caille, & je peux adopter les résultats que j'ai trouvés par mon quart-de-cercle.

Maintenant, en reprenant & en partant de mes observations faites à Pondichéry en 1769, j'ai supposé la déclinaison de *a* de Persée en 1783, lorsque je l'ai observée, de........................ 49d 4′ 38″,8: or j'ai observé sa hauteur, de....... 90. 21. 20.

Il en résulte.................. 41. 9. 46 pour la hauteur de l'équateur, à l'endroit où j'ai observé; & si j'y ajoute, pour ne rien négliger, 1″,2 pour les vingt-une toises dont j'ai parlé ci-dessus, j'aurai 41d 9′ 47″,2; & enfin la hauteur du pôle, dans la tour occidentale où j'ai observé le solstice de 48d 50′ 12″,8.

Telle est la hauteur du pôle que j'ai cru pouvoir employer dans les calculs suivans, sans prétendre, je le répète, faire adopter ce résultat, comme décidant la question sur les trois secondes dont j'ai parlé plus haut: il est au moins certain que mon résultat tient à très-peu-près le milieu entre 48d 50′ 11″ &............................ 48. 50. 14.

Suite du calcul de l'obliquité de l'Écliptique.

Hauteurs ſolſticiales du Soleil...........	65ᵈ	1′	12″,3.	
Demi-épaiſſeur du fil.................	—	0.	6,5.	
Erreur du quart-de-cercle.............	—	0.	55,2.	
Réfraction.........................	—	0.	24,0.	
Parallaxe..........................	+	2.	9,0.	
Demi-diamètre du Soleil.............	—	15.	46,5.	
Donc obliquité apparente..............	23.	28.	15,8.	
Otant la nutation....................	—	0.	8,9.	
Obliquité vraie ou moyenne............	23.	28.	6,9.	

Je ne perdrai pas de temps à diſcuter les obſervations des ſiècles précédens ſur l'obliquité de l'Écliptique, je l'ai fait dans le volume de 1757; & j'avoue aujourd'hui que malgré toutes les peines que j'ai priſes & que je prendrois encore à les diſcuter de nouveau, je me trouverois au milieu d'un labyrinthe inextricable de difficultés. Je ne mettrai point la main aux obſervations des Aſtronomes mes contemporains, ſur la même obliquité; les diſcuter, ce ſeroit vouloir les juger, mon intention n'eſt pas de juger perſonne. Je me contenterai de rapporter ici les réſultats que j'ai trouvés ſur cette obliquité en 1753, 1769 & 1782, qui donnent une petite diminution entr'elles; je répéterai en même-temps ici l'avertiſſement ou la remarque que j'ai faite en 1757: ſavoir que l'obliquité de l'Écliptique auroit réellement diminué de la quantité indiquée par mes obſervations, s'il n'y avoit point d'erreur dans ces obſervations ni dans la vérification de l'inſtrument, mais que la choſe n'eſt pas poſſible, & que cette erreur peut, ſans peine, monter à 2″ ou 2″ $\frac{1}{2}$; ce qui ne ſuppoſeroit pas plus d'un quart de ſeconde d'erreur ſur chaque élément qu'on eſt obligé d'employer dans le calcul.

Maintenant de 1753 à 1782, c'eſt-à-dire, un intervalle de vingt-neuf ans, m'a donné 10″ $\frac{7}{10}$; ce qui ſuppoſeroit 37″ en cent ans; de 1753 à 1769, c'eſt-à-dire, un inter-

valle de ſeize ans, m'a donné 7″ $\frac{7}{10}$, ce qui ſuppoſeroit 48 ſecondes $\frac{1}{10}$ en cent ans; de 1769 à 1782, c'eſt-à-dire, le dernier intervalle qui eſt de treize ans ſeulement, ne m'a donné que 3 ſecondes, ce qui ne ſuppoſeroit que 23 en cent ans. Enfin ce ſeroit 36 ſecondes en cent ans en prenant un terme moyen entre ces trois réſultats; car je n'ai pas plus de doute ſur l'un que ſur l'autre, & je ſuis également ſatisfait des trois; mais parce qu'un trop petit intervalle entre les obſervations multiplie les erreurs autant de fois qu'il eſt contenu dans l'intervalle de cent ans; les grands intervalles doivent être préférés aux petits dans ce cas; par cette raiſon, quoique je n'aie pas de ſujet de doute ſur les obſervations d'une des trois époques que je rapporte, plus que ſur les autres; je m'en tiendrai à l'intervalle de vingt-neuf ans, qui m'a donné 10 ſecondes $\frac{7}{10}$, & par conſéquent 37 ſecondes en cent ans.

TABLE des Obſervations de α de Perſée, de α de la Chèvre, & de ι de la grande Ourſe.

Hauteurs méridiennes de α de Perſée, la face de l'inſtrument à l'Orient; à la faveur du Crépuſcule.

1783.	10 Fév. α Perſée. .	90ᵈ,00 + 10. * Tours — ½ ſec.	*bonne.*
	11 Fév.	90,00 + 10. 1″,	*bonne.*
	14 Fév.	90,00 + 10. 6″,	*bonne.*

Dans cette obſervation-ci, j'ai fait en ſorte que l'étoile raſât exactement, autant qu'il eſt poſſible, le bord ſupérieur du fil de mon micromètre, qui eſt vu ſous un angle de 13 ſecondes, l'Étoile a ſuivi ce fil très-exactement pendant plus d'une minute & demie, tant avant qu'après ſon paſſage par le Méridien.

Hauteurs méridiennes de α de la Chèvre, la face de l'inſtrument à l'Orient.

1783.	24 Février α de la Chèvre.	870ᵈ + 1. 22″.
	26 Février.	870 + 1. 26.

* Le cadran du micromètre de mon quart-de-cercle eſt diviſé en 128 parties qui valent 128 ſecondes.

Le

Le fil un peu à gauche du centre du point.

1783. 7 Mars	87^d,00 + 1. 24".	
8 Mars	87,00 + 1. 21	*bonne.*
9 Mars	87,00 + 0. 22 $\frac{3}{4}$.	

On a éclairé dans la première Obſervation; mais on a très-bien vu.

Le thermomètre s'eſt ſoutenu entre 7 & 10 degrés au-deſſus de la congélation.

Hauteurs méridiennes de ι de la grande Ourſe, la face de l'inſtrument à l'Orient.

1783. 4 Avril	90^d,00 + 4. 60" $\frac{3}{4}$.
5 Avril	90,00 + 4. 60 $\frac{3}{4}$.
6 Avril	90,00 + 4. 65 $\frac{3}{4}$.

La face de l'inſtrument à l'Occident.

7 Avril	90^d,00 + 2. 1".
8 Avril	90,00 + 2. 1.
12 Avril	90,00 + 1. 126 $\frac{1}{2}$.

La face de l'inſtrument à l'Orient.

13 Avril	90^d,00 + 4. 64".	
14 Avril	90,00 + 4. 66	*bonne.*
18 Avril	90,00 + 4. 65	*bonne.*

Il réſulte de toutes ces obſervations de ι de la grande Ourſe, que la ligne de collimation de mon quart-de-cercle eſt bien fixée à $90^d\ 6'\ 55'',22'''$ ou $\frac{2}{10}$.

Le thermomètre a conſtamment marqué entre 10 & 15^d au-deſſus de la glace pendant ces obſervations.

Remarques ſur les Obſervations faites avec ce même quart-de-cercle, par M. l'abbé de la Caille, il y a quarante ans.

Je n'ai point comparé mes obſervations, comme je devois le faire, à celles de M. de la Caille, faites au collége Mazarin

avec le même instrument il y a quarante ans, rapportées dans les volumes de l'Académie, & qui paroissent cependant très-bien faites; j'ai voulu éviter par-là de m'embarquer dans la difficulté que m'a faite M. le Monnier, au sujet de ces observations: la voici.

Le quart-de-cercle de M. l'abbé de la Caille, dont je me sers depuis vingt-trois ans, a trois pieds de rayon; la lunette a trois pieds également, & par conséquent l'objectif; mais lorsque M. de la Caille fit faire ce quart-de-cercle, il paroît qu'il avoit fait adapter un petit tuyau au bout de celui de trois pieds, fortement serré avec des vis; en sorte que la longueur de ce tuyau étant de deux pieds, la lunette totale avoit cinq pieds de longueur, comme le dit M. l'abbé de la Caille, dans le volume de l'Académie, *année 1742*.

Or, M. Bouguer a donné dans son Livre *de la figure de la Terre*, un article dans lequel il détaille les inconvéniens auxquels on s'expose en ne donnant pas aux lunettes des instrumens destinés à prendre les hauteurs des Astres, la même longueur exactement que celle du rayon de l'instrument; mais je crois pouvoir faire ici quelques remarques. M. Bouguer, dans ce qu'il dit, ne parle que des secteurs d'un grand rayon, tel qu'étoit le sien, qui avoit douze pieds; & il démontre que si à un pareil instrument qui n'a qu'un très-petit arc, on se contentoit d'appliquer une lunette de quatre pieds seulement de foyer: c'est-à-dire, deux tiers plus petite que le rayon du secteur, on pourroit tomber dans de très-grands inconvéniens; & je crois qu'il a raison: mais je pense que le cas est bien différent ici, c'est un arc de 90 degrés entiers & plus, de trois pieds de rayon seulement, & très-solidement construit dans toutes ses parties, & qui ne peut pas éprouver les flexions d'un secteur de douze pieds de rayon: or, la lunette de mon quart-de-cercle, pour répondre à l'hypothèse de M. Bouguer, auroit dû n'avoir qu'un pied de rayon, elle en avoit cinq, c'est-à-dire deux pieds seulement de plus que n'est le rayon de l'instrument. Il me semble donc que la seule & petite flexion qu'il y

auroit à craindre dans ce cas, seroit celle qui pourroit se faire à la lunette au centre de l'instrument: je laisse maintenant aux Astronomes à juger si l'erreur qui peut résulter des observations de M. l'abbé de la Caille, faites avec cet instrument, doit être bien considérable, & si elle auroit bien influé ici, supposé que j'eusse comparé mes observations aux siennes.

Au surplus, quoique je sois très-persuadé qu'il n'y a de ce côté aucune erreur sensible à soupçonner dans les observations de M. l'abbé de la Caille, j'ai voulu éviter de m'en servir dans ce Mémoire, pour qu'on n'ait rien à m'objecter à ce sujet: M. l'abbé de la Caille a supprimé dans la suite, à son voyage du Cap, ce tuyau excédant de deux pieds le rayon de son quart-de-cercle; & c'est dans cet état-ci qu'il me donna, en 1760, ce quart-de-cercle pour mon voyage, & que je lui remis à la place celui que j'avois eu à la mort de M. Bouguer.



OBSERVATION
DES
HAUTEURS SOLSTICIALES DU SOLEIL.
Au mois de Juin 1782.

Par M. LE GENTIL.

J'AI fait ces Obſervations à l'Obſervatoire royal, dans la tour occidentale, où j'ai fait conſtruire deux cabinets, l'un à la fenêtre qui regarde le ſud-eſt, & l'autre à la fenêtre qui eſt à l'oueſt: j'ai deſtiné ces cabinets principalement pour répéter les obſervations que j'ai faites dans l'Inde avec mon quart-de-cercle, & principalement celle des réfractions horizontales. Mon but aujourd'hui, en obſervant la plus grande hauteur ſolſticiale du Soleil, a été de la comparer à celle que M. de la Caille nous a donnée, faite par cet Académicien, avec le même inſtrument, au collége Mazarin, en 1744 & 1745.

Je rapporterai mes obſervations telles qu'elles ſont conſignées dans mon Regiſtre; elles ſont affectées de la réfraction, & ſur-tout de l'erreur de l'inſtrument, dont je n'aſſignerai point ici la véritable quantité, n'ayant encore point pu vérifier mon quart-de-cercle au Zénith; vérification que je me propoſe d'entreprendre inceſſamment; en attendant, j'ai cru que je pouvois préſenter ces obſervations à l'Académie.

Hauteurs méridiennes du Soleil.

1782. Juin 14	64. 50 + 0,084	=	64^d 51′ 24″
15	64. 50 + 1,109	=	64. 53. 57.
16	64. 50 + 2,116½	=	64. 56. 12. ½
18	64. 50 + 4,055	=	64. 59. 27.
19	64. 50 + 4,112	=	65. 0. 24.
20	64. 50 + 5,024½	=	65. 1. 4.
22	64. 50 + 5,017	=	65. 0. 57.
23	64. 50 + 4,099	=	65. 0. 11.
24	64. 50 + 4,037½	=	64. 59. 9. ½
25	64. 50 + 3,093½	=	64. 57. 57. ½

En comparant l'obſervation du 20 avec celle du 22, comme ayant été les plus voiſines du ſolſtice, & celles où j'ai pris plus de précautions: on a pour la plus grande diſtance apparente du bord du Soleil à l'horizon, au moment du ſolſtice, priſe dans le Méridien, 65ᵈ 1′ 12″3.

OBSERVATION

DE LA

HAUTEUR SOLSTICIALE DU SOLEIL.

Faite à l'Obſervatoire Royal, en Juin 1783.

Par M. LE GENTIL.

LES obſervations ſuivantes des hauteurs méridiennes du Soleil aux environs du ſolſtice, ont été faites dans ma guérite, qui, comme je l'ai dit dans mon Mémoire ſur l'obliquité de l'Écliptique, conclue des obſervations que je fis l'an paſſé dans la tour occidentale de l'Obſervatoire, eſt de 1″2 de degré plus nord, ou plus ſeptentrionale que cette tour. Lû le 6 Sept. 1783.

Je n'ai pas employé cette année moins de précautions que la précédente.

Mon quart-de-cercle ayant été placé fort exactement dans le Méridien, & n'ayant point été dérangé du 16 au 27 de Juin, j'ai obſervé pendant cet intervalle les hauteurs du Soleil lorſque le temps me l'a permis; voici celles qui ont été priſes aux environs du ſolſtice, qui m'ont paru auſſi les plus préciſes:

Le 20, beau temps; mais l'air fort embrumé: le Soleil m'a paru faire des eſpèces de ſauts ou de trémouſſemens fort ſenſibles. Malgré cela, l'Obſervation eſt bonne.

	64ᵈ	50′	5 tours &	20″.
Le 21......	64.	50.	5 tours &	39.

Le 23...... 64^d 50′ 4 tours & 120, *bonne.*

Le 24...... 64. 50. 4 tours & 65, *paſſable.*

Le 25...... 64. 50. 3 tours & 110, *très-bonne.* Grand brouillard hier 24 & aujourd'hui 25, qui m'a paru occaſionner une eſpèce de trémouſſement ou de trépidation dans le bord du Soleil, de 2 à 3 ſecondes; les vents au ſud-eſt calme.

Hauteurs réduites au moment du Solſtice.

Le 20......	65^d 1′ 15″,0.
Le 21......	65. 1. 21,5.
Le 23......	65. 1. 15,0.
Le 24......	65. 1. 19,0.
Le 25......	65. 1. 17,0.
Hauteur moyenne en 1783.............	65. 1. 17,5.
Hauteur moyenne en 1782.............	65. 1. 12,3.
Différence............	0. 0. 5,2.

d'où il réſulte que j'ai trouvé cette année la hauteur ſolſticiale plus grande de 5 ſecondes que l'année dernière; mais comme j'ai déjà prévenu pluſieurs fois que je ne répondois de ces obſervations qu'à 2 à 3 ſecondes près; il ſuffit que l'erreur ait été l'an paſſé dans un ſens, & cette année-ci dans le ſens oppoſé, pour produire la différence que je trouve.

Calcul de l'obliquité de l'Écliptique.

Hauteurs ſolſticiales....................	65^d 1′ 17″,5.
Erreur de l'index....................	0. 0. 0,0.
Demi-épaiſſeur du fil....................	— 0. 6,5.
	65. 1. 11,0.
Erreur du quart-de-cercle..............	0. 6. 55,2.
	64. 54. 15,8.
Réfraction........................	— 0. 24.
	64. 53. 51,8.

Parallaxe	+ 0. 2,9.
	64. 53. 54,7.
Demi-diamètre du Soleil	− 15. 46,5.
	64. 38. 8,2.
	41. 9. 47,2.
Donc obliquité apparente en 1783	23. 28. 21,0.
Obliquité apparente en 1782	23. 28. 15,8.
Différence	0. 0. 5,2.

Cette différence de 5 secondes, que je trouve ici dans l'obliquité de l'Écliptique, dont elle est plus grande cette année que l'année précédente, vient évidemment, comme je l'ai remarqué plus haut, de l'erreur de mes observations; ainsi je pense que cette obliquité pour le commencement de Janvier de cette année est entre 23^d 28′ 15″8 & 23^d 28′ 21″: c'est-à-dire que mon opinion est, d'après mes observations, que l'obliquité apparente de l'Écliptique n'est pas plus petite actuellement que de 23^d 28′ 16 à 17″.

COMPARAISON avec les Observations de M. l'abbé de la Caille, faites au collége Mazarin, avec le même instrument.

QUOIQUE mon intention n'ait point été de comparer ces observations à celles que M. l'abbé de la Caille a faites au Collége Mazarin, avec le même instrument & au même point, il y a quarante ans, & cela par les raisons que j'ai alléguées dans le Mémoire précédent; cependant comme les Astronomes seroient peut-être bien aises de voir tout de suite la différence qu'il peut y avoir entre ma détermination & celle de cet Astronome, je vais rapporter ici ses résultats: en 1744, M. l'abbé de la Caille trouva au Collége Mazarin la hauteur apparente du bord supérieur du Soleil au moment du solstice,

de.	64ᵈ	53′	28″ ½.
& en 1745, de.	64.	53.	28 ½.
ce qui donne pour l'Obſervatoire royal.	64.	54.	43 ½.
ou bien pour l'endroit où j'ai obſervé.	64.	54.	42,3.
or j'ai trouvé en 1782	64.	54.	15,8.
& en 1783	64.	54.	21,0.
La différence feroit donc pour 39 à 40 ans entre	0.	0.	21,3.
&.	0.	0.	26,5.

Ce ſeroit une minute en cent ans, au lieu de 37 ſecondes que nous avons trouvées ci-deſſus. L'obliquité de l'Écliptique ne diminue peut-être pas uniformément; ce dernier réſultat, ſi on l'admettoit, ſembleroit le prouver.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

Par M. DE LA PLACE.

I.

Les mouvemens du centre de gravité de la Terre autour du Soleil, & de la Terre elle-même autour de son centre de gravité, ont été déterminés avec beaucoup de précision, & s'il reste quelque incertitude à cet égard, elle n'a pour objet que des inégalités périodiques dont la petitesse échappe aux observations, ou des inégalités séculaires que la suite des temps peut seule rendre sensibles; mais nous sommes bien loin de connoître avec la même exactitude, la constitution du globe terrestre, c'est-à-dire, sa figure, celle de ses couches, & la loi suivant laquelle leur densité varie du centre à la surface. La Nature oppose à nos recherches sur ce point, des obstacles qu'il nous sera toujours impossible de surmonter: nous sommes ainsi réduits à tirer des phénomènes qui dépendent de la constitution de la Terre, & que nous pouvons observer à sa surface, sinon les vrais élémens de la théorie physique de cette Planète, du moins les limites entre lesquelles ils sont compris. Ces recherches intéressantes par elles-mêmes, sont encore d'une grande utilité en Astronomie; les mouvemens du Soleil & de la Lune donnés par les Tables, sont rapportés au centre de gravité de la Terre; c'est ce point que l'on regarde comme immobile dans la théorie de la Lune, & d'où l'on suppose émaner la force principale qui retient cet Astre dans son orbite; ainsi pour comparer la théorie aux observations, il faut les réduire au centre de gravité de la Terre, ce qui suppose une connoissance au moins fort approchée de la longueur des rayons menés de ce point à sa surface. La Terre étant à très-peu-près sphérique, la variation des

parallaxes, dépendante de sa figure, est inappréciable par rapport au Soleil & aux Planètes; mais elle est sensible relativement à la Lune; elle seroit de plus de 20 secondes, si l'aplatissement de la Terre étoit $\frac{1}{178}$, comme plusieurs Astronomes le supposent. Cette quantité n'est point à négliger, & demande à être déterminée avec soin, dans l'état actuel de l'Astronomie, où les observations sont susceptibles d'une grande précision, & dans un temps où la théorie de la Lune est devenue si importante pour la Navigation & pour la Géographie. Je me propose d'exposer dans ce Mémoire, ce que les observations & la théorie nous apprennent sur la constitution de la Terre, & de déterminer aussi exactement qu'il est possible, la figure que l'on doit supposer à cette Planète, dans le calcul des principaux phénomènes qui en dépendent, tels que la variation de la pesanteur de l'Équateur aux Pôles, les parallaxes, les Éclipses, la précession des équinoxes, & la nutation de l'axe terrestre.

I I.

Des mesures très-multipliées des Degrés du Méridien, & des perpendiculaires à la méridienne, donneroient la loi des rayons osculateurs de la surface de la Terre, & par conséquent la nature de cette surface; mais ce moyen est impraticable par la multiplicité des mesures qu'il exige: d'ailleurs on n'auroit ainsi que les rayons osculateurs des continens & des îles, dont la surface n'est qu'une petite partie de celle du globe terrestre. Les observations seules ne peuvent donc pas nous conduire à la vraie figure de la Terre, & pour y parvenir, il est nécessaire de les combiner avec le principe de la pesanteur universelle.

La Terre étant recouverte en grande partie des eaux de la mer, les conditions de leur équilibre sont les données les plus générales que nous ayons sur la figure de cette Planète; or, les Géomètres ont fait voir qu'en lui supposant la figure d'un Ellipsoïde de révolution très-peu différent

de la Sphère, cet équilibre peut ſubſiſter en vertu de toutes les forces dont elle eſt animée; il ſuffit alors de la meſure de deux Degrés pour déterminer la figure de la Terre, & c'eſt dans cette vue que les voyages célèbres des Aſtronomes françois, vers le Pôle & à l'Équateur, ont été entrepris. A l'obſervation de la meſure des Degrés, ils ont joint l'obſervation non moins importante de la longueur du Pendule à ſecondes. Des meſures ſemblables ont été faites avec un grand ſoin dans pluſieurs parties du Globe, & cela étoit indiſpenſable pour vérifier l'hypothèſe de l'ellipticité de la Terre, qui n'eſt une ſuite néceſſaire de l'équilibre de la mer, que dans le cas où cette Planète eſt homogène. La Théorie elliptique offre encore un moyen de vérifier cette hypothèſe; car alors les loix de la variation de la Peſanteur, & de celle des Degrés, ſont liées entre elles de manière qu'en ajoutant l'ellipticité de la Terre au rapport de la variation totale de la peſanteur à la peſanteur moyenne, la ſomme eſt égale à cinq fois la moitié du rapport de la force centrifuge à la peſanteur, rapport qui, comme l'on ſait, eſt $\frac{1}{289}$. Voyons maintenant ce que l'obſervation nous a fait connoître.

I I I.

Parmi toutes les meſures des degrés du Méridien, nous ne conſidérerons que celles qui ont été faites au Nord, en France, à l'Équateur & au cap de Bonne-eſpérance, & qui, par les ſoins & les noms des Obſervateurs, méritent une entière confiance. Ces meſures ſont compriſes dans la Table ſuivante. *(Coſmographie de M. l'Abbé Ferſi, tome II, page 87).*

	Latitudes.	*Degrés meſurés.*
Équateur	0^d $0'$	56753 toiſes.
Cap de Bonne-eſpérance,	33. 18.	57037.
France	49. 23.	57074.
Nord	66. 20.	57405.

Suppoſons que les erreurs de ces meſures ſoient exprimées

respectivement par les nombres de toises x, x^{I}, x^{II}, x^{III}; si l'on nomme θ la latitude, & $\frac{\frac{1}{2}y}{56753}$ l'ellipticité de la Terre, ou, ce qui revient au même, la différence de ses axes, celui du Pôle étant pris pour l'unité; l'expression générale en toises, du degré du Méridien, sera à très-peu-près, dans l'hypothèse elliptique,

$$56753 + x + y \cdot \sin. \theta^2.$$

Si l'on compare la première des quatre mesures précédentes, successivement avec la seconde, la troisième & la quatrième, on aura les trois expressions suivantes de y,

$$y = 942{,}19 + (x^{I} - x) \cdot 3{,}3176;$$
$$y = 557{,}09 + (x^{II} - x) \cdot 1{,}7355;$$
$$y = 777{,}24 + (x^{III} - x) \cdot 1{,}1921.$$

S'il n'y avoit point d'erreur sensible dans les mesures, les grandes différences de ces trois valeurs de y, indiqueroient évidemment que la Terre n'est point un ellipsoïde de révolution; mais avant que de rejeter cette figure, il faut examiner si les erreurs que l'on doit supposer aux observations, sont au-dessus de celles que comportent ces observations, ce qui se réduit à déterminer le système des valeurs de x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, qui satisfaisant aux trois équations précédentes, donne, abstraction faite du signe, la plus petite valeur possible à la plus grande de ces quantités. C'est une question de *minimis*, d'un genre particulier, & dont la solution est utile dans toutes les circonstances où il s'agit de voir si les résultats d'une hypothèse sont dans les limites des erreurs dont les observations sont susceptibles; on peut la résoudre par la méthode suivante.

Les trois équations précédentes donnent, en retranchant la seconde successivement de la première & de la troisième,

$$0 = 385{,}10 - x^{II} \cdot 1{,}7355 + x^{I} \cdot 3{,}3176 - x \cdot 1{,}5821;$$
$$0 = 220{,}15 + x^{III} \cdot 1{,}1921 - x^{II} \cdot 1{,}7355 + x \cdot 0{,}5434.$$

Suppoſons d'abord que l'on n'ait entre un nombre quelconque d'indéterminées x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. qu'une ſeule équation du premier degré, que nous repréſenterons par celle-ci,

$$a = mx + nx^{\text{I}} + px^{\text{II}} + \&c.$$

a étant poſitif.

On aura le ſyſtème des valeurs de x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. qui donne, abſtraction faite du ſigne, la plus petite valeur poſſible à la plus grande de ces quantités, en les ſuppoſant, au ſigne près, toutes égales entr'elles, & au quotient de a diviſé par la ſomme des coéfficiens m, n, p, &c. pris poſitivement; quant au ſigne que chaque quantité doit avoir, il doit être le même que celui du coéfficient de cette quantité, dans l'équation propoſée.

Si l'on a deux équations entre ces indéterminées, le ſyſtème qui donnera la plus petite valeur poſſible à la plus grande, ſera tel, qu'abſtraction faite du ſigne, toutes ces indéterminées ſeront égales entr'elles, à l'exception d'une ſeule qui ſera plus petite que les autres, ou du moins qui ne les ſurpaſſera pas. En ſuppoſant donc que x ſoit cette quantité, on la déterminera en fonction de x^{I}, x^{II}, &c. au moyen de l'une des équations propoſées; en ſubſtituant enſuite cette valeur de x, dans l'autre équation, on en formera une entre x^{I}, x^{II}, &c. Repréſentons-là par la ſuivante,

$$a = nx^{\text{I}} + px^{\text{II}} + \&c.$$

a étant poſitif; on en tirera, comme ci-deſſus, les valeurs de x^{I}, x^{II}, &c. en diviſant a par la ſomme des coéfficiens n, p, &c. pris poſitivement, & en donnant ſucceſſivement au quotient, les ſignes de n, p, &c. Ces valeurs ſubſtituées dans l'expreſſion de x en x^{I}, x^{II}, &c. donneront la valeur de x; & ſi cette valeur, abſtraction faite du ſigne, n'eſt pas plus grande que celles de x^{I}, x^{II}, &c. ce ſyſtème de valeurs ſera celui qu'il faut adopter; mais ſi elle eſt plus grande, il faudra opérer ſucceſſivement ſur x^{I}, x^{II}, &c. comme on vient de le preſcrire relativement à x, & l'on

arrivera infailliblement au fyftème cherché. Il eft facile d'étendre cette méthode, au cas où l'on auroit trois ou un plus grand nombre d'équations entre les indéterminées x, x^{I}, x^{II}, &c.

En l'appliquant aux équations précédentes, on trouve

$$x = 2^{\text{toifes}},04;\ x^{\text{I}} = -\ 75^{\text{toifes}},57;$$
$$x^{\text{II}} = 75^{\text{toifes}},57;\ x^{\text{III}} = -\ 75^{\text{toifes}},57;$$

d'où l'on tire $y = 684^{\text{toifes}},4$; c'eft la différence des deux degrés du Pôle & de l'Équateur. Suivant cette valeur de y, les deux axes du Pôle & de l'Équateur, font à très-peu-près dans le rapport de 249 à 250, & l'on eft affuré que tout autre rapport donneroit dans quelques-unes des quatre mefures précédentes, une erreur au-deffus de $75^{\text{toifes}}\frac{1}{2}$.

Une erreur de $75^{\text{toifes}}\frac{1}{2}$, eft peu vraifemblable; il eft moins vraifemblable encore qu'elle fe rencontre à la fois dans les trois mefures du Nord, de France & du cap de Bonne-efpérance: d'ailleurs le cas qui ne donne que $75^{\text{toifes}}\frac{1}{2}$ d'erreur, étant une limite, il eft infiniment peu probable. Enfin, on trouveroit de plus grandes erreurs, fi l'on faifoit ufage des autres mefures des degrés terreftres; car en adoptant les valeurs précédentes de x & de y, le degré correfpondant à la latitude de $39^{d}\ 12'$, & calculé d'après l'expreffion du degré terreftre $56753 + x + y \cdot \text{fin.}\ \theta^2$, feroit de $57028^{\text{toifes}},55$: le degré mefuré à cette latitude en Penfilvanie, a été trouvé de 56888^{toifes}, moindre que le précédent de $140^{\text{toifes}},55$; & il eft vifible que l'on ne peut diminuer cette erreur, qu'en augmentant celles des autres mefures.

De-là nous pouvons conclure que l'hypothèfe d'une figure elliptique ne peut pas fe concilier avec les obfervations de la mefure des degrés terreftres, & que la Terre s'écarte fenfiblement de cette figure; de plus, il eft fort probable qu'elle n'eft pas formée de deux parties femblables de chaque côté de l'Équateur; car le degré mefuré au cap de Bonne-efpérance, eft prefque égal au degré de Paris, quoique les latitudes de ces deux lieux foient différentes; & il furpaffe

de 149 toiſes, le degré de Penſilvanie, qui cependant eſt plus voiſin du Pôle d'environ ſix degrés; ce qui ſemble indiquer que la Terre eſt plus aplatie vers le Pôle auſtral, que vers le Pôle boréal. On peut même ſoupçonner, d'après ces meſures, que la Terre n'eſt pas un ſolide de révolution; mais les erreurs dont elles ſont ſuſceptibles, ne permettent pas de prononcer ſur cet objet.

I V.

Les variations obſervées dans la longueur du pendule à ſecondes, ſuivent une marche bien plus régulière que les variations des degrés des méridiens; elles s'éloignent fort peu de la loi du carré du ſinus de la latitude, & la formule ſuivante les repréſente à un dixième de ligne près, c'eſt-à-dire, avec toute l'exactitude qu'elles comportent:

Longueur du pendule à ſecondes $= 439^{\text{lignes}},30 + 2^{\text{lignes}},438 . \sin \theta^2$.

On peut facilement s'en convaincre par l'inſpection de la Table ſuivante,

Latitude.		*Longueur obſervée du pendule à ſecondes.*	*Longueur calculée par la formule précédente.*	*Erreur de la formule.*
0^d	0	$439^{\text{lig.}},21$	$439^{\text{lig.}},30$	$0^{\text{lig.}},09$.
9.	34′	439,30	439,37	0,07.
18.	27	439,47	439,54	0,07.
33.	18	440,14	440,04 ...	— 0,10.
41.	54	440,38	440,39	0,01.
48.	12	440,56	440,65	0,09.
48.	50	440,67	440,68	0,01.
51.	31	440,75	440,79	0,04.
59.	56	441,23	441,13 ...	— 0,10.
66.	48	441,27	441,36	0,09.

V.

La longueur moyenne du pendule à ſecondes, eſt, ſuivant la formule précédente, de $440^{\text{lignes}},52$; & la variation totale

de la pesanteur est de $2^{lignes},438$: les longueurs du pendule étant proportionnelles aux pesanteurs, le rapport de la variation totale de la pesanteur, à la pesanteur moyenne, sera $\frac{2,438}{440,52}$, ou 0,0055344. Nous avons observé *(article II)* que si la Terre est elliptique, le rapport précédent ajouté à l'ellipticité de la Terre, est égal à $\frac{\frac{5}{2}}{289}$, ou à 0,0086505; en retranchant donc 0,0055344 de ce dernier nombre, on aura 0,0031161, pour l'ellipticité de la Terre, tirée de la variation de la pesanteur, ce qui donne les deux axes de la Terre, dans le rapport de 320 à 321. Ce rapport diffère trop de celui de 249 à 250, qui, par l'*article III*, approche le plus de satisfaire aux mesures des degrés, pour que cette différence puisse être attribuée aux erreurs des observations; ainsi, les deux moyens qui doivent servir à vérifier l'hypothèse elliptique, savoir, la mesure de plusieurs degrés, & la variation observée de la pesanteur, se réunissent pour exclure cette hypothèse: mais il est très-remarquable que tandis que les variations des degrés s'écartent sensiblement de la loi du carré du sinus de la latitude, cette loi représente à très-peu-près les variations de la pesanteur. Ce phénomène est un des points les plus importans de la théorie de la Terre; en le combinant avec les conditions de l'équilibre de la mer, nous allons en voir naître la loi de la variation des rayons terrestres.

VI.

Pour cela il est nécessaire de considérer la figure de la Terre avec la plus grande généralité, sans s'astreindre à aucune hypothèse sur la figure & sur la densité de ses couches, en supposant uniquement qu'elle est peu différente d'une sphère, & que le fluide qui la recouvre est en équilibre: c'est ainsi que j'ai envisagé la figure des Planètes, dans l'Ouvrage que j'ai publié sur cette matière, dans le volume de nos Mémoires pour l'année 1782; j'y suis parvenu à des formules générales & simples

ſimples ſur les attractions des ſphéroïdes quelconques peu différens de la ſphère, & j'en ai tiré les loix de la variation des rayons & de la peſanteur à leur ſurface, qui réſultent de l'équilibre du fluide dont on les ſuppoſe recouvertes, quelles que ſoient d'ailleurs les forces qui l'animent: ces formules appliquées à la Terre, donnent les réſultats ſuivans.

Soit θ, l'angle que forme un rayon quelconque d'une couche du ſphéroïde terreſtre, avec l'axe de rotation; ϖ l'angle que forme le plan qui paſſe par ces deux lignes, avec un plan invariable paſſant par l'axe de rotation: ſoit $a.(1 + \alpha y)$, le rayon mené du centre de gravité de la Terre, à la ſurface de cette couche, α étant un très-petit coéfficient, & y étant une fonction de μ & de ϖ; ſuppoſons que cette fonction ſoit miſe ſous la forme ſuivante,

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \&c.$$

$Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, &c. étant des fonctions rationnelles & entières de μ, $\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi$, $\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi$, d'un ordre égal à l'indice de ces fonctions, & qui ſoient telles que la fonction $Y^{(i)}$, ſatisfaſſe, quel que ſoit i, à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{\frac{\partial\{(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right]\}}{\partial\mu}\right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu} + i.(i + 1.Y^{(i)},$$

Soit enfin ρ la denſité de la couche, ρ étant fonction de a; & nommons $\alpha\,\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur; les conditions de l'équilibre donnent à la ſurface, les équations ſuivantes:

$$0 = Y^{(0)}.\int\rho.\partial.a^3 - 3.\int\rho.\partial\,[a^3\,Y^{(0)}] - \tfrac{1}{3}\,\varphi\int\rho.\partial.a^3;$$

$$0 = Y^{(1)}.\int\rho.\partial.a^3 - \int\rho.\partial\,[a^4\,Y^{(1)}];$$

$$0 = Y^{(2)}.\int\rho.\partial.a^3 - \tfrac{3}{5}.\int\rho.\partial\,[a^5\,Y^{(2)}] + \tfrac{1}{2}\,\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3})\int\rho.\partial.a^3;$$

....

$$0 = Y^{(i)}.\int\rho.\partial.a^3 - \frac{3}{2i+1}\int\rho.\partial\,[a^{i+3}.Y^{(i)}];$$

les différentielles & les intégrales étant relatives à la variable a, & les intégrales étant prises depuis $a = 0$, jusqu'à la valeur de a à la surface, valeur que nous désignerons par l'unité.

La propriété du centre de gravité où nous fixons l'origine des rayons, donne les trois équations suivantes, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$0 = \int\int\int \rho\mu . \partial\mu . \partial\varpi . \partial . a^4 (1 + 4\alpha y);$$
$$0 = \int\int\int \rho . \partial\mu . \partial\varpi . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{cos.} \varpi . \partial . a^4 (1 + 4\alpha y);$$
$$0 = \int\int\int \rho . \partial\mu . \partial\varpi . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{sin.} \varpi . \partial . a^4 (1 + 4\alpha y).$$

les troisièmes différentielles étant relatives à la variable a, & les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$, depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360^d$; ces trois équations donneront ainsi, en y substituant au lieu de y, sa valeur $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ &c.

$$0 = \int\int\int \rho\mu . \partial\mu . \partial\varpi \times \partial . [a^4 . Y^{(0)} + a^4 . Y^{(1)} + a^4 . Y^{(2)} + \&c.]$$
$$0 = \int\int\int \rho . \partial\mu . \partial\varpi . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{cos.} \varpi \times \partial . [a^4 . Y^{(0)} + a^4 . Y^{(1)} + a^4 . Y^{(2)} + \&c.]$$
$$0 = \int\int\int \rho . \partial\mu . \partial\varpi . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{sin.} \varpi \times \partial . [a^4 . Y^{(0)} + a^4 . Y^{(1)} + a^4 . Y^{(2)} + \&c.].$$

Pour exécuter ces intégrations, je vais rappeler ici un théorème général que j'ai démontré dans l'ouvrage cité.

Si $Y^{(i)}$ & $U^{(i')}$ sont deux fonctions rationnelles & entières de μ, $\sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{cos.} \varpi$, & $\sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{sin.} \varpi$, qui satisfont aux équations à différences partielles,

$$0 = \left\{ \frac{\partial \left\{ (1 - \mu\mu) . \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right] \right\}}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2} \right]}{1 - \mu\mu} + i . (i + 1) . Y^{(i)},$$

$$0 = \left\{ \frac{\partial \left\{ (1 - \mu\mu) . \left[\frac{\partial U^{(i')}}{\partial \mu} \right] \right\}}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial U^{(i')}}{\partial \varpi^2} \right]}{1 - \mu\mu} + i' . (i' + 1) . U^{(i')};$$

on aura lorsque les nombres i & i' sont différens,

$$o = \int\int Y^{(i)} . U^{(i')} . \partial \mu . \partial \varpi,$$

les intégrales étant prises depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360$ degrés.

Il suit de-là que, μ, $\sqrt{(1-\mu^2)} . \text{cos}. \varpi$, & $\sqrt{(1-\mu^2)} . \text{sin}. \varpi$, étant de la forme $U^{(1)}$, les trois équations précédentes deviennent

$$o = \int\int\int \rho \, \partial \mu . \partial \varpi . \partial . [a^4 . Y^{(1)}];$$
$$o = \int\int\int \rho \, \partial \mu . \partial \varpi . \sqrt{(1-\mu^2)} . \text{cos}. \varpi . \partial . [a^4 . Y^{(1)}];$$
$$o = \int\int\int \rho \, \partial \mu . \partial \varpi . \sqrt{(1-\mu^2)} . \text{sin}. \varpi . \partial . [a^4 . Y^{(1)}].$$

Ces intégrales paroissent supposer la connoissance de $Y^{(1)}$, dans l'intérieur du sphéroïde; mais on peut, au moyen des équations précédentes de l'équilibre, les ramener à ne dépendre que de la valeur de $Y^{(1)}$, à la surface extérieure; en effet la seconde de ces équations donne

$$\int \rho . \partial . [a^4 \, Y^{(1)}] = Y^{(1)} . \int \rho . \partial . a^5,$$

la valeur de $Y^{(1)}$ dans ce second membre étant relative à la surface extérieure; on aura donc

$$o = \int\int \mu \, \partial \mu . \partial \varpi . Y^{(1)}$$
$$o = \int\int \partial \mu . \partial \varpi . \sqrt{(1-\mu^2)} . \text{cos}. \varpi . Y^{(1)};$$
$$o = \int\int \partial \mu . \partial \varpi . \sqrt{(1-\mu^2)} . \text{sin}. \varpi . Y^{(1)}.$$

$Y^{(1)}$ est de cette forme

$$H . \mu + H' . \sqrt{(1-\mu^2)} . \text{cos}. \varpi + H'' . \sqrt{(1-\mu^2)} \, \text{sin}. \varpi;$$

en substituant cette valeur dans ces trois équations, on aura $H = 0$, $H' = 0$, $H'' = 0$, partant $Y^{(1)} = 0$. On voit ainsi que si l'origine des rayons est au centre de gravité du sphéroïde, le rayon à la surface extérieure sera

$$1 + \alpha . [Y^{(0)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \&c.];$$

& comme $\alpha\, Y^{(0)}$ eſt une conſtante, on pourra la ſuppoſer compriſe dans la conſtante a que nous avons priſe pour l'unité, ce qui donne à l'expreſſion du rayon à la ſurface, cette forme plus ſimple,

$$1 + \alpha . \{ Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c. \}$$

VII.

L'ÉQUILIBRE permanent du globe terreſtre peut nous éclairer encore ſur la nature des rayons menés de ſon centre de gravité, à ſa ſurface. Si cette Planète ne tournoit pas exactement, ou du moins à très-peu-près, autour d'un de ſes trois axes principaux ; il en réſulteroit dans la poſition de ſon axe de rotation, des oſcillations qui deviendroient ſenſibles par les changemens de la hauteur du Pôle; & comme les obſervations les plus préciſes n'en ſont apercevoir aucun, nous devons en conclure que depuis long-temps, toutes les parties de la Terre, & principalement les parties fluides de ſa ſurface, ſe ſont diſpoſées de manière à rendre ſtable, l'axe de la Terre, & par conſéquent leur état d'équilibre. Il eſt en effet très-naturel de penſer qu'après un grand nombre d'oſcillations, elles ont dû ſe fixer à cet état, en vertu des réſiſtances en tout genre qu'elles éprouvent; voyons maintenant la condition qui en réſulte dans l'expreſſion du rayon terreſtre.

Si l'on nomme $x^{\prime}$, $y^{\prime}$, $z^{\prime}$, les coordonnées d'une molécule ∂M de la Terre, ſes trois axes principaux étant ceux même des coordonnées dont nous fixons l'origine à ſon centre de gravité; on aura par la propriété de ces axes,

$$0 = \int x^{\prime} y^{\prime} . \partial M; \quad 0 = \int x^{\prime} . z^{\prime} . \partial M; \quad 0 = \int y^{\prime} z^{\prime} . \partial M;$$

mais $a . (1 + \alpha y)$ étant le rayon d'une couche terreſtre, on a

$$x^{\prime} = a . (1 + \alpha y) . \mu ;$$
$$y^{\prime} = a . (1 + \alpha y) . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{coſ.}\, \varpi ;$$
$$z^{\prime} = a . (1 + \alpha y) . \sqrt{(1 - \mu^2)} . \text{ſin.}\, \varpi ;$$

d'ailleurs,

$$\partial M = -\tfrac{1}{3}.\rho.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^3(1+\alpha y)^3;$$

on aura donc

$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho\,\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y);$$
$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho\,\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y);$$
$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho\,(1-\mu^2).\text{fin.}\,2\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y);$$

les dernières différentielles étant relatives à la variable a, & les intégrales étant prifes depuis $a = 0$ jufqu'à $a = 1$; depuis $\mu = 1$ jufqu'à $\mu = -1$; & depuis $\varpi = 0$ jufqu'à $\varpi = 360$ degrés.

Les quantités

$$\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi;\ \mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi;$$
$$(1-\mu^2).\text{fin.}\,2\varpi,$$

font comprifes dans la forme $U^{(2)}$; en fubftituant donc au lieu de y, fa valeur $Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} +$ &c. les trois équations précédentes fe réduiront aux fuivantes, en vertu du théorème énoncé ci-deffus,

$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho.\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.[a^5.Y^{(2)}];$$
$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho.\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.[a^5.Y^{(2)}];$$
$$0 = \int\!\!\int\!\!\int \rho.(1-\mu^2).\text{fin.}\,2\varpi.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.[a^5.Y^{(2)}].$$

On peut exécuter les intégrations relatives à la variable a, au moyen des équations précédentes de l'équilibre, qui donnent

$$\int\rho.\partial.(a^5\,Y^{(2)}) = \tfrac{5}{3}.Y^{(2)}.\int\rho.\partial.a^3 + \tfrac{5}{6}.\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).\int\rho.\partial.a^3,$$

la valeur de $Y^{(2)}$ du fecond membre de cette équation étant relative à la furface; on aura ainfi

$$0 = \int\!\!\int \partial\mu.\partial\varpi.Y^{(2)}.\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi;$$
$$0 = \int\!\!\int \partial\mu.\partial\varpi.Y^{(2)}.\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi;$$
$$0 = \int\!\!\int \partial\mu.\partial\varpi.Y^{(2)}.(1-\mu^2).\text{fin.}\,2\varpi.$$

Ces équations sont indépendantes de la constitution intérieure de la Terre, & se rapportent uniquement à sa surface. La valeur de $Y^{(2)}$ est de cette forme,

$$H.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + H^{I}.\mu.\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{sin.}\,\varpi + H^{II}.\mu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cos.}\,\varpi + H^{III}.(1-\mu^2).\text{sin.}\,2\varpi + H^{IV}.(1 - \mu^2).\text{cos.}\,2\varpi;$$

en la substituant dans les équations précédentes, on aura

$$H^{I} = 0, \; H^{II} = 0, \; H^{III} = 0,$$

ce qui réduit $Y^{(2)}$ à cette forme,

$$H.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + H^{IV}.(1 - \mu^2).\text{cos.}\,2\varpi.$$

Telle est la condition qui résulte de la supposition que la Terre tourne autour d'un de ses axes principaux; mais les constantes H, H^{IV}, & les fonctions $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. restent indéterminées. Voyons ce que les autres phénomènes dépendans de la figure de la Terre, nous apprennent sur leur nature.

VIII.

J'AI fait voir dans l'Ouvrage cité, que les trois expressions du rayon terrestre, de la longueur du pendule à secondes, & du degré du Méridien, étoient liées entr'elles de la manière suivante.

$$1 + \alpha.[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} \ldots + Y^{(i)} + \text{\&c.}]$$

étant l'expression du rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa surface; si l'on nomme l la longueur du pendule à secondes, on aura

$$l = L + \alpha L.[Y^{(2)} + 2Y^{(3)} + 3Y^{(4)} \ldots + (i-1).Y^{(i)} + \text{\&c.}] + \tfrac{5}{2}.\alpha L.\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

L étant une constante que l'on déterminera par l'observation.

Si l'on nomme enſuite, c le degré d'un cercle dont le rayon eſt ce que nous avons pris pour l'unité ; l'expreſſion générale du degré du Méridien ſera

$$c - 6\alpha c.Y^{(2)} - 12.\alpha c.Y^{(3)} \ldots - i.(i+1).\alpha c.Y^{(i)} - \&c.$$
$$+ \alpha c.\partial.\frac{\{\mu.Y^{(2)} + \mu.Y^{(3)} \ldots\ldots + \mu.Y^{(i)} + \&c.\}}{\partial\mu}$$
$$- \alpha c.\frac{\left\{\partial\partial.\frac{[Y^{(2)} + Y^{(3)} \ldots\ldots\ldots + Y^{(i)}]}{\partial\varpi^2}\right\}}{1-\mu\mu}.$$

Nous avons vu dans l'*article IV*, que les obſervations ſur la longueur du pendule à ſecondes, donnent à très-peu-près,

$$l = 439^{\text{lignes}},30 + 2^{\text{lignes}},438.\mu^2,$$

ou ce qui revient au même,

$$l = 440^{\text{lignes}},113 + 2^{\text{lignes}},438.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

En comparant cette expreſſion de l à la précédente, on voit 1.° que la quantité

$$\alpha L.[2Y^{(3)} + 3.Y^{(4)} \ldots + (i-1).Y^{(i)} + \&c.]$$

eſt inſenſible relativement à la quantité

$$\alpha L.Y^{(2)} + \tfrac{5}{2}\alpha L.\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

d'où il ſuit qu'à plus forte raiſon, dans l'expreſſion du rayon terreſtre, la quantité

$$\alpha.[Y^{(3)} + Y^{(4)} \ldots\ldots + Y^{(i)} + \&c.]$$

eſt inſenſible relativement au terme $\alpha Y^{(2)}$; 2.° que l'on a à très-peu-près,

$$L = 440^{\text{lignes}},113,$$

$$\alpha L.Y^{(2)} + \tfrac{5}{2}\alpha L.\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) = 2^{\text{lignes}},438.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

L'obſervation donne $\alpha\varphi = \frac{1}{289}$, & par conſéquent

$\frac{5}{2}\alpha\varphi = 0,0086505$; on aura donc

$$\alpha Y^{(2)} = -0,003111.(\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

en ſorte que le rayon du ſphéroïde terreſtre eſt à très-peu-près

$$1 - 0,003111.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Ce rayon eſt celui de l'ellipſoïde de révolution, dans lequel les deux axes ſont dans le rapport de 320 à 321; on peut ainſi calculer les variations des rayons terreſtres & de la peſanteur, dans la ſuppoſition où la figure de la Terre ſeroit celle d'un ſemblable ellipſoïde.

Les obſervations de la longueur du pendule repandent, comme l'on voit, un grand jour ſur la nature des rayons terreſtres; elles font voir, non-ſeulement que dans la fonction $Y^{(2)}$ qui, par l'*article précédent*, ſe réduit à cette forme, $H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H^{IV}.(1 - \mu\mu).\text{coſ.}\,2\varpi$, le coéfficient H^{IV} eſt très-petit relativement à H; mais encore, que les termes $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. ſont inſenſibles relativement à $Y^{(2)}$, en les multipliant même par leurs indices reſpectifs, 3, 4, &c.

I X.

Si ces termes étoient nuls, la variation des degrés du Méridien, ſuivroit, comme celle de la peſanteur, la loi du carré du ſinus de la latitude; mais puiſque cette loi ne peut (*article III*) ſe concilier avec les obſervations, il en faut conclure que les fonctions $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. qui ſont inſenſibles dans les expreſſions du rayon terreſtre & de la peſanteur, ne ſont cependant pas nulles, & qu'elles deviennent ſenſibles dans l'expreſſion des degrés des Méridiens. Cela peut avoir lieu d'une infinité de manières; ſi l'on ſuppoſe, par exemple, que

$$1 + \alpha H.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \alpha Y^{(i)}$$

ſoit l'expreſſion du rayon terreſtre; l'expreſſion de la longeur l du pendule à ſecondes, ſera par l'*article précédent*,

$$l = L.\{1 + \alpha(H + \tfrac{5}{2}\varphi).(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + (i-1).\alpha Y^{(i)}\};$$

&

& l'expreſſion du degré du Méridien ſera

$$c + \frac{2}{3}\alpha c.H - 3\alpha c.H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) - i.(i+1).\alpha c.Y^{(i)}$$

$$+ \alpha c.\frac{\partial.[\mu Y^{(i)}]}{\partial \mu} - \alpha c.\frac{\frac{[\partial \partial Y^{(i)}]}{\partial \varpi^2}}{1-\mu\mu}.$$

Nommons λ le rapport du terme $\alpha Y^{(i)}$ qui écarte l'expreſſion du rayon terreſtre de la loi du carré du ſinus de la latitude, au terme $\alpha H.(\mu^2 - \frac{1}{3})$; il eſt aiſé de voir par l'*article précédent*, que $H + \frac{5}{2}\varphi$, eſt à peu-près, $-\frac{7}{4}.H$, & qu'ainſi le rapport du terme $(i-1).\alpha.L.Y^{(i)}$, au terme $\alpha L.(H + \frac{5}{2}\varphi).(\mu^2 - \frac{1}{3})$, dans l'expreſſion de la longueur du pendule, eſt à peu-près, $-\frac{4}{7}.(i-1).\lambda$.

Le rapport du terme $-i.(i+1).\alpha c.Y^{(i)}$, de l'expreſſion du degré du Méridien, au terme $-3\alpha c.H.(\mu^2 - \frac{1}{3})$, eſt $\frac{i.(i+1)}{3}.\lambda$, & il eſt poſſible par la manière dont la longitude ϖ entre dans la fonction $Y^{(i)}$, que la quantité entière

$$-i.(i+1).\alpha c.Y^{(i)} + \alpha c.\frac{\partial.[\mu Y^{(i)}]}{\partial \mu} - \alpha c.\frac{\frac{[\partial \partial Y^{(i)}]}{\partial \varpi^2}}{1-\mu\mu}.$$

qui écarte la variation des degrés, de la loi du carré du ſinus de la latitude, ait un plus grand rapport au terme $-3\alpha c.H.(\mu^2 - \frac{1}{3})$.

Maintenant, ſi l'on ſuppoſe que les nombres λ, $-\frac{4}{7} \times (i-1).\lambda$, & $\frac{i.(i+1)}{3}.\lambda$, expriment les rapports des quantités qui éloignent les expreſſions du rayon, de la longueur du pendule & du degré du Méridien, de la loi du carré du ſinus de la latitude, aux termes qui ſuivent cette loi dans ces expreſſions; il eſt viſible que pour rendre λ, & $-\frac{4}{7}.(i-1).\lambda$, peu ſenſibles relativement à $\frac{i.(i+1)}{3}.\lambda$,

il ſuffit de prendre i égal ou plus grand que 6; car en le ſuppoſant, par exemple, égal à 6, les trois nombres précédens deviendront, λ, $-\frac{20}{7}.\lambda$, $14.\lambda$; c'eſt-à-dire, que les variations des degrés s'écarteront environ cinq fois plus de la loi du carré du ſinus de la latitude, que celles de la peſanteur, ce qui eſt plus que ſuffiſant pour ſatisfaire aux obſervations.

Il faudroit un grand nombre de meſures des degrés, faites avec beaucoup de préciſion, pour déterminer la nature des fonctions $Y^{(i)}$, $Y^{(i+1)}$ &c. mais il nous ſuffit ici d'avoir expliqué pourquoi les variations de la peſanteur ſuivent à très-peu-près la loi du carré du ſinus de la latitude, tandis que les variations des degrés s'en écartent d'une manière ſenſible: ce phénomène remarquable tient à ce que les termes de l'expreſſion du rayon, qui s'écartent de cette loi, ſont différenciées une ſeule fois dans l'expreſſion de la peſanteur, & ſubiſſent deux différentiations dans l'expreſſion du degré du Méridien; & il arrive que ces termes peu ſenſibles en eux-mêmes & par une première différentiation, deviennent ſenſibles par une ſeconde différentiation.

Nous voilà donc conduits à ce réſultat intéreſſant; ſavoir, que dans toutes les recherches où l'on ne fait uſage que des rayons terreſtres & de leurs premières différences, on peut ſans erreur ſenſible, ſuppoſer que la Terre eſt un ellipſoïde de révolution dont les axes ſont dans le rapport de 320 à 321; que cette hypothèſe eſt fort approchée relativement aux rayons terreſtres; qu'elle l'eſt un peu moins, relativement à leurs premières différences; que cependant l'erreur eſt preſque inſenſible: mais que leurs ſecondes différences s'écartent ſenſiblement de celles qui réſultent de cette hypothèſe, & que c'eſt la raiſon pour laquelle les degrés du Méridien qui ſont donnés par les ſecondes différences des rayons terreſtres, s'éloignent de la loi du carré du ſinus de la latitude.

X.

La théorie des parallaxes ne dépend que des rayons

terreſtres & de leurs premières différences : ſi l'on nomme v, la hauteur d'un Aſtre au-deſſus de l'horizon ; s, ſa diſtance au centre de gravité de la Terre ; $1 + \alpha y$, le rayon mené de ce centre à l'obſervateur, α étant un très-petit coéfficient, & y étant une fonction quelconque de la longitude & de la latitude ; ſi l'on repréſente enſuite par γ, la parallaxe, & par ∂q, l'élément de la courbe que forme l'interſection de la ſurface du ſphéroïde terreſtre, par le vertical de l'Aſtre ; il eſt facile de s'aſſurer qu'en négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$\text{ſin.}\, \gamma = \frac{(1 + \alpha y)}{s} \cdot \text{coſ.}\, v + \alpha \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) . \text{ſin.}\, v}{s} ;$$

∂y étant la différence des valeurs de y correſpondantes aux extrémités de l'arc ∂q.

Si la parallaxe eſt horizontale, $v = 90^d$, & dans ce cas $\text{ſin.}\, \gamma = \frac{1 + \alpha y}{s}$; les parallaxes horizontales ne dépendent donc que des rayons terreſtres ; mais les autres parallaxes dépendent encore des premières différences de ces rayons.

De-là & de l'*article précédent*, il ſuit que l'on peut calculer ſans erreur ſenſible, les Éclipſes, & tous les phénomènes dépendans des parallaxes, dans la ſuppoſition où la Terre eſt un ellipſoïde de révolution dont les axes ſont dans le rapport de 320 à 321 ; quant à la manière de faire entrer l'ellipticité de la Terre dans le calcul de ces phénomènes, la méthode dont M. du Séjour a fait uſage dans ſes ſavans Mémoires ſur les Éclipſes, me paroît être la plus directe, la plus générale & la plus ſimple que l'on puiſſe deſirer.

X I.

Le phénomène le plus remarquable qui dépende de la figure & de la conſtitution de la Terre, eſt celui de la préceſſion des Équinoxes, & de la nutation de l'axe terreſtre ; il eſt d'autant plus important d'examiner comment il ſe lie avec les

déterminations précédentes, qu'il eſt incompatible avec l'ellipticité $\frac{1}{178}$ que l'on a ſuppoſée à la Terre, d'après les meſures des degrés de France & du Nord. Dans ſon bel Ouvrage ſur la préceſſion des Équinoxes, M. d'Alembert a obſervé que quelques hypothèſes que l'on faſſe ſur la denſité des couches terreſtres ſuppoſées elliptiques, il eſt impoſſible de concilier l'ellipticité $\frac{1}{178}$ à la ſurface, avec les quantités obſervées de la préceſſion & de la nutation : ce grand Géomètre n'a pas cru cependant devoir abandonner l'hypothèſe de l'ellipticité de la Terre; mais il penſe que cette Planète étant recouverte en grande partie par la mer, ce fluide ne peut pas, à raiſon de ſa mobilité, influer ſur la préceſſion & la nutation; & qu'ainſi, dans le calcul de ces phénomènes, on ne doit tenir compte que de l'action du Soleil & de la Lune ſur le noyau ſolide que la mer recouvre. On peut former alors ſur l'aplatiſſement de ce noyau, une infinité d'hypothèſes qui concilient les quantités obſervées de la préceſſion & de la nutation, avec l'ellipticité $\frac{1}{178}$ à la ſurface de la mer; mais ayant déterminé avec ſoin les oſcillations de la mer, & ſa réaction ſur le noyau terreſtre, j'ai fait voir qu'il ne falloit pas la négliger dans la théorie de la préceſſion & de la nutation; que les quantités de ces deux mouvemens ſont exactement les mêmes que ſi la mer formoit une maſſe ſolide avec la Terre, & que cela eſt généralement vrai, quelles que ſoient la figure de la Terre & la loi de la profondeur de la mer. On voit ainſi que la difficulté élevée par M. d'Alembert, contre l'ellipticité de la Terre, ſubſiſte en entier, & que pour la réſoudre, il faut néceſſairement rejeter l'hypothèſe elliptique dans le calcul des degrés des Méridiens, ce qui vient à l'appui de ce que nous avons dit ſur cet objet dans l'*article III*. Voyons maintenant ſi l'expreſſion du rayon terreſtre

$$1 - 0{,}003111.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \alpha Y^{(3)} + \alpha Y^{(4)} + \&c.$$

qui par l'*article VIII*, résulte des observations de la longueur du pendule, satisfait aux phénomènes de la précession & de la nutation. Sans se donner la peine de les calculer de nouveau, on peut aisément parvenir aux résultats que donne cette expression, par les considérations suivantes.

XII.

Le mouvement de l'axe d'une Planète autour de son centre de gravité, dépend, comme l'on sait, des momens d'inertie de la Planète, par rapport aux plans de ses trois axes principaux, & des momens des forces perturbatrices. Considérons d'abord les momens d'inertie de la Planète, par rapport aux plans de ses axes principaux.

$a.(1+\alpha y)$ étant le rayon d'une couche de la Planète, l'expression d'une molécule élémentaire sera

$$-\tfrac{1}{3}\cdot\rho.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^3.(1+\alpha y)^3,$$

la dernière différentielle étant relative à la variable a. On aura les momens d'inertie de cette molécule par rapport aux plans de ses trois axes principaux, en multipliant son expression par les carrés de ses distances à ces plans, c'est-à-dire par $a^2.(1+\alpha y)^2.\mu^2$; $a^2.(1+\alpha y)^2.(1-\mu^2).\text{cos.}\,\varpi^2$; $a^2.(1+\alpha y)^2.(1-\mu^2).\text{sin.}\,\varpi^2$; d'où il est facile de conclure que les momens d'inertie de la Planète entière sont, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$-\tfrac{1}{5}\cdot\int\int\int\rho.\mu^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y);$$
$$-\tfrac{1}{5}\int\int\int\rho\cdot(1-\mu^2)\ \text{cos.}\,\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y);$$
$$-\tfrac{1}{5}\cdot\int\int\int\rho\cdot(1-\mu^2).\text{sin.}\,\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5(1+5\alpha y).$$

Les quantités, μ^2, $(1-\mu^2).\text{cos.}\,\varpi^2$, $(1-\mu^2).\text{sin.}\,\varpi^2$, sont réductibles à des quantités de cette forme $U^{(0)}+U^{(2)}$; il faut donc par le théorème de l'*article VI*, ne considérer dans y, que les termes $Y^{(0)}$ & $Y^{(2)}$; mais le terme $Y^{(0)}$ étant constant, il peut être censé compris dans la constante a; les momens précédens deviendront ainsi:

$$-\frac{1}{5}.\int\int\int\rho.\mu^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5\,[1 + 5\alpha Y^{(2)}];$$
$$-\frac{1}{5}.\int\int\int\rho.(1-\mu^2).\text{cos}.\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5\,[1 + 5\alpha Y^{(2)}];$$
$$-\frac{1}{5}.\int\int\int\rho.(1-\mu^2).\text{sin}.\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5\,[1 + 5\alpha Y^{(2)}].$$

On a par l'*article VI,*

$$-\alpha\int\rho.\partial\,[a^5\,Y^{(2)}] = -\,[\tfrac{5}{6}\alpha\,\varphi.(\mu^2-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{5}{3}.\alpha Y^{(2)}].\int\rho.\partial.a^3,$$

la valeur de $\alpha.Y^{(2)}$ du second membre de cette équation étant relative à la surface; cette valeur pour la Terre est par l'*art. VIII,* égale à $-0,003111.(\mu^2-\frac{1}{3})$; en désignant donc par A, la constante $(0,005185-\frac{5}{6}\alpha.\varphi).\int\rho.\partial a^3$, on aura pour les momens d'inertie de la Terre par rapport aux plans de ses axes principaux,

$$\frac{4\pi}{15}.\int\rho.\partial.a^5 - \frac{16\pi}{45}.A;$$
$$\frac{4\pi}{15}.\int\rho.\partial.a^5 + \frac{8\pi}{45}.A;$$
$$\frac{4\pi}{15}.\int\rho.\partial.a^5 + \frac{8\pi}{45}.A.$$

On peut facilement, au moyen de l'analyse précédente, déterminer la nature des solides homogènes dont tous les axes passant par leur centre de gravité, sont des axes principaux de rotation; pour cela, soit R, le rayon mené de ce centre à une molécule quelconque ∂M du solide; on aura

$$\partial M = -R^2.\partial R.\partial\mu.\partial\varpi;$$

d'où il est aisé de conclure que les momens d'inertie du solide, relativement aux plans de ses trois axes principaux, sont

$$-\int\int\int R^4.\partial R.\mu^2.\partial\mu.\partial\varpi;$$
$$-\int\int\int R^4.\partial R.(1-\mu^2).\text{cos}.\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi$$
$$-\int\int\int R^4.\partial R.(1-\mu^2).\text{sin}.\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.$$

Si l'on exécute les intégrations relatives à R, & que l'on

nomme R' le rayon R prolongé juſqu'à la ſurface, ces trois momens deviendront

$$-\frac{1}{5}.\iint R'^5 .\mu^2.\partial\mu\,\partial\varpi;$$

$$-\frac{1}{5}\iint R'^5\,(1-\mu^2).\text{coſ.}\,\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi$$

$$-\frac{1}{5}\iint R'^5\,(1-\mu^2).\text{ſin.}\,\varpi^2.\partial\mu.\partial\varpi.$$

Maintenant, on ſait que ſi ces momens ſont égaux entr'eux, tous les axes du corps qui paſſent par ſon centre de gravité, ſeront des axes principaux de rotation; or, il eſt clair par ce qui précède, que cette égalité aura lieu, ſi la valeur de R'^5 peut être miſe ſous cette forme

$$R'^5 = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$$

c'eſt-à-dire, ſi la fonction $Y^{(2)}$ diſparoît de l'expreſſion de R'^5. Telle eſt donc l'équation générale des ſphéroïdes homogènes dont tous les axes paſſant par le centre de gravité, ſont des axes principaux de rotation, & l'on voit que la ſphère n'eſt pas le ſeul ſolide qui jouiſſe de cette propriété.

XIII.

CONSIDÉRONS préſentement les momens de forces perturbatrices: ſi l'on nomme S la maſſe d'un Aſtre quelconque éloigné de la Planète; s la diſtance des centres de gravité de ces deux corps, que nous ſuppoſerons très-grande relativement à a; ν l'angle que forme s avec l'axe des x, & ψ l'angle que forme le plan des s & des x, avec celui des x & des y; ſi l'on décompoſe enſuite l'action de S ſur une molécule de la Planète, parallèlement aux trois axes des x, des y & des z, & que l'on en retranche les forces parallèles aux mêmes axes, qui ſollicitent le centre de gravité de la Planète; on aura les trois forces ſuivantes,

$$a.(1+\alpha y).\frac{S}{s^3}.\{(3.\text{coſ.}\,\nu^2-1).\mu+3.\text{ſin.}\,\nu.\text{coſ.}\,\nu.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,(\varpi-\psi)\};$$

$$a.(1+\alpha y).\frac{S}{s^3}.\{3\,\mu.\text{ſin.}\,\nu.\text{coſ.}\,\nu.\text{coſ.}\,\psi-\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi$$
$$+3.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\nu^2.\text{coſ.}\,\psi.\text{coſ.}\,(\varpi-\psi)\};$$

$$a.(1+\alpha y).\frac{S}{s^3}.\{3\,\mu.\text{fin.}\,v.\text{cof.}\,v.\text{fin.}\,\psi - \sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi + 3.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,v^2.\text{fin.}\,\psi.\text{cof.}\,(\varpi-\psi)\}.$$

Pour avoir les momens de ces forces, il faut les multiplier par la maſſe de la molécule qui eſt égale à

$$-\tfrac{1}{3}\,\rho.\partial\,\mu.\partial\,\varpi.\partial.a^3\,(1+\alpha\,y)^3;$$

Il faut multiplier enſuite reſpectivement ces produits par les diſtances de chaque force aux plans qui lui ſont parallèles. Ces diſtances ſont

$$a.(1+\alpha y).\mu,\ a.(1+\alpha y).\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi,$$
$$a.(1+\alpha y).\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi;$$

les momens des forces ſeront par conſéquent de cette forme,

$$R.\rho.\partial\mu.\partial\varpi.\partial.a^5\,(1+\alpha y),$$

R étant une fonction de

$$\mu,\ \sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cof.}\,\varpi,\ \sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\,\varpi,$$

compriſe dans la forme $U^{(0)}+U^{(2)}$; il faut ainſi par le théorème de l'article VI, ne conſidérer dans l'expreſſion de y, que le terme $Y^{(2)}$; or on a par l'*article précédent*,

$$\int\rho.\partial.(a^5\,Y^{(2)}) = [\tfrac{5}{6}\,\varphi.(\mu^2-\tfrac{1}{3})+\tfrac{5}{3}\,Y^{(2)}].\int\rho.\partial.a^3,$$

$Y^{(2)}$ dans le ſecond membre de cette équation, étant relatif à la ſurface; on réduira donc les momens précédens, à ne dépendre que de cette valeur de $Y^{(2)}$ & des intégrales $\int\rho.\partial.a^3$, & $\int\rho\,\partial.a^5$, priſes depuis $a=0$ juſqu'à $a=1$. Ce réſultat eſt conforme à celui auquel nous ſommes parvenus dans l'*article précédent*, ſur les momens d'inertie; d'où il ſuit que relativement à la Terre, tous ces momens ſont les mêmes que ceux d'un ellipſoïde de révolution, dans lequel les denſités des couches ſuivent la même loi que les denſités des couches terreſtres, & dont le rayon de la ſurface extérieure eſt $1 - 0{,}003111.(\mu^2-\tfrac{1}{3})$. Ainſi, les quantités de la préceſſion & de la nutation doivent être

exactement

exactement les mêmes que celles que l'on obtient, en supposant à cette Planète, la figure d'un semblable ellipsoïde.

XIV.

J'AI déterminé ailleurs, dans cette hypothèse, les phénomènes de la précession & de la nutation (*Mémoires de l'Académie, année 1776, pages 250 & suivantes*), & je suis parvenu aux résultats suivans.

Si l'on nomme q l'ellipticité de la Terre à sa surface extérieure, & que l'on suppose

$$E = \frac{(2q - \alpha\varphi).\int\rho a^2.\partial a}{\int\rho a^4.\partial a};$$

si de plus, on nomme S la masse du Soleil, s sa moyenne distance à la Terre; L la masse de la Lune, & l sa moyenne distance à la Terre; si l'on prend ensuite pour unité de temps un jour sydéral, & que l'on nomme n & m les temps des révolutions du Soleil & du nœud de l'orbite Lunaire; enfin si l'on nomme ε l'obliquité de l'Écliptique, & c la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire; la précession moyenne annuelle des Équinoxes sera

$$\tfrac{3}{4}\, nE.\text{cos}.\,\varepsilon\left(\frac{S}{s^3} + \frac{L}{l^3}\right).360 \text{ degrés},$$

& l'étendue entière de la nutation de l'axe terrestre, sera

$$\frac{3\,m.c.E}{2\pi}.\text{cos}.\,\varepsilon.\frac{L}{l^3}.180 \text{ degrés}.$$

Les observations donnent

$$\varepsilon = 23^d\ 28'\ 10'',$$

$$c = \text{tang.}\ 5^d\ 9'\ 8'',$$

$$\text{Log.}\ n = 2{,}5637679,$$

$$\text{Log.}\ m = 3{,}8335817.$$

La précession moyenne annuelle des Équinoxes est de $50''\frac{1}{3}$, & si cette détermination est fautive, ce ne peut être que

d'une petite fraction de secondes, parce que l'accroissement à très peu-près uniforme de la précession permet de répartir sur un grand intervalle les erreurs inévitables des observations. Suivant M. Bradley, l'étendue entière de la nutation est de 18″; mais comme une petite erreur peut s'être glissée dans cette détermination, nous supposerons la nutation de 18″. (1 + γ); nous aurons, cela posé, les deux équations suivantes,

$$E.\left\{\frac{S}{s^3} + \frac{L}{l^3}\right\} = 0{,}000\,000\,154143;$$

$$E.\frac{L}{l^3} = 0{,}000\,000\,103189.(1+\gamma);$$

d'où l'on tire,

$$\frac{S}{s^3} = \frac{(0{,}4938 - \gamma)}{1+\gamma}.\frac{L}{l^3}.$$

Si la nutation étoit exactement de 18″, on auroit $\gamma = 0$, & par conséquent

$$\frac{S}{s^3} = 0{,}4938.\frac{L}{l^3};$$

l'effet de l'action du Soleil sur la précession seroit donc à peu-près la moitié de celui de la Lune. M. Daniel Bernoulli suppose ces deux effets dans le rapport de 2 à 5, d'après les observations des marées; cette supposition donne environ $\gamma = \frac{1}{15}$; la nutation seroit ainsi de 19″ 2, c'est-à-dire, de 1″,2 plus grande que suivant M. Bradley. Une aussi petite différence est très-difficile à connoître par l'observation; & si l'on considère l'incertitude des observations sur les marées, il doit paroître surprenant que la quantité de la nutation tirée de ce phénomène, s'éloigne aussi peu du résultat de l'observation directe.

Les équations précédentes donnent

$$q = \tfrac{1}{2}\alpha\varphi + 0{,}000000154143.\frac{(0{,}4938-\gamma)}{2{,}9876.\frac{S}{f^3}}.\frac{\int \rho.a^4.\partial a}{\int \rho.a^2.\partial a};$$

mais on a par la théorie des forces centrales,

$$\frac{S}{f^3} = \frac{1}{n^2}; \tfrac{1}{2}\alpha\varphi = \frac{1}{578}:$$

partant

$$q = 0,0017301$$

$$+ (0,0034173 - \gamma.0,0069205).\frac{\int \rho.a^4.\partial a}{\int \rho.a^2.\partial a}.$$

La valeur de q dépend de celle de γ & de la loi de denſité des couches du ſphéroïde terreſtre; mais quelle que ſoit cette loi, il eſt viſible que a étant moindre que l'unité, $\rho\, a^4\, \partial a$ eſt moindre que $\rho\, a^2\, \partial a$, & qu'ainſi la fraction $\frac{\int \rho\, a^4\, \partial a}{\int \rho\, a^2\, \partial a}$ eſt au-deſſous de l'unité. Elle ſeroit égale à l'unité, ſi la Terre étant creuſe dans ſon intérieur, toute ſa maſſe étoit à ſa ſurface; elle ſeroit nulle, ſi la maſſe de la Terre étoit réunie à ſon centre de gravité; les deux limites de q ſont par conſéquent

$$0,0017301;\ 0,0051474 - \gamma.\ 0,0069205.$$

Nous avons vu dans l'*article VIII*, que la valeur de q, donnée par les obſervations de la longueur du pendule, eſt égale à 0,003111; elle eſt donc entre les limites précédentes; d'où il ſuit que les phénomènes de la préceſſion, de la nutation, de la variation de la peſanteur, & du flux & reflux de la Mer, ſont parfaitement d'accord entr'eux.

XV.

Si la denſité de la Terre étoit conſtante du centre à la ſurface, on auroit $\frac{\int \rho\, a^4\, \partial a}{\int \rho\, a^2\, \partial a} = \frac{3}{5}$; partant

$$q = 0,0037805 - \gamma.0,0041523.$$

Cette quantité eſt plus grande que 0,003111, en employant même la valeur de γ, donnée par les obſervations des marées; ainſi la Terre eſt plus denſe à ſon centre qu'à la ſurface.

La comparaison des deux valeurs de q, tirées des observations du pendule & des mouvemens de l'axe terrestre, donne la limite de la plus petite densité moyenne que l'on puisse supposer à la Terre; car ces valeurs étant

$$q = 0{,}003111,$$
$$q = 0{,}0017301 + (0{,}0034173 - \gamma \cdot 0{,}0069205) . \frac{\int \rho a^4 \partial a}{\int \rho a^2 \partial a},$$

il est aisé d'en conclure

$$\int \rho a^2 \partial a = (2{,}4747 - \gamma . 5{,}0116) . \int \rho a^4 \partial a.$$

Or, si l'on nomme ρ' la densité d'une couche du sphéroïde terrestre vers la surface, le rapport de la densité moyenne de ce sphéroïde à la densité de cette couche, sera $\frac{\int \rho a^2 \partial a}{\int \rho' a^2 \partial a}$; il sera donc égal à

$$(2{,}4747 - \gamma . 5{,}0116) . \frac{\int \rho a^4 . \partial a}{\int \rho' a^2 \partial a}.$$

Maintenant, la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire sur la loi des densités des couches terrestres, est celle d'une densité croissante de la surface au centre. Dans ce cas, ρ est toujours plus grand que ρ', ce qui donne $\frac{\int \rho a^4 \partial a}{\int \rho' a^2 \partial a} > \frac{3}{5}$; la moyenne densité de la Terre est par conséquent au-dessus de

$$(1{,}52482 - \gamma . 3{,}00696) . \rho'.$$

Si $\gamma = 0$, cette quantité surpasse $\frac{3}{2}\ \rho'$; ainsi la moyenne densité du globe terrestre est, dans ce cas, au moins $\frac{3}{2}$ de la densité des couches dans laquelle nous pouvons pénétrer, & il est vraisemblable qu'elle est beaucoup plus grande.

X V I.

POUR mieux saisir l'ensemble des phénomènes qui tiennent à la figure de la Terre, & leur accord avec le principe de la pesanteur universelle, rappelons en peu de mots les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce Mémoire, sur la nature des rayons terrestres.

L'expreſſion du rayon d'un ſphéroïde quelconque très-peu différent d'une ſphère, peut être miſe ſous cette forme,

$$1 + \alpha . [Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.]$$

Si l'on fixe relativement à la Terre, l'origine de ce rayon au centre de gravité de cette Planète, les conditions de l'équilibre de la Mer donneront $Y^{(1)} = 0$, & réduiront par conſéquent l'expreſſion du rayon terreſtre à cette forme,

$$1 + \alpha . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.].$$

L'état permanent de l'équilibre de la Mer, exige que l'axe de rotation de la Terre ſoit un de ſes axes principaux, & pour cela il faut que $Y^{(2)}$ ſoit de cette forme,

$$H . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + H^1 . (1 - \mu^2) . \text{coſ.} 2 \varpi,$$

H & H^1 étant deux conſtantes que l'obſervation ſeule peut déterminer, & qui dépendent de la conſtitution du globe terreſtre.

Ces réſultats ſont les ſeuls que fournit l'état permanent de l'équilibre de la Terre; ils ſont communs à tous les corps céleſtes que recouvre un fluide en équilibre. Les obſervations ſur la longueur du pendule à ſecondes, ont porté plus loin nos connoiſſances ſur la nature du rayon terreſtre; elles nous ont appris que la conſtante H eſt à très-peu-près, égale à $-0{,}003111$; que la conſtante H^1 eſt nulle, ou du moins inſenſible relativement à H; que la quantité $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$ eſt pareillement très-petite relativement à $Y^{(2)}$; qu'il en eſt de même des premières différences de cette quantité, par rapport à celles de $Y^{(2)}$; & qu'ainſi l'on peut, dans le calcul du rayon terreſtre & de ſes premières différences, lui ſuppoſer ſans erreur ſenſible, cette forme

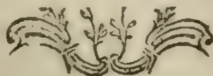
$$1 - 0{,}003111 . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Les meſures des degrés des Méridiens, ont fait voir que cette ſuppoſition ne peut pas s'étendre aux ſecondes différences du rayon terreſtre, & que la fonction $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$

devient ſenſible par une ſeconde différenciation; mais elles ſont encore inſuffiſantes pour déterminer cette fonction.

Le phénomène de la préceſſion des équinoxes & de la nutation de l'axe terreſtre, ne dépend que de $Y^{(2)}$; il ne détermine pas la valeur de H, mais il donne les limites entre leſquelles cette valeur doit être compriſe: la valeur que l'on trouve par la loi des variations de la peſanteur, tombe entre ces limites; elle indique de plus une diminution dans la denſité des couches terreſtres, depuis le centre juſqu'à la ſurface, ſans nous inſtruire cependant de la véritable loi de cette diminution dont l'exiſtence eſt prouvée d'ailleurs, ſoit par la ſtabilité de l'équilibre de la Mer, ſoit par le peu d'action des montagnes ſur le fil à-plomb, ſoit enfin par les principes d'Hydroſtatique, qui exigent que ſi la Terre a été primitivement fluide, les parties voiſines du centre ſoient en même-temps les plus denſes.

On voit ainſi que chaque phénomène dépendant de la figure de la Terre, fournit de nouvelles lumières ſur la nature du rayon terreſtre, & qu'ils ſont tous parfaitement d'accord entr'eux. Ils ne ſuffiſent pas à la vérité pour nous faire connoître la conſtitution de la Terre, mais ils indiquent l'hypothèſe la plus vraiſemblable, celle d'une denſité décroiſſante du centre à la ſurface. La loi de la peſanteur univerſelle eſt donc la vraie cauſe de ces phénomènes; & ſi elle ne s'y manifeſte pas d'une manière auſſi préciſe que dans les mouvemens céleſtes, cela vient de ce que les inégalités de la force attractive des Planètes, qui tiennent à leur conſtitution intérieure, diſparoiſſent à de grandes diſtances, & ne laiſſent apercevoir que le ſimple phénomène de la tendance mutuelle de ces corps vers leurs centres de gravité.



OBSERVATIONS FAITES EN 1782, AU SOLSTICE D'ÉTÉ, AU GNOMON ET VERRE OBJECTIF DE SAINT-SULPICE.

Par M. LE MONNIER.

LE 20 Juin, à midi, l'image du Soleil rasoit à peine, au nord, le trait gravé sur le marbre, lequel est le plus proche du pied du style ou du gnomon de Saint-Sulpice. 22 Juin 1782.

Et quant à l'autre bord de l'image, elle débordoit le trait gravé, assez sensiblement du côté de l'obélisque, lequel est situé vers la partie septentrionale de la Meridienne *(Voyez les Memoires de 1762 & 1774)*.

Le 21 Juin, le ciel fut couvert de nuages.

Le 22 au matin, on a vu l'image du Soleil très-vive, & beaucoup plus nette que le 20 à midi, indépendamment des soins extraordinaires qu'on a apportés à tenir le marbre & l'objectif également purgés de tout ce qui pouvoit nuire à la splendeur de l'image: or, l'effet de la nutation depuis 1774, a été bien sensible; à midi, le bord de l'image le plus proche du pied du style, a rasé, au nord, le trait gravé, & par les traces au crayon qu'on a relevées, cette image se trouvoit pour l'autre bord, à 0$^{\text{ligne}}\frac{1}{2}$ ou 8″, distante du second trait autrefois gravé vers la partie septentrionale de la Méridienne. Mais j'ai fait voir en 1764, pourquoi les deux bords de l'image ne se trouvoient pas également distans des traits gravés sur le marbre: en effet, le bord opposé de l'image ne rasoit plus le second trait gravé & opposé vers le nord, & il en étoit distant, du côte de l'obélisque, d'une demi-ligne précisément; l'action des deux

groſſes Planètes n'auroit donc pas dans ces deux cas-là été ſenſible : cette obſervation n'a pas anticipé de ſix mois la conjonction de nos deux groſſes Planètes, Jupiter & Saturne; au lieu qu'en 1774 & 1764, lorſque la nutation de l'axe étoit la plus petite, & dans le ſecond cas la plus grande, comme elle l'eſt actuellement, l'oppoſition & la conjonction des deux groſſes Planètes avoit déjà anticipé, depuis une & deux années, leſdites obſervations.



MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur l'uſage des Horloges marines, relativement à la Navigation, & ſur-tout à la Géographie, où l'on détermine la différence en longitude de quelques points des îles Antilles & des côtes de l'Amérique ſeptentrionale, avec le Fort-royal de la Martinique, ou avec le Cap-françois de Saint-Domingue, par des Obſervations faites pendant la campagne de M. le Comte d'Eſtaing, en 1778 & 1779, & celle de M. le Comte de Graſſe, en 1781 & 1782.

Par M. le Marquis DE CHABERT.

Lû à l'Aſſemblée publique de Pâques 1783.

Exactitude des horloges marines, conſtatée par les expériences.

LES Savans qui ont été chargés d'éprouver des Horloges marines, ont conſtaté par la publication de leurs expériences, qu'on parvient à en conſtruire qui ſurpaſſent l'exactitude exigée pour la ſolution du problème de la Longitude, & qu'on eſt en état, au moyen de cette découverte, de jouir pour la Navigation, du grand avantage dans la vue duquel le Parlement d'Angleterre avoit promis une ſomme conſidérable.

Degré d'exactitude exigé pour la ſolution du problème de la longitude.

Cet avantage conſiſte, comme on ſait, à trouver la Longitude en mer, avec la préciſion au moins d'un demi-degré au bout de quarante-deux jours de route, c'eſt-à-dire, ſans craindre plus de quatre à huit lieues d'erreur, ſuivant le parallèle ſur lequel on attérit, après une traverſée peut-être de douze à quinze cents lieues, pendant que par l'eſtime ordinaire du chemin, l'erreur des Pilotes monte quelquefois juſqu'à cent lieues.

Quel ſujet de tranquillité pour un Capitaine de Vaiſſeau attériſſant pendant l'hiver aux côtes de Bretagne ; & combien n'a-t-on pas de raiſons d'ailleurs de ſe féliciter de la découverte des Horloges marines, ſi l'on enviſage les occaſions où, en temps de guerre, elles peuvent être eſſentiellement utiles pour le bien de l'État & le ſuccès des armes du Roi !

Avantages qu'on peut en tirer pour le ſuccès des expéditions en temps de guerre.

Un Officier chargé d'une expédition, pourra en effet, avec le ſecours de la connoiſſance certaine de la Longitude, rendre ſa route, vers le lieu où il doit agir, plus courte de tout le temps que l'eſtime des Pilotes lui auroit fait perdre en tâtonnemens, & par-là primer ou ſurprendre l'Ennemi.

S'il eſcorte un convoi, cette même aſſurance de la longitude lui fournira peut-être le moyen d'échapper à l'Ennemi en force & ſuppoſé en croiſière aux approches du Port où il doit aborder, en ſuſpendant ſa route à une certaine diſtance de la côte, afin d'attendre, pour attérir, une circonſtance de vent qui ait dû en faire retirer l'Ennemi.

Enfin, s'il eſt chargé d'une croiſière importante, il ſe rendra directement au parage ordonné, & s'y arrêtera à la longitude de la diſtance de terre où il convient qu'il ſe tienne, & où les horloges lui apprendront qu'il eſt, ſans qu'il ſoit obligé, pour s'en aſſurer, d'aller reconnoître la terre, & de courir le riſque d'être découvert.

Motifs qui me déterminèrent à en embarquer.

C'eſt afin d'être en état d'offrir à mes Généraux ce moyen d'aſſurance pour la direction des routes de leur armée, que j'embarquai des horloges marines ſur le vaiſſeau *le Vaillant* que je commandois en 1778 & 1779, ſous les ordres de M. le Comte d'Eſtaing, & ſur le vaiſſeau *le Saint-Eſprit* en 1781 & 1782, ſous les ordres de M. le Comte de Graſſe. La ſatisfaction qu'ils ont bien voulu me témoigner de ce que je leur avois ſignalé ma longitude par obſervation lorſqu'ils l'avoient deſiré, m'a amplement dédommagé de mes ſoins pendant quatre ans pour la conduite des horloges, pour la connoiſſance de leur marche à toutes les relâches, & pour le calcul des obſervations.

Un motif également puissant me porta à me charger de la conduite & de l'usage des horloges pendant ces deux campagnes, c'étoit l'espérance que la justesse des attérages qui auroit été généralement reconnue par la publicité de mes signaux de longitude, exciteroit le zèle d'un grand nombre d'Officiers très-instruits à s'empresser à l'avenir de se rendre doublement utiles, en remplissant cette nouvelle partie de service en même temps que les fonctions de leur grade, d'autant que les observations pour la longitude se concilient toujours avec le courant du service, comme les plus simples opérations du pilotage.

Leur emploi est presqu'aussi facile que les opérations ordinaires du pilotage.

Je suis même persuadé que l'utilité reconnue des horloges marines, engagera le Gouvernement à multiplier ce moyen de sûreté pour la navigation des Vaisseaux du Roi, & qu'on parviendra bientôt à y faire participer les Bâtimens de commerce.

C'est encore dans la vue d'épargner aux Marins chargés de la conduite & de l'usage des horloges, la fastidieuse écriture continuelle de l'énoncé des articles de calculs, que je les ai fait imprimer dans l'ordre où ils doivent être, & dans autant de tableaux en forme de calculs que l'usage des horloges marines peut en occasionner; persuadé d'ailleurs que des Pilotes qui n'auroient même que les connoissances ordinaires, pourroient, à l'aide de ces tableaux, conduire des horloges, observer & calculer la longitude, en faisant les observations comme elles y sont indiquées, & en remplissant le blanc de chaque article.

Secours pour ceux qui sont chargés de ces horloges.

Je me borne à rapporter quelques circonstances où les Horloges ont été utiles à nos navigations.

Vers le milieu de la traversée de M. le Comte d'Estaing, de Toulon à la Delaware, mes longitudes observées par le moyen des Horloges, ainsi que celles que M. le Chevalier de Borda concluoit des mesures de distances de la Lune au Soleil, qu'il prenoit exprès dans le même temps avec son cercle à réflexion, & qui s'accordoient avec les miennes à un quart de degré près, firent connoître que les longitudes,

Exemples de leur utilité pour la navigation.

ſuivant l'eſtime des Pilotes dans les mêmes temps, étoient fautives de près de ſix degrés, dont leur route étoit trop peu avancée; d'où il s'enſuivit que lorſque le Général ſe trouva ſuffiſamment parvenu à l'oueſt de la Bermude, il paſſa avec ſécurité du ſud au nord du parallèle de cette île, pendant que ce parti auroit été encore dangereux ſuivant l'eſtime des Pilotes; & par-là, il abrégea la fin de ſa traverſée, déjà fort alongée par la contrariété des vents.

Lorſqu'allant de Boſton à la Martinique, en Novembre 1778, M. le comte d'Eſtaing voulut croiſer pendant quelques jours au vent de la Deſirade, pour tâcher d'intercepter un convoi ennemi; il indiqua le Méridien où il jugeoit à propos de s'arrêter, ſur la longitude donnée par les Horloges marines, & qui ſe trouva exacte.

M. le Comte de Broves, ramenant de Savanah à Breſt ou à l'Orient, à la fin de 1779, quelques Vaiſſeaux, du nombre deſquels étoit le *Vaillant*, l'attérage qui réſulta de ma longitude par les horloges, ſignalée à l'approche de terre, fut reconnu exact trop généralement pour le paſſer ſous ſilence.

L'attérage de Breſt à la Martinique, avec l'armée de M. le Comte de Graſſe, au commencement de Mai 1781, fut indiqué par les horloges à un tiers de degré, après un intervalle de plus de ſix ſemaines.

Celui du cap François, île de Saint-Domingue, au cap Henri, à l'entrée de la baie de Chéſapeak, avec la même armée, à la fin d'Août ſuivant, fut très-exact relativement aux meilleures Cartes, ce qui nous prouva que par l'effet du courant du canal de Bahama, où l'armée venoit de paſſer, nous avions été portés dans l'eſt de 2 degrés $\frac{1}{2}$ plus que ſuivant l'eſtime.

On peut, avec les horloges marines, meſurer aſſez exactement la direction & la viteſſe des courans.

Je dois rapporter encore, que dans nos navigations des deux campagnes, lorſque nous avons traverſé la partie de mer, où ce courant eſt très-ſenſible, les horloges marines m'ont fourni le moyen d'en meſurer aſſez exactement la direction & la viteſſe, en comparant la route & le chemin

d'un midi à celui du lendemain, résultant du concert de deux observations de longitude & de deux observations de latitude, avec la route & le chemin du même jour, résultant de l'estime ordinaire du Pilote.

Je fis ces observations à quatre époques différentes; 1.° en Juillet 1778, en traversant le courant avec M. le Comte d'Estaing, du sud-est au nord-ouest, vers les 35.e & 37.e degré de latitude, & le 73.e & le 77.e degré de longitude, Méridien de Paris: 2.° en le traversant avec le même Général, en Août & Septembre 1779, du sud-est au nord-ouest, vers les 30.e & 31.e degré de latitude, & les 75.e & 78.e degré de longitude: 3.° en Novembre de la même année, en le traversant de l'ouest à l'est, par les mêmes latitudes & longitudes: 4.° enfin en Août 1781, avec M. le Comte de Grasse, en suivant le fil de ce courant depuis le canal même de Bahama jusqu'à l'attérage de la Chésapeak.

Dans la première circonstance, je trouvai qu'entre les parallèles de 34 degrés $\frac{2}{3}$ & 35 degrés $\frac{1}{2}$, par la longitude de 73 à 74 degrés $\frac{1}{2}$, le courant commençoit à devenir sensible, & qu'il faisoit environ un tiers de mille par heure, dans la direction de l'ouest à l'est; qu'entre les paralleles de 35 degrés $\frac{1}{2}$ à 37 degrés $\frac{1}{2}$, par la longitude de 74 degrés $\frac{1}{2}$ à 76 degrés $\frac{3}{4}$, la vîtesse étoit d'un mille par heure dans la direction nord-est; enfin qu'entre ce dernier terme & la côte de Virginie, il y a un retour de courant qui se fait parallèlement à la côte.

Dans la seconde circonstance, j'observai d'abord un contre-courant opposé en direction à celle du courant de Bahama, par la latitude de 29 degrés $\frac{1}{2}$ & la longitude de 78 degrés $\frac{1}{2}$; ensuite j'entrai dans le vrai courant, dont je trouvai sur le même parallèle, & par la longitude de 80 degrés $\frac{1}{2}$ à 82 degrés, la direction nord-est, & la vîtesse seulement de demi-mille par heure; & entre les parallèles de 29 degrés $\frac{1}{2}$ & 31 degrés $\frac{1}{2}$, par la longitude de 82 degrés à 82 degrés $\frac{3}{4}$, je déterminai la direction nord quelques degrés Est, & la vîtesse un mille dans une heure: enfin, à mesure

que je m'approchai de la côte, je remarquai encore le contre-courant au ſud, qui eſt ſur-tout fort ſenſible au mouillage devant Savanah & tout le long de la côte de Géorgie.

A la troiſième époque, en Novembre 1779, je déterminai que, ſur le parallèle de 31 degrés $\frac{1}{4}$ & par la longitude de 83 degrés à 80 degrés $\frac{1}{2}$, la direction étoit eſt-nord-eſt, & la vîteſſe un peu moins d'un mille par heure; que par la même latitude & par la longitude de 81 degrés $\frac{1}{2}$ à 79 degrés $\frac{3}{4}$, la direction étoit de l'oueſt à l'eſt quelques degrés nord, & la vîteſſe un mille à l'heure. Je trouvai enſuite que la limite auſtrale de ce courant étoit par la latitude de 30 degrés $\frac{1}{2}$, & la longitude de 79 degrés $\frac{1}{2}$, & j'y obſervai le même contre-courant que j'avois déjà remarqué en Août de la même année; il faiſoit environ un mille à l'heure à l'oueſt-nord-oueſt, ce qui fut confirmé par les obſervations que je fis pluſieurs jours de ſuite ſur le même parallèle, & juſqu'au 78.e degré $\frac{1}{2}$ de longitude.

Plus grande vîteſſe du courant de Bahama, trouvée de 3 milles $\frac{1}{2}$ par heure.

Dans la quatrième & dernière circonſtance, en Août 1781, je déterminai par des obſervations répétées tous les jours, que depuis l'entrée ſud du canal de Bahama juſqu'à la latitude de 30 degrés, la vîteſſe du courant étoit d'un peu plus de trois milles, & juſqu'à trois milles & demi par heure, & qu'à la ſortie du Canal, la direction commençoit à s'incliner légèrement du nord vers l'eſt. Depuis la latitude de 30 degrés juſqu'à celle de 35, & entre les longitudes de 82 degrés $\frac{1}{2}$ & 76 degrés, la direction du courant fut trouvée nord-eſt, c'eſt-à-dire, parallèle aux côtes de la Caroline, la vîteſſe depuis trois milles juſqu'à deux milles en une heure; enfin par le 36.e degré de latitude, & le 76.e de longitude, je trouvai l'effet du courant à-peu-près nul; ainſi l'on peut y fixer la limite oueſt. De-là juſqu'au cap Henri, j'obſervai de nouveau le contre-courant, qui faiſoit demi-mille à l'heure.

M. Franklin a fait tracer, il y a quelques années, ſur une petite Carte *(a)*, la direction & la vîteſſe ſucceſſives du

(a) Cette Carte ſe trouve chez le Rouge.

courant du canal de Bahama, à mesure qu'il s'avance dans l'Océan atlantique, d'après les remarques qu'il avoit recueillies des Navigateurs américains. J'y ai vu, avec une grande satisfaction, l'opinion de ce célèbre Physicien, confirmer l'idée que j'avois eue plus de vingt ans auparavant *(b)*, que ce courant devoit s'incliner vers le sud-est, lorsqu'il rencontroit celui qui sort du golfe de Saint-Laurent; à cela près que j'imaginois alors, comme je le crois encore, que la force des eaux du fleuve de Saint-Laurent, n'anéantit pas tout-à-coup la direction du courant du canal de Bahama, & que ces eaux ne font que commencer l'inflexion, laquelle, quoique toujours augmentée par la descente des eaux des grandes Baies du nord, n'empêche pas que le courant de Bahama ne continue de s'étendre dans le nord-est jusque vers les Açores, ainsi que je l'éprouvois en 1750, mais en s'élargissant à mesure qu'il s'affoiblit; de sorte que par cette composition de mouvement & de direction, il embrasse un plus grand espace de Mer, en se recourbant toujours jusqu'aux côtes d'Afrique, où il vient remplacer les eaux que le vent alizé transporte continuellement vers l'ouest. Quant à la vîtesse de ce courant, les résultats de mes observations montrent seulement que je ne l'ai pas trouvée aussi grande qu'elle est marquée sur la Carte de M. Franklin.

Opinion sur l'inclinaison de ce courant à la rencontre des eaux du fleuve Saint-Laurent & autres, confirmée par M. Franklin.

On se propose de publier au Dépôt de la Marine, une Carte de la partie de l'Océan, comprise entre les Antilles, les côtes des États-Unis & celles du sud de Terre-Neuve, où mes observations sur la vîtesse & la direction du courant du canal de Bahama, seront rapportées.

Dans chacune de ces campagnes, j'avois embarqué deux Horloges, ainsi qu'il est presque indispensable; savoir, en 1778, celles désignées par *N.° 17*, à poids, & *N.° 3*, à ressort; & en 1781, par *N.° 22*, à poids, & *N.° 2*, à ressort, toutes inventées & construites par M. Ferdinand Berthoud.

(b) Voyage de l'Amérique septentrionale en 1750 & 1751, *pages 17, 21 & 23.*

Les deux horloges à poids n'ont pas conſervé la régularité de leur mouvement, & ont fini par ceſſer entièrement de me ſervir, la première à l'époque du combat devant la Grenade, & la ſeconde à celle du combat devant la baie de Chéſapeak; les bragues des canons de 24 de la ſeconde batterie s'étant rompues pendant l'action, les affûts, dans leur recul, heurtèrent contre les armoires qui renfermoient les horloges, & ont dû, par la violence d'un tel choc, en déranger le mécaniſme.

On auroit pu prévenir cet accident, en les deſcendant à la cale, comme celles à reſſort, à l'approche des combats, mais on ne peut déplacer ainſi les horloges à poids, ſans courir le riſque de les arrêter.

Inconvénient des horloges à poids; on croit qu'il ſeroit plus avantageux de n'en conſtruire qu'à reſſort.

Cet inconvénient me fait penſer qu'il conviendroit de n'en conſtruire qu'à reſſort, & du moindre volume poſſible, ſans nuire à leur exactitude, d'autant que le tranſport des premières par terre eſt très-embarraſſant par leur grandeur, & que par leur conſtruction elles ſont expoſées à être totalement détruites, ſi, par la négligence des Rouliers auxquels on eſt forcé de les abandonner, elles ſont renverſées, ainſi quil arriva malheureuſement à l'excellente horloge, *n.° 8,* qui m'étoit envoyée avec *n.° 3,* comme les plus parfaites, conſéquemment aux ordres de M. le Maréchal de Caſtries, & au vif intérêt que ce Miniſtre prit à l'uſage que je lui témoignois deſirer d'en faire pendant la campagne de 1781.

Néceſſité d'en obſerver la marche dans le Port, pendant deux mois avant le départ.

Je crois encore que pour établir la confiance qu'on peut accorder aux horloges deſtinées à être embarquées, il faudroit indiſpenſablement que l'Officier qui doit en faire uſage, en obſervât la marche dans le Port pendant deux mois avant le départ, afin de s'aſſurer de l'égalité de leur mouvement à diverſes époques dans cet intervalle, & d'être en état de reconnoître, ſoit par l'épreuve du Port du premier départ, ou ſoit par cette épreuve, & par les nouvelles vérifications qu'on tâche de faire à chaque relâche, ſi l'une des horloges n'a pas la régularité requiſe, & dans ce cas l'abandonner.

C'eſt en éprouvant ainſi mes horloges, que j'ai pris le parti

parti de ne me servir que de *n.° 3* dans la première campagne, & de *n.° 2* dans la seconde.

La marche de l'une & de l'autre s'est assez conservée telle que je l'avois d'abord éprouvée au Port du départ; j'ai remarqué seulement dans *n.° 3*, un changement de marche sensible lors du combat de la Grenade, mais elle se conserva ensuite assez bien dans son nouvel état.

Uniformité du mouvement des deux horloges à ressort, assez bien soutenue.

J'ai été encore plus content de la seconde, puisqu'elle m'a toujours donné la longitude à un quart ou un tiers de degré près dans mes plus longues traversées; je suis cependant obligé d'excepter celle de mon retour de Saint-Domingue en France; mais la quantité d'environ deux degrés & demi, trouvée à l'arrivée à Groix, en arrière du Vaisseau, est trop extraordinaire pour être une erreur réelle, & pour que je ne l'attribue pas à quelque inadvertance qu'on m'aura cachée, & qui aura produit une interruption de mouvement d'environ 9 minutes $\frac{1}{4}$, bien plutôt qu'à un dérangement de marche qui n'est ni probable ni croyable, après une régularité si constante pendant quinze mois, & sans la moindre cause visible qui ait pu occasionner un tel dérangement.

On voit, par ce que je viens de dire de l'exactitude des deux horloges dont je me suis successivement servi, qu'il est tout simple que je leur aie accordé ma confiance dans les circonstances que j'ai citées relativement à la navigation; & l'on conviendra que j'ai été encore plus fondé à les employer avec tout succès pour la Géographie, à raison du peu de temps qu'il y a toujours eu dans mon trajet de l'un à l'autre des lieux dont j'ai déterminé la différence des méridiens, & de l'exclusion que j'ai donnée à toute détermination dépendante d'un nombre de jours d'intervalle qui n'auroit plus permis de compter sur la grande précision que procurent toujours les horloges marines employées à cet usage avec ces précautions.

Réserve avec laquelle on doit faire usage des horloges marines, pour les déterminations géographiques.

Les horloges marines sont en effet si avantageuses pour la perfection de la Géographie dans ses détails, que je ne crains pas de dire qu'on a plus trouvé par la découverte de cette

La découverte des horloges marines est au moins aussi utile pour la

Géographie que pour la Navigation.

ſorte d'inſtrument, que l'on n'avoit oſé demander en propoſant le problème de la longitude; je puis même ajouter que ce problème ne pouvoit être d'une utilité réelle, qu'autant qu'on auroit trouvé auparavant un moyen exact & prompt de porter les Cartes marines au même degré de perfection que celle que l'on demandoit pour la connoiſſance de la longitude en mer; car, à quoi ſerviroit pour la ſécurité du Navigateur, de connoître la poſition de ſon Vaiſſeau ſur le globe à un demi-degré près, ſi les Cartes ſur leſquelles il eſt obligé de rapporter cette poſition, ne pouvoient de long-temps, par les méthodes ordinaires aſtronomiques & nautiques, devenir des tableaux qui lui repréſentaſſent avec autant d'exactitude, les terres dont il a en vue de s'approcher, & les dangers qu'il a intérêt d'éviter?

Néceſſité de perfectionner les Cartes.

C'eſt ce beſoin preſſant d'avancer promptement la Géographie, qui m'inſpira, dès ma jeuneſſe, le projet de faire des obſervations Aſtronomiques dans tous les lieux où je pourrois aborder, & qui me donna l'eſpérance d'être ſuivi dans cette carrière par d'autres Officiers de Marine qui, comme moi, ſentiroient qu'ils étoient infiniment plus à portée que les Aſtronomes par état, de porter ce flambeau ſur toutes les côtes du Globe.

Cependant les phénomènes Aſtronomiques, par leur rareté & les difficultés qu'ils entraînent, rendoient le moyen trop lent, même encore lorſqu'on put les multiplier beaucoup par la méthode que la néceſſité me fit imaginer en 1764 *(c)*, d'obſerver facilement dans les voyages l'aſcenſion droite de la Lune, en donnant le moyen d'établir promptement l'inſtrument des paſſages dans la direction du méridien.

Raiſons qui me firent différer mon travail ſur l'archipel de la

D'après cela on pouvoit dire, comme je l'avançai en 1766 *(d)*, que nous ſerions toujours forcés de nous contenter d'un très-petit nombre de déterminations juſqu'au temps où l'exécution des horloges marines nous fourniroit des

(c) Mémoires de l'Académie, 1766, *page 384*.

(d) Idem, *page 385*.

moyens prompts & sûrs de multiplier les observations de longitude à terre ainsi qu'à la mer. Aussi avois-je réservé pour la fin de mon entreprise sur la Méditerranée, le travail à faire dans l'Archipel, où tous les moyens astronomiques & géodésiques ne pouvoient suffire, ni même se pratiquer, & où les horloges marines devoient remplir mon objet avec plus d'exactitude & de célérité dans l'exécution, avantage qu'elles auront toutes les fois qu'on aura à déterminer les positions respectives d'une grande quantité de lieux peu distans les uns des autres.

Méditerranée, jusqu'à l'exécution des horloges marines.

C'est encore ce qui me fit concevoir l'espérance, en embarquant dans mes deux dernières campagnes, des horloges marines pour la Navigation, de rencontrer au milieu des opérations de guerre, des occasions de les employer aussi utilement pour la Géographie, soit en donnant quelque suite à mes premiers travaux sur les côtes de l'Amérique septentrionale, soit en ajoutant quelques déterminations à celles des Antilles & des débouquemens de Saint-Domingue, dont nous avions déjà l'obligation à M.rs de Fleurieu, de Verdun, de Borda & Pingré.

La première longitude que l'horloge marine, *n.° 3*, me donna le moyen de déterminer en 1778, à notre arrivée avec M. le Comte d'Estaing aux côtes de l'Amérique septentrionale, fut celle du cap Hinlopen, à l'entrée de la Delaware, le 7 Juillet, de $77^d\ 33'$. On sera sans doute étonné de m'entendre rapporter cette longitude, dans l'idée que c'est sur la foi d'une horloge marine, sachant que je n'avois pu vérifier sa marche depuis le 9 Avril à Toulon, & que la confiance dans cet instrument seroit trop hasardée, après quatre-vingt-neuf jours, pour une détermination géographique absolue; mais l'éclipse de Soleil du 24 Juin, que j'avois exactement observée à la mer, comparée aux correspondantes en Europe, a fait du Vaisseau un point fixe bien déterminé, d'où j'ai pu partir pour y rapporter mon observation de longitude, faite treize jours après devant le cap Hinlopen.

Exemples de leur application à la Géographie. Longitude du cap Hinlopen, à l'entrée de la Delaware.

Le premier contact intérieur de Vénus, observé le 3 Juin

1769 à Philadelphie, par M.[rs] Ewing & Prior *(e)*, donne la longitude de cette ville, à l'occident de Paris, de 77^d 36′ *(f)*.

On a trouvé, par des meſures géodéſiques & des directions, que la Tour-à-feu du cap Hinlopen eſt à l'eſt de Philadelphie, de 3′ 30″.

Donc longitude du cap Hinlopen, 77^d 32′ 30″, ce qui ne diffère que d'une demi-minute de celle que j'ai déterminée par les horloges marines.

On trouveroit une plus grande différence ſi l'on adoptoit la longitude de Philadelphie, telle que M. Ewing l'établit d'après quelques éclipſes de ſatellites de Jupiter, obſervées en 1767, 1768 & 1769, par lui-même, & par M.[rs] Prior, Thompſon, Pearſon, &c. car en comparant ces Éclipſes aux calculs du Nautical-almanach, corrigés par quelques obſervations de Gréenwich, M. Ewing conclut que Philadelphie eſt à l'oueſt de Gréenwich, de 75^d 8′ 45″ *(g)*. C'eſt par rapport à Paris, 77^d 27′ 45″; & comme le cap Hinlopen eſt moins occidental de 3′ 30″, la longitude du cap Hinlopen ſeroit, ſelon cette combinaiſon, de 77^d 24′ 15″, ce qui différeroit de ma détermination de 8′ 45″.

Mais il me ſemble que la longitude de Philadelphie, fondée ſur le paſſage de Vénus, doit être préférée à celle conclue par les éclipſes de Satellites, qui n'ont pas eu de correſpondantes directes à Gréenwich ou ailleurs.

Latitude de la tour-à-feu de la Delaware.

La latitude de la Tour-à-feu de l'entrée de la Delaware, d'après ma hauteur méridienne du Soleil, obſervée à bord au mouillage, fut de 38^d 45′ $\frac{1}{2}$.

Différence en longitude entre la tour de la Delaware & celle de Sandy-Hook.

Ayant paſſé de la baie de la Delaware à la rade en dehors de Sandy-Hook près New-York, j'eus occaſion d'y vérifier la marche de l'horloge, & par-là d'établir avec préciſion la différence en longitude de la Tour-à-feu de Sandy-Hook

(e) Les obſervations de M.[rs] Ewing, Prior, &c. ſe trouvent dans le premier tome des Tranſactions américaines de Philadelphie.

(f) D'après les calculs de M. Pingré, Mémoires de l'Académie, 1772, première partie, *page 409*.

(g) Tranſact. américaines, t. I.[er]

avec le cap Hinlopen & la Tour-à-feu de la Delaware, de 59 minutes $\frac{3}{4}$. Il résulte par conséquent de cette différence que la longitude absolue de Sandy-Hook est de 76^d 33′.

Mais on trouve par les plans, que New-York est moins occidental que la Tour de Sandy-Hook, de 1′ 30″.

Donc la longitude de la ville de New-York, sera de 76^d 31′ 30″.

On avoit déjà, pour déterminer la longitude de New-York, trois émersions & une immersion du premier satellite de Jupiter, observées par M. Burnet. M. Bradley en avoit conclu, en comparant deux de ces émersions aux Tables corrigées par des observations faites par lui vers le même temps, que New-York étoit à l'ouest de Londres, de 74^d 4′ *(h)*, c'est-à-dire, du méridien de Paris, 76^d 29′$\frac{1}{2}$.

Mais en comparant les quatre observations de M. Burnet, aux Tables de M. Wargentin, corrigées par les observations les plus voisines, faites en Europe, on trouve la longitude de New-York à l'ouest de Paris, de 76^d 31′, ce qui ne diffère que d'une demi-minute de celle que je lui assigne par les horloges marines.

Latitude de la tour de Sandy-Hook.

La latitude de la Tour-à-feu de Sandy-Hook, conclue de trois hauteurs méridiennes exactes, est de 40^d 25′.

Latitude de l'entrée de la rade de Boston.

La latitude de Boston aux ruines de la Tour-à-feu qui est sur un îlet de la droite, à l'entrée de la rade de Nantasket, de 42^d 20′ 6″, & celle du Fanal d'alarme, sur le plus haut terrein de la Ville, de 42^d 22′ 11″, résultent des observations que je fis avec mon quart-de-cercle astronomique, de plus de 2 pieds de rayon, en Octobre 1778, sur l'île Pettick pendant notre séjour dans cette rade, & que je rapportai à ces deux points par des opérations géodésiques; les Anglois donnoient la latitude de la ville de Boston, de 42^d 25′.

(h) Transactions philosophiques, *N.° 394, page 85.*

Pendant la traversée de l'armée de M. le Comte d'Estaing, du Cap-François de Saint-Domingue à la côte de Georgie, devant Savanah, après avoir débouqué par le canal de Krooked, j'observai le 23 Août 1779, la latitude du Vaisseau, lorsqu'il étoit en vue de Wattelin, petite île voisine de ce débouquement du côté du nord-ouest, mais à environ six lieues plus nord que l'île, suivant l'estime de la distance, par conséquent dans une position trop désavantageuse pour espérer d'en conclure une latitude exacte de cette île; je la déduisis néanmoins de $24^{d}\ 7'\frac{3}{4}$ pour le plus haut de l'île: on ne se dissimule pas, en effet, que cette latitude peut-être affectée de toute l'erreur qu'il est difficile d'éviter dans l'estime d'une si grande distance; mais la différence considérable de cette latitude avec celle de la Carte de M.[rs] de Verdun, de Borda & Pingré, m'engage à la produire, d'autant que ces Messieurs n'avoient aucune observation pour la déterminer *(i)*.

Latitude de l'île de Wattelin, au débouquement de Krooked.

L'armée étant arrivée devant la Tour-à-feu de l'île Tibée, à l'entrée de la rivière de Savanah, je déterminai par les observations des 9 & 10 Septembre, la différence en longitude entre le Cap-François, île de Saint-Domingue, & cette Tour, & je la trouvai à l'ouest, de $8^{d}\ 38'$.

Longitude de la tour-à-feu de Savanah.

La latitude de la même Tour, par trois hauteurs

Latitude de cette Tour.

(i) Depuis la lecture de ce Mémoire, & avant son impression, M. le Comte de Lage de Volude, Enseigne de Vaisseau, m'a communiqué une observation de latitude, qu'il eut occasion de faire le 13 Juillet 1784, devant la pointe sud-est de l'île de Wattelin, n'en étant qu'à une lieue de distance, & presque est & ouest; il fixa la latitude de cette Pointe à $23^{d}\ 54'\frac{2}{3}$, ce qui, d'après son estime, donneroit pour le plus haut de Wattelin, $24^{d}\ 0'\frac{2}{3}$, ou 7' de moins que par mon observation, faite à une grande distance; à la vérité l'on remarque qu'au jour de l'observation de M. de Lage, le Soleil étoit élevé de $87^{d}\ \frac{1}{2}$, & l'on sait combien une telle hauteur méridienne est difficile à bien observer; cependant, comme ma latitude, rapportée à la pointe sud-est, que détermina M. de Lage, surpasse celle de la Carte des débouquemens de Saint-Domingue, de M.[rs] de Verdun, de Borda & Pingré, de $12'\frac{1}{3}$, & que celle de M. de Lage est aussi plus grande de $6'\frac{1}{3}$, il paroît certain qu'il faut augmenter sur cette Carte la latitude de la pointe sud-est de Wattelin, au moins, de cette dernière quantité, ainsi que l'étendue de l'Isle, sur-tout du nord au sud.

méridiennes du Soleil, observées à bord, & exactes, est de $32^d\ 0'\ \frac{3}{4}$.

En Juin 1781, ayant été chargé par M. le Comte de Grasse, de croiser au vent de Tabago, avec une division dont il m'avoit confié le commandement, afin de l'avertir de l'arrivée de l'armée ennemie, pendant qu'il étoit mouillé avec la sienne sous l'île qui venoit d'être conquise, j'eus le bonheur de remplir ma commission avec succès; mais je ne trouvai plus d'occasion de déterminer la longitude de cette île que le 10 Juin, lorsque la pointe de Sable qui en est l'extrémité sud-ouest, me restoit au sud-est & à environ 7 lieues $\frac{2}{3}$ de distance; je conclus de mon observation que cette pointe est 20' à l'est du Fort-royal de la Martinique: mais cette position est bien désavantageuse, relativement à une pointe aussi basse, dont la véritable extrémité m'étoit dérobée par la grande distance.

Longitude de l'extrémité sud-ouest de Tabago.

Le 11 Juin, la pointe nord-est de la Grenade me restant au nord-nord-ouest, je fis une observation pour en déterminer la longitude, & je trouvai qu'elle étoit de 35 minutes à l'ouest de Fort-royal de la Martinique.

Longitude de l'extrémité nord-est de la Grenade.

L'Armée ayant ensuite mouillé à la rade du Fort-royal de la Grenade, je trouvai par mes observations du 13 & du 14 Juin, que ce Fort est à l'ouest de celui de la Martinique, de 42 minutes $\frac{1}{4}$, & que la pointe des Salines à l'extrémité sud-ouest de l'Isle est à l'ouest du Fort-royal de la Martinique de $45'\frac{3}{4}$.

Longitude du Fort royal de la Grenade, & de l'extrémité sud-ouest de cette Isle.

En partant du Cap-François de Saint-Domingue au commencement d'Août, pour la grande expédition de Virginie, je déterminai, le 6 de ce mois, en passant devant la Tortue, la différence en longitude de l'extrémité Est de cette petite Isle avec le Cap, & je trouvai qu'elle en est à 25 minutes $\frac{1}{4}$ du côté de l'ouest: l'observation fut faite lorsque le Vaisseau étoit presque nord & sud de l'objet déterminé, par conséquent dans la direction la plus avantageuse. Cette détermination, ajoutée à celle semblable que M.rs de Verdun, de Borda & Pingré avoient déjà donnée, de $0^d\ 44'$, pour l'extrémité ouest,

Longitude de la Tortue, au nord de Saint-Domingue.

fait trouver dans la différence des deux résultats, la longueur de l'Isle de 17 milles $\frac{1}{2}$, & elle me parut être telle.

Passage de l'armée par le vieux Canal au nord de l'île de Cube.

M. le Comte de Grasse, déterminé par un motif très-important, ne sortit pas par les débouquemens ordinaires de Saint-Domingue, il passa par le vieux canal, le long de la côte du nord de l'île de Cube, passage très-étroit & difficile par beaucoup de haut-fonds dont on est obligé de passer fort près, & qui ne sont indiqués que par de petites Isles si basses, qu'on n'en a connoissance que par leurs arbres, qui semblent presque sortir de la mer; & comme la terre de l'île de Cube dans cette partie est également basse, on ne la voit pas davantage.

Les Cartes françoises & angloises varient sur les noms & sur les gisemens de ces petites îles; j'ai pris pour la Caye Romaine la seule qui soit bien visible & reconnoissable; on l'aperçoit très-distinctement de deux à trois lieues de distance, son étendue est d'environ une lieue de long dans la direction sud-est & nord-ouest; & comme elle précède & annonce le plus étroit du vieux Canal, où tous les Géographes s'accordent à placer une autre petite île qu'ils nomment *Caye-confite*, à environ cinq lieues du nord-ouest au nord-nord-ouest de la Caye romaine, la détermination de la latitude & de la longitude de celle-ci, qui est la seule visible, devenoit très-essentielle pour la sûreté du passage.

Latitude de la petite île Caye romaine, à la côte nord de l'île de Cube. Sa longitude.

J'observai la latitude de son extrémité sud-est, de $22^d\ 1'\frac{1}{2}$, par deux bonnes hauteurs méridiennes du Soleil, des 13 & 14 Août; & la différence en longitude de la même pointe avec le Cap-François de Saint-Domingue, de $5^d\ 21'\frac{3}{4}$ dont elle est à l'ouest. L'observation fut faite le 14 au soir, lorsque le Vaisseau étoit exactement dans le méridien de la pointe, & à moins d'une lieue de distance.

La route du passage par le vieux canal au nord de la côte de l'île de Cube, fut terminée le 17 devant le port de Matance. C'est de la vue de ce Port, ou pour mieux dire de la montagne isolée qui en est assez près vers le sud, que prennent leur point de départ les Vaisseaux qui veulent

débouquer

débouquer par le canal de Bahama; quelques-uns le prennent cependant de la pointe d'Icaque, qui est à neuf ou dix lieues plus à l'est.

Je déterminai la longitude de la pointe ouest de l'entrée du Port de Matance, que je distinguois très-bien, n'en étant qu'à une lieue deux tiers vers le nord-nord-est, & je trouvai que cette pointe est à l'ouest du Cap-François, de $9^d\ 18'\ \frac{1}{4}$, & qu'elle est à l'ouest de la pointe sud-est de la petite île Caye Romaine, de $3^d\ 56'\ \frac{1}{2}$. Longitude du port de Matance, au nord de l'île de Cube.

Le lendemain me trouvant encore devant ce port, mais trop au large pour distinguer les pointes de l'entrée, je fis une nouvelle observation de longitude, que je rapportai au Pain-de-Matance, dont je jugeai que j'étois à environ six lieues au nord-est quart de nord; & je trouvai que la différence en longitude de cette montagne avec le Cap-François, est de $9^d\ 18'\ \frac{1}{2}$ à l'ouest. Longitude du pain de Matance.

La longitude de Matance qui varie beaucoup dans les diverses Cartes, sans doute par l'incertitude des moyens employés pour l'établir, diffère considérablement de ma détermination; je suis cependant rassuré sur son exactitude, par l'accord des résultats de mes deux observations, d'autant qu'à mon arrivée à la baie de Chésapeak, la marche de l'horloge marine fut vérifiée & retrouvée la même qu'elle étoit au Cap-François.

C'est encore sur cette conformité que, malgré la loi que je m'étois faite d'exclure toute détermination qui dépendroit d'un long intervalle de temps depuis la vérification des horloges, je hasarde, quoiqu'après trente-quatre jours écoulés, de donner la différence en longitude du cap Henri à l'entrée de la baie de Chésapeak avec le Cap-François, de $4^d\ 13'\ \frac{1}{2}$ à l'ouest, par une observation faite le 5 Septembre au matin, pendant que l'on voyoit l'armée ennemie qui venoit pour nous attaquer, & que nous combattimes dans la journée. Longitude du cap Henri, à l'entrée de la baie de Chésapeak.

La latitude du cap Henri que j'ai établie sur plusieurs hauteurs méridiennes du Soleil, observées à bord, est de $36^d\ 57'$. Sa latitude.

Longitude de la ville de Basse-terre à Saint-Christophe.

L'expédition de Saint-Christophe me fournit l'occasion de déterminer la différence en longitude de la ville de Basse-terre, avec le Fort-royal de la Martinique ; je la trouvai de $1^d\ 43'\ \frac{1}{2}$ à l'ouest, par deux observations des 13 & 17 Janvier 1782, faites sur le Vaisseau mouillé à demi-lieue au sud de cette ville.

Sa latitude.

J'en établis aussi la latitude de $17^d\ 19'\ \frac{1}{2}$, sur neuf hauteurs méridiennes du Soleil, également observées à bord.

Longitude de la ville des Rozeaux, à la Dominique.

L'armée revenant de Saint-Christophe à la Martinique, je me trouvai le 25 Février à peu-près au sud-quart-sud-ouest & à la distance de deux lieues un tiers du milieu de la ville des Rozeaux à la Dominique ; je déterminai sa différence en longitude avec la ville de Basse-terre de Saint-Christophe, de $1^d\ 17'$ à l'est.

A la fin de Mai 1782, j'eus le commandement d'une Escadre, avec laquelle je fus chargé d'escorter un grand convoi du Cap-François de Saint-Domingue à l'Orient, & débouquant le 3 Juin par les îles Turques, j'eus l'occasion favorable d'observer la différence en longitude de la plus méridionale de ces îles, nommée *Sand-Key*, ou *Caye-de-sable*, avec le Cap-François ; mais comme l'on pourroit craindre que cette dernière détermination ne fût affectée de l'erreur énorme en longitude trouvée à l'attérage de l'île de Groix, en la supposant progressive durant toute la traversée, au lieu d'être instantanée, comme j'ai dit que je me croyois fondé de le présumer, je m'abstiens de la publier jusqu'à ce qu'elle ait été vérifiée.



MÉMOIRE

Sur quelques particularités de la ſtructure de la moelle de l'Épine, & de ſes enveloppes.

Par M. SABATIER.

LA ſtructure du cerveau & celle de ſes enveloppes, ont été autrefois l'objet de mes recherches : les particularités qu'elle m'a préſenté ſont conſignées dans un Mémoire imprimé parmi ceux des Savans Étrangers, *Volume VII.* Je me propoſois dans le temps de ſoumettre la moelle de l'épine à un ſemblable examen : les circonſtances où je me trouvois ne me permirent pas de ſuivre ce travail, qui exige des diſſections nombreuſes & pénibles; je viens de le reprendre, & les remarques qui en ſont le fruit, m'ayant paru mériter l'attention des Anatomiſtes, j'ai cru devoir les leur communiquer dans un nouveau Mémoire qui ſervit de ſuite à celui que j'ai donné précédemment.

La moelle de l'épine eſt le prolongement de la moelle alongée, dont elle ne diffère que par ſes dimenſions & par le lieu qu'elle occupe : elle deſcend depuis le grand trou occipital juſqu'au bas de la ſeconde vertèbre des lombes : ſa forme eſt preſque cylindrique ; cependant au col elle eſt légèrement aplatie de devant en arrière, & le long du dos on la trouve en quelque ſorte quadrangulaire, étant auſſi un peu aplatie ſur les côtés. Sa groſſeur varie dans les diverſes parties de ſon étendue; après avoir été d'abord aſſez mince, on la voit groſſir vers la partie moyenne du col, diminuer de volume au-deſſous de la première vertèbre du dos, redevenir plus groſſe vis-à-vis la dernière, & s'amincir de nouveau pour ſe terminer en une pointe, de l'extrémité de laquelle part un cordon membraneux, vaſculaire & tranſparent, formé par la pie-mère, lequel deſcend au milieu des nerfs qui conſtituent

la queue de cheval, jufqu'au-deffous de la partie moyenne de l'os facrum, où il s'implante après s'être partagé en trois filamens très-diftincts.

La moelle de l'épine paroît faite de deux gros cordons fitués à droite & à gauche, & adoffés dans toute leur longueur; elle préfente en effet en devant & en arrière un long fillon, plus remarquable en haut qu'en bas, & plus facile à diftinguer à fa face antérieure qu'à la poftérieure, où on ne peut l'apercevoir qu'après avoir incifé la pie-mère dont elle eft couverte. Ces fillons font cachés par les artères & les veines fpinales, qui ferpentent fur les deux faces de la moelle, & d'où partent des ramifications nombreufes qui s'y enfoncent & qui s'y perdent. Lorfqu'on en écarte les bords, on y aperçoit comme des fibres qui vont d'un côté à l'autre, & que M. Petit, de Namur, a cru voir fe croifer, & offrir la preuve fenfible de l'entre-croifement des nerfs à leur origine, déjà préfumé depuis long-temps par la conftance avec laquelle les accidens qui dépendent de la léfion du cerveau & de fes parties, fe manifeftent du côté du corps oppofé à celui qui a été bleffé.

La néceffité de rendre raifon de ce phénomène a fans doute fait adopter fans trop d'attention l'obfervation dont il s'agit, puifque M. de Haller eft le feul qui ait dit que les fibres de la moelle de l'épine ont une direction tranfverfale. Je vais plus loin, & crois pouvoir affurer non-feulement que ces fibres ne fouffrent pas d'entre-croifement, mais encore qu'elles n'exiftent pas. Elles ne me paroiffent être autre chofe que le réfultat de l'efpèce de déchirure que fouffre la moelle de l'épine, par la tenfion des vaiffeaux qui la pénètrent. Ces vaiffeaux enfermés dans le prolongement de la pie-mère qui fe gliffe dans fes fillons, y font difpofés parallèlement les uns aux autres & dans une direction perpendiculaire à celle de la moelle; de forte que ne pouvant s'étendre comme elle, ils en coupent la fubftance en autant de parties qu'il y a d'intervalles qui les féparent.

Cette fubftance, en apparence affez ferme, eft cependant d'une molleffe extrême; quand on fait une ouverture à la pie-

mère qui lui ſert d'enveloppe immédiate, elle en ſort ſous la forme d'une bouillie aſſez épaiſſe, & ſemblable à de la crême : on y diſtingue une partie blanche & médullaire qui en fait l'extérieur, & une partie griſâtre qui eſt placée intérieurement, la première beaucoup plus abondante que la ſeconde. Il eſt difficile d'aſſigner d'une manière préciſe le lieu que celle-ci occupe & la forme qu'elle affecte ; on dit qu'elle repréſente un croiſſant, dont la convexité eſt tournée en devant. Mes obſervations à cet égard ne répondent point à celles des autres Anatomiſtes : il me ſemble en effet qu'elle approche aſſez de celle d'un H majuſcule, dont les branches droite & gauche ſeroient courbées de manière à ſe regarder par leur convexité, & à préſenter leur concavité vers les parties latérales de la moelle.

Pour mieux concevoir la diſpoſition dont il s'agit, il faut remonter au développement dont cette moelle eſt ſuſceptible. Si après avoir inciſé la pie-mère le long de ſon ſillon antérieur, on écarte les bords de ce ſillon, on parvient à les dérouler pour ainſi dire ſur leur longueur de dedans en dehors, & à obtenir une ſurface plate & large, dont tout le devant eſt couvert d'une couche mince de ſubſtance griſe. Si faiſant la même choſe à la partie poſtérieure, on déroule de même les bords du ſillon qui s'y trouve, on obtient une ſeconde ſurface, que la ſubſtance griſe couvre avec auſſi peu d'épaiſſeur. On croiroit qu'il y a profondément à la partie antérieure & à la partie poſtérieure de la moelle de l'épine, une cavité dont les parois ſont rapprochées & tiennent légèrement enſemble, à peu-près comme celle des capſules atrabilaires ou des glandes ſur-rénales, & telle que l'une eſt ſéparée de l'autre par une cloiſon fort mince & faite par la ſubſtance griſe.

Ces cavités, ſi pourtant on peut leur donner ce nom, n'offrent donc aucun vide, & ne ſont tapiſſées d'aucune membrane particulière ; il ſemble en effet que le prolongement de la pie-mère, que j'ai dit s'enfoncer dans les ſillons de la moelle, n'aille pas fort avant, & qu'il abandonne bientôt les vaiſſeaux ſanguins qu'il paroiſſoit ſoutenir & protéger. Ceux-ci, ramifiés comme à l'ordinaire, ſe perdent bientôt dans la ſubſtance griſe &

intérieure à laquelle ils vont aboutir. Peut-être y en a-t-il d'autres qui, traversant la substance blanche de la moelle par-tout ailleurs qu'à l'endroit des sillons dont il vient d'être parlé, se perdent également dans son épaisseur. S'il en existe, ils sont beaucoup plus petits. Généralement parlant, on peut avancer que les vaisseaux de cette partie sont bien moins gros & moins nombreux, proportion gardée, que ceux qui se distribuent au reste de la masse cérébrale, ce qui répond peu à la quantité & à la grosseur des nerfs qu'elle produit, & à l'abondance du fluide nerveux qui doit s'y porter, si c'est effectivement au moyen d'un fluide que ces organes remplissent leurs fonctions, comme on l'a supposé jusqu'à présent.

La moelle de l'épine, développée comme il vient d'être dit, semble faite de deux larges rubans, l'un antérieur & l'autre postérieur, tous deux composés de substance blanche du côté par lequel ils se touchent, & d'une lame extrêmement mince de substance grise du côté opposé. Si au contraire on applique les deux surfaces grises l'une sur l'autre, elle offre l'image de deux rubans, placés l'un à droite, l'autre à gauche, de couleur grise du côté de leur adossement, & blanche en dehors. Telle est la disposition qu'elle m'a toujours montrée, sans que j'aie jamais pu apercevoir ce vide intérieur, ce ventricule prolongé, que deux Anatomistes célèbres, M.rs Sénac & Portal, ont dit y avoir rencontré. Il est vrai qu'en examinant la moelle alongée dont elle tire son origine, on croiroit voir que la pointe du *calamus scriptorius*, qui descend le long de cette moelle jusqu'à peu de distance du grand trou occipital, se continue en quelque sorte dans la partie de la moelle de l'épine qui occupe le haut du col. Un stilet, appliqué au bas de cette cavité, s'y enfonce assez aisément. L'air que l'on y pousse, à l'aide d'un tube, s'y introduit à quelques lignes de profondeur; mais ces agens ne font qu'écarter la substance molle & tendre qui forme les parois de l'espèce de cavité que j'ai dit régner le long de la face postérieure de la moelle, & les mêmes procédés donneroient les mêmes résultats par-tout, sans prouver l'existence

d'un vide réel qui pût être comparé avec les ventricules du cerveau. Cependant, comme ce vide n'a été obſervé que dans un fort petit nombre de circonſtances, il eſt poſſible qu'il ait quelquefois lieu, & que la ſéroſité ſurabondante s'y amaſſe & produiſe une ſorte d'hydropiſie, dont les progrès occaſionnent une maladie analogue à celle qui eſt connue ſous le nom de *ſpina bifida*, ou au *ſpina bifida* lui-même.

Les nerfs que la moelle de l'épine produit, ſi on en excepte les acceſſoires de Wiliis, en tirent leur origine par deux faiſceaux de fibres, l'un antérieur, l'autre poſtérieur, ſéparés par les ligamens dentelés. Ces faiſceaux, plus gros à la partie inférieure du col que par-tout ailleurs, ſortent de la moelle avec différentes directions. Les ſupérieurs ont ſi peu d'obliquité, qu'on les croiroit placés horizontalement; ceux qui viennent enſuite, s'inclinent de plus en plus, & les inférieurs paroiſſent comme perpendiculaires: quelques-uns, ſur-tout au col, communiquent enſemble par des filets qui ſe biſſurquent à peu de diſtance de leur origine, & dont les rameaux ſe joignent aux deux faiſceaux entre leſquels ils ſe trouvent placés. Les faiſceaux poſtérieurs ont un plus grand nombre de filets, & ſont plus gros que les antérieurs; l'intervalle qui les ſépare de droite à gauche eſt auſſi plus grand.

Chacun des filets dont les nerfs vertébraux ſont formés, reçoit une enveloppe de la pie-mère, & ſe rapprochant les uns des autres ainſi que les faiſceaux qui en réſultent, ils percent l'arachnoïde & la dure-mère plus ou moins loin de leur origine, après avoir gliſſé environ une ligne ou une ligne & demie de chemin dans une eſpèce de fourreau que ces deux membranes leur fourniſſent. Ils ont tous une ouverture particulière, ſéparée par une cloiſon fort mince; la cloiſon qui diſtingue le paſſage du faiſceau antérieur d'avec celui du poſtérieur eſt beaucoup plus remarquable, & dans une direction parallèle à la longueur de l'épine.

Après avoir traverſé cette ouverture, les filets & les faiſceaux ſe réuniſſent pour former un tronc nerveux qui ſe renfle peu après, & produit un ganglion dont la groſſeur

eſt proportionnée à celle du nerf auquel il appartient; mais cette réunion n'eſt qu'apparente, & il eſt facile de voir par la diſſection, que ſi les filets ſe raſſemblent pour donner naiſſance à deux cordons qui ſont la continuation, l'un du faiſceau antérieur & l'autre du faiſceau poſtérieur, ces deux cordons reſtent ſéparés dans l'épaiſſeur du ganglion, & qu'ils vont à leur deſtination ſans ſe confondre. Celui qui appartient au faiſceau poſtérieur va former la branche antérieure & la plus conſidérable des nerfs vertébraux, & celui qui appartient au faiſceau antérieur produit la branche poſtérieure de ces nerfs.

Non-ſeulement la deſtination de ces deux cordons nerveux eſt différente, mais encore ils ſubiſſent diverſes modifications dans le ganglion qu'ils forment. Lorſqu'ils y ſont arrivés, le cordon formé par le faiſceau poſtérieur ſe partage en un nombre de filets plus grand que ceux qui lui ont donné naiſſance, & qui s'écartent les uns des autres, & en même-temps de l'axe du nerf. Les intervalles qui les ſéparent ſont remplis par une ſubſtance comme gélatineuſe, dont la conſiſtance eſt aſſez ferme, d'une couleur griſe-rougeâtre qui détermine celle que le ganglion offre à l'extérieur, & dont la quantité augmente juſqu'au milieu de la longueur du ganglion. Au-delà, cette ſubſtance diminue peu-à-peu en quantité: les filets nerveux qu'elle tenoit écartés ſe rapprochent, & à l'extrémité du ganglion ces filets ſe réuniſſent de nouveau, pour ne former qu'un ſeul cordon comme auparavant.

La nature & l'organiſation de cette ſubſtance me ſont également inconnus; je vois ſeulement qu'elle a une teinte qui annonce la préſence de beaucoup de vaiſſeaux ſanguins, & que l'humidité dont elle eſt pénétrée doit tenir les filets nerveux qui la traverſent, dans une ſoupleſſe qui ſans doute leur eſt néceſſaire. Le cordon produit par le faiſceau antérieur n'éprouve pas les mêmes changemens; il conſerve ſa forme & ſa groſſeur, & ne paroît que lié à la ſurface du ganglion, par la membrane qui leur eſt commune.

Les

Les nerfs acceſſoires de Willis, bien différens de ceux dont il vient d'être parlé, naiſſent de la moelle de l'épine entre la face poſtérieure des ligamens dentelés, & les faiſceaux qui concourent en arrière à la formation des nerfs vertébraux. Ils ſont d'abord fort minces & collés à la moelle, de laquelle ils reçoivent pluſieurs filets. On dit qu'ils s'élèvent quelquefois de la partie inférieure du col, mais je n'ai jamais pu les apercevoir au-deſſous de la quatrième paire cervicale, & ſouvent ils ne paſſent pas la ſeconde. Ces nerfs groſſiſſent à meſure qu'ils montent, & ſe rapprochent en même-temps des ligamens dentelés, de ſorte que quand ils ſont parvenus au voiſinage du grand trou occipital, ils ſe collent à la dure-mère comme ces ligamens, à l'endroit par où ſortent les nerfs ſous-occipitaux. Ils ſont également adhérens à ces nerfs, & leur fourniſſent un filet aſſez gros, lorſqu'ils n'ont pas de racine poſtérieure. Ce filet qui forme un angle ſaillant du côté de l'origine des acceſſoires de Willis, part ſenſiblement de ces nerfs pour aller ſe joindre à ceux de la dixième paire; mais quelquefois cet angle eſt ſaillant du côté oppoſé, ce qui feroit croire que le filet en queſtion vient des nerfs de la dixième paire, pour ſe joindre aux acceſſoires de Willis. Quoi qu'il en ſoit, ces derniers nerfs arrivés au dedans du crâne reçoivent encore de la moelle alongée de nouvelles racines qui en augmentent la groſſeur, & qui ſont d'autant plus longues qu'eux-mêmes ſont plus élevés, parce qu'ils s'en éloignent davantage; enfin ils ſe rapprochent de ceux de la huitième paire ſans s'y joindre, & ſe portent du dedans du crâne au dehors, par une ouverture différente de celle qui donne paſſage à ces nerfs.

La pie-mère & la dure-mère qui ſervent d'enveloppe aux diverſes parties de la maſſe cérébrale, ſe prolongent ſur la moelle de l'épine, & s'enfoncent avec elle dans le canal oſſeux qui la renferme. La première de ces deux membranes ſe montre ſous un aſpect différent de celui qu'elle avoit au-dedans du crâne, & ſur-tout à l'extérieur du cerveau

proprement dit; les deux lames dont elle eſt compoſée, ne ſont plus appliquées l'une à l'autre, & ne tiennent plus par un tiſſu cellulaire au milieu duquel rampent des vaiſſeaux ſanguins: elles ſont écartées, & communiquent à peine par quelques filets; ainſi on peut les regarder comme deux membranes diſtinctes, dont l'intérieure qui renferme immédiatement la moelle, conſerve le nom de *pie-mère*, & l'extérieure celui d'*arachnoïde*, ſoit à raiſon de ſon extrême ténuité, ſoit eu égard aux filets qui s'élèvent de ſes deux faces, & que leur diſpoſition permet de comparer aux filets déliés qui ſervent de trame aux toiles d'araignées.

La pie-mère, plus étendue qu'il ne faut pour contenir la moelle de l'épine, fait ſur ſes parties latérales un pli qui règne de chaque côté ſur ſa longueur, & qui l'attache, d'eſpace en eſpace, au-dedans du ſac de l'arachnoïde & de la dure-mère, par des filets courts & minces. Ces plis membraneux ſont ce qu'on nomme les *ligamens dentelés*, on les voit naître au-dedans du crâne, près le grand trou occipital, derrière & au-deſſus de l'entrée de l'artère vertébrale, & au-devant de l'acceſſoire de Willis. Ils deſcendent enſuite entre les faiſceaux antérieurs & les faiſceaux poſtérieurs des filets dont la réunion forme les nerfs vertébraux. Leurs attaches, ſemblables à autant de dentelures, ſe trouvent dans l'intervalle qui ſépare chacun des nerfs d'avec le ſuivant, & plus près de l'inférieur que du ſupérieur. Ces attaches ont leur ſommet dirigé de haut en bas; leur nombre devroit égaler celui des nerfs cervicaux & dorſaux; cependant elles ſont rarement plus de douze ou quatorze, parce que pluſieurs intervalles en manquent: quelquefois il s'en trouve deux entre deux nerfs, & alors l'une regarde en bas & l'autre en haut. J'ai auſſi trouvé ſur pluſieurs ſujets, que les ligamens dentelés non-ſeulement ſont fort minces à leur partie ſupérieure où ils ſont plus larges, mais encore qu'ils ſont comme percés à jour & en quelque ſorte réticulaires. Cette diſpoſition qui ſe rencontre en beaucoup de valvules, & ſur-tout en celles qui avoiſinent le cœur, telles que la valvule d'Euſtache, celle de la veine coronaire,

& les valvules ſigmoïdes, ne peut être attribuée à aucune cauſe qui agiſſe ſur les ligamens dentelés, & qui faſſe effort contre eux. Elle paroît naturelle & non acquiſe, comme dans les parties dont je viens de parler, en qui l'apparence réticulaire n'a lieu que dans l'âge adulte, & ne ſe rencontre jamais d'une manière auſſi marquée dans la première enfance.

Le ſac que forme l'arachnoïde eſt extrêmement lâche. Il ne renferme pas ſeulement la moelle de l'épine, & le principe des nerfs vertébraux qui ſe diſtribuent au col & au dos; on le voit s'étendre beaucoup au-delà pour embraſſer ceux de ces nerfs qui conſtituent la queue de cheval, & ſe continuer juſqu'à la partie moyenne inférieure de l'os ſacrum. Les filamens qui uniſſent ce ſac à la pie-mère ſont aſſez nombreux à la partie ſupérieure de la moelle, & ſur-tout le long de ſon ſillon poſtérieur. Ceux qui s'élèvent de ſa face externe & par leſquels il tient à la dure-mère, ſont en moins grande quantité principalement en devant. Leur longueur eſt auſſi plus conſidérable, quelques-uns n'ayant pas moins de ſix lignes. Pour le plus ſouvent ils ſe bifurquent à meſure qu'ils s'éloignent de l'arachnoïde. Lorſqu'on ſoulève la dure-mère, ils ſe rompent avec une eſpèce de craquement. L'arachnoïde eſt ſi mince que ſi on n'étoit pas prévenu de ſon exiſtence, on pourroit la méconnoître. J'ai cependant trouvé dans pluſieurs ſujets des concrétions logées dans ſon épaiſſeur, que leur face aplatie & pour le plus ſouvent irrégulière, auroit pu faire comparer à des gouttes de ſuif étendues & figées à la ſurface d'une liqueur tranſparente. Elles ſe ſont montrées principalement à la partie inférieure du dos, & à la partie ſupérieure des lombes; leur nombre étoit de cinq ou ſix, & quelquefois plus; leur largeur étoit différente & leur couleur jaunâtre, de manière qu'avant de les examiner de plus près, j'aurois jugé que c'étoient de légers amas de graiſſe. Mais elles ſe ſont trouvées grenues du côté concave, & d'une conſiſtance ferme & graveleuſe. On peut croire que ces concrétions ſont des accidens, & qu'elles tiennent à quelque maladie, ou peut-être ſimplement à la vieilleſſe,

les ſujets dont je puis le plus ordinairement diſpoſer, étant des hommes fort avancés en âge. Si ce ſont des commencemens d'oſſification, il eſt fort étrange qu'elles naiſſent dans une membrane auſſi mince, & dans l'épaiſſeur de laquelle on aperçoit à peine quelques vaiſſeaux ſanguins.

La forme & l'étendue du prolongement de la dure-mère qui accompagne la moelle de l'épine, ſont preſque les mêmes que celles de l'arachnoïde. Ce prolongement eſt fait des deux lames que la dure-mère préſente au-dedans du crâne. Après avoir eu de fortes adhérences avec les ligamens qui joignent les deux premières vertèbres l'une à l'autre & à l'occipital, il ne tient plus au reſte du canal de l'épine que par un tiſſu cellulaire aſſez lâche, & au-dedans duquel on trouve une ſubſtance graiſſeuſe d'une nature toute particulière. La dure-mère eſt encore aſſujettie le long de l'épine par les enveloppes qu'elle fournit de chaque côté aux nerfs vertébraux de toutes les claſſes. Ces enveloppes forment d'abord une eſpèce de tuyau dans lequel les nerfs ſont enfermés avec peu d'adhérence, & d'où on peut les tirer & les faire ſortir de plus de deux lignes de long; bientôt elles contractent avec eux des adhérences aſſez fortes qui ſe continuent juſque ſur les ganglions où ces enveloppes ceſſent d'exiſter. On diroit qu'elles ſe diviſent à l'endroit des trous de conjugaiſon qui ſe remarquent entre les vertèbres, en deux lames, dont l'une ſe réfléchit ſur ces os, pour ſe confondre avec leur périoſte, & l'autre ſe prolonge ſur les nerfs, comme je viens de l'expoſer.

La dure-mère n'offre point ici de ces grands réſervoirs veineux analogues à ceux qui ſont renfermés dans ſon épaiſſeur au-dedans du crâne, & connus ſous le nom de *ſinus*; mais on voit deſcendre le long des parties latérales antérieures du canal de l'épine, une veine placée de chaque côté ſur la partie poſtérieure du corps des vertèbres, & qui paroît en tenir lieu. Ces veines reçoivent en effet celles qui viennent de la moelle de l'épine, & qui en ſortent avec les nerfs, ainſi que celles qui rampent dans l'épaiſſeur du ſac de la

dure-mère. On les voit monter jusque dans le crâne, où elles communiquent avec les veines qui rampent sur la face externe & sur les parties inférieure & antérieure de cette boîte osseuse, par les trous condyloïdiens antérieurs. Elles s'ouvrent aussi entre chaque vertèbre dans les veines cervicales, dorsales, lombaires, & peut-être aussi dans les veines sacrées. Ce que ces espèces de *sinus* offrent de plus remarquable, c'est qu'ils ont des traverses qui vont de l'un à l'autre, derrière les corps des vertèbres, au-devant du surtout ligamenteux intérieur qui leur sert de périoste. Ces traverses pratiquées à la surface de ces os, ne sont couvertes d'aucune membrane du côté qui les regarde, & s'ouvrent dans des espèces de cavernes creusées dans leur épaisseur. Une disposition aussi singulière & qui n'a pas d'exemple dans le reste de la machine animale, a sans doute son utilité; mais jusqu'à présent il m'a été impossible de la découvrir.



MÉMOIRE

Sur le résultat de l'inflammation du Gaz inflammable & de l'Air déphlogistiqué, dans des vaisseaux clos.

Par M. Monge.

Lorsqu'à la manière de M. de Volta on enflamme un mélange d'air déphlogistiqué & de gaz inflammable par le moyen d'une étincelle électrique, ou par une élévation suffisante de température, les deux fluides se décomposent, & se dépouillent réciproquement d'une très-grande partie de la matière de la chaleur qui entroit auparavant dans leur composition. Ce feu abandonné à lui-même quitte l'état de compression où le tenoit son adhérence pour les autres parties constituantes des fluides, il entre en expansion, il heurte d'une manière mécanique les parois des vaisseaux dans lesquels se fait l'opération, & il les brise lorsque leur résistance n'est pas assez grande; mais lorsque cette résistance est suffisante, le feu, après avoir perdu son mouvement contre les parois, passe par leurs pores comme matière de température, & il échauffe les corps circonvoisins; il se trouve alors du vide dans le récipient qui ne contient plus que les autres substances qui entroient dans la composition des fluides élastiques, & qui sont privées du ressort & de la légèreté que leur communiquoient auparavant la matière de la chaleur & celle de la lumière qu'elles ont abandonnées.

Malgré le grand nombre d'expériences que tous les Physiciens avoient répétées sur l'inflammation dans l'eudiomètre de M. de Volta, on n'avoit encore aucune connoissance sur la nature de ce résidu, parce que les expériences avoient été faites trop en petit, ou parce qu'on avoit opéré les inflammations sur de l'eau qui masquoit ce résidu & empêchoit

qu'on ne pût l'apercevoir *. Ce résultat pouvant fournir une substance nouvelle, ou procurer des lumières sur la composition d'une substance déjà connue, il étoit important de répéter les expériences sur des quantités considérables de fluides élastiques, & dans des vaisseaux clos, secs & à l'abri du contact de toute matière étrangère : c'est ce que j'ai fait, & ce dont je vais rendre compte à l'Académie.

L'air déphlogistiqué que j'ai employé a été produit par la réduction du précipité rouge; & pour que le gaz ne fût point altéré par l'air atmosphérique, j'ai d'abord mis dans une cornue le nitre mercuriel avec du mercure coulant, & j'ai poussé doucement la calcination jusqu'à ce qu'il ne se dégageât plus de gaz nitreux que je recevois dans l'appareil hydropneumatique; alors en augmentant le feu, & avec les précautions qu'exige la combinaison des premières portions d'air déphlogistiqué avec les dernières de gaz nitreux, j'ai obtenu l'air déphlogistiqué sans faire communiquer l'atmosphère avec l'intérieur de la cornue, & j'ai rejeté les premiers produits qui pouvoient contenir l'acide nitreux résultant de la combinaison des deux gaz. Quant à l'air inflammable je me le suis procuré en faisant dissoudre du fil-de-fer bien nettoyé dans de l'acide vitriolique affoibli, & en employant un vase assez grand pour que tout l'air qui m'étoit nécessaire fût produit d'un seul jet, & sans être obligé de l'ouvrir pour y introduire de nouveau ou du fer ou de l'acide, ce qui auroit donné passage à l'air de l'atmosphère & altéré mes résultats.

Après avoir obtenu l'air déphlogistiqué & l'air inflammable, j'ai mesuré le poids d'un volume déterminé de chacun de ces fluides : pour cela, sur un appareil hydropneumatique *ABCD*

* Les Expériences dont il s'agit dans ce Mémoire, ont été faites à Mézières, dans les mois de Juin & de Juillet 1783, & répétées en Octobre de la même année : je ne savois pas alors que M. Cavendisch les eût faites plusieurs mois auparavant en Angleterre, mais plus en petit ;ni que M.rs Lavoisier & de la Place les fissent à peu-près dans le même temps à Paris, dans un appareil qui ne comportoit pas toute la précision de celui que j'ai employé.

(*figure 1*), dans lequel le niveau de l'eau *E F* étoit à une hauteur conſtante & déterminée, j'ai établi un bocal de verre *I* de la capacité de vingt-deux pintes, ouvert par en bas, & garni à ſon ouverture ſupérieure d'un robinet bien luté: à côté de ce bocal étoit fixée une règle *G H*, deſtinée à recevoir les diviſions du volume du bocal en parties qui continſſent chacune la même maſſe d'air, malgré le poids variable de la colonne d'eau ſuſpendue, & je me ſuis procuré ces diviſions de la manière ſuivante. Dans un matras à col étroit, j'ai introduit une pinte d'eau, meſure de Paris; cette pinte contenoit 1 livre 14 onces 7 gros 44 grains d'eau de pluie filtrée, à la température de 12 degrés du thermomètre de Réaumur, & j'ai coupé le col du matras à l'endroit où ſe trouvoit la ſurface de la pinte d'eau; enſuite j'ai aſpiré par en haut l'air du bocal *I* juſqu'à ce que l'eau fût arrivée au robinet, & que j'en euſſe une gorgée dans la bouche; j'ai fermé le robinet, & dans cet état l'eau reſtoit ſuſpendue, & il n'entroit point d'air dans le bocal ni par les luts, ni par le robinet. J'ai plongé dans l'eau de l'appareil le matras renverſé & plein d'une pinte d'air atmoſphérique ſous le poids de l'atmoſphère, j'ai verſé cet air dans le bocal par-deſſous, l'eau s'eſt abaiſſée, & j'ai marqué ſur la règle la hauteur à laquelle s'arrêtoit la ſurface: j'ai recommencé cette opération juſqu'à ce que le bocal fût entièrement vide d'eau, & j'ai eu ſur la règle, des diviſions inégales, & qui indiquoient des volumes inégaux, mais ces volumes contenoient des maſſes égales d'air ſous le poids conſtant de l'atmoſphère: cette opération préliminaire étant faite, j'ai de nouveau rempli d'eau le bocal, & j'y ai introduit par en bas le gaz dont je voulois meſurer le poids.

Enſuite j'ai fait le vide dans un grand ballon *K*, garni d'un robinet bien luté, & dont la capacité étoit à peu-près de 14 pintes; après l'avoir peſé dans cet état, je l'ai viſſé ſur le bocal, & en ouvrant les deux robinets j'ai permis à l'air du bocal d'entrer dans le ballon juſqu'à refus. La marche de la ſurface de l'eau dans le bocal, m'a donné le volume d'air introduit

introduit dans le ballon, & j'en ai eu le poids par l'excès du poids du ballon plein, sur ce qu'il pesoit étant vide : par ce moyen, j'ai trouvé que le baromètre étant à 27 pouces 5 lignes, & la température à 15 degrés du thermomètre de Réaumur.

	Gros.	Grains.
12 pintes $\frac{27}{48}$ de gaz déphlogistiqué pesoient.....	4.	13
12 pintes $\frac{38}{48}$ d'air atmosphérique.............	3.	56 $\frac{1}{2}$
12 pintes $\frac{41}{48}$ d'air inflammable..............	0.	39 $\frac{1}{64}$

Par des recherches antérieures je m'étois assuré que le pied cube d'eau de pluie filtrée, à la température de 12 degrés, pèse 69 livres 6 onces 0 gros 39 grains, & qu'il contient 35,865 fois la pinte qui me servoit alors d'unité, j'ai donc pu former la Table suivante, qui donne les poids de la pinte & du pied cube de chacun des trois fluides élastiques.

NOMS des GAZ.	POIDS de la PINTE.	POIDS du PIED CUBE.
	Grains.	Onces. Gros. Grains.
Air déphlogistiqué..	23 $\frac{193}{201}$	1. 3. 67,36.
Air atmosphérique..	21 $\frac{93}{307}$	1. 2. 44,03.
Air inflammable....	3 $\frac{87}{2468}$	0. 1. 36,86.

Pour produire l'inflammation de l'air inflammable & de l'air déphlogistiqué dans des vaisseaux clos & à l'abri du mélange de toute matière étrangère, je me suis servi de l'appareil suivant.

Dans une caisse hydropneumatique, dont la coupe est représentée par *ABCD (figure 2)*, & dans laquelle le niveau *EF* de la surface de l'eau étoit entretenu constamment à la même hauteur, j'ai établi deux grands bocaux *G* & *H*, semblables à celui qui m'avoit servi à prendre le poids

des gaz, & gradués ſéparément par le même procédé : ces deux bocaux qui devoient ſervir de réſervoirs, l'un à l'air déphlogiſtiqué, l'autre à l'air inflammable, étoient ouverts par en bas, dans le haut ils communiquoient, par des tuyaux de métal garnis des robinets *I* & *K*, à un ballon *M* deſtiné à ſervir de récipient, & dans lequel étoit un excitateur pour produire une étincelle électrique à la manière de M. de Volta ; cet excitateur étoit d'argent, parce qu'une première expérience m'avoit appris que le cuivre ſe calcine par la chaleur des inflammations, & donne de la chaux métallique qui altère la pureté des réſultats. Un troiſième tuyau de métal, pareillement garni d'un robinet *L*, établiſſoit la communication du ballon à une excellente machine pneumatique *O*, deſtinée à faire le vide dans le ballon, & à en extraire les fluides élaſtiques : je m'étois aſſuré de l'exactitude des luts, des ſoudures & des robinets, en tenant l'eau ſuſpendue pendant pluſieurs jours à 18 pouces de hauteur par chaque robinet en particulier, ſans qu'il ſoit entré la moindre quantité d'air dans l'appareil.

Cela fait, pour introduire le gaz déphlogiſtiqué dans le bocal *H*, j'ai ouvert les robinets *L* & *K*, puis en pompant avec la machine pneumatique, j'ai élevé l'eau dans le bocal juſqu'à ce que ſa ſurface fût prête à être cachée par la calotte métallique qui étoit au haut, & j'ai fermé le robinet *K*. Il reſtoit alors un peu d'air atmoſphérique entre la ſurface de l'eau & le robinet : pour enlever cet air ſans faire paſſer de l'eau par le robinet, j'avois introduit dans le bocal un tube de verre *PQR*, recourbé par en bas, j'ai pouſſé l'extrémité ſupérieure de ce tube dans le tuyau de métal juſqu'à ce qu'elle touchât le robinet, & en aſpirant par le bout extérieur *R*, qui étoit garni d'une ſoupape de veſſie, j'ai totalement vidé d'air le bocal *H*; enfin j'y ai introduit le gaz par en bas : de la même manière, & avec les mêmes précautions, j'ai rempli le bocal *G* d'air inflammable.

Tout étant ainſi préparé, les deux robinets *I* & *K* étant fermés, & le robinet *L* étant ſeul ouvert, j'ai fait le vide

dans le ballon *M* auſſi parfaitement qu'il m'a été poſſible, & j'ai fermé le robinet *L*; puis ouvrant le robinet *K*, j'ai laiſſé entrer dans le ballon le douzième de ſon volume d'air déphlogiſtiqué, ce que je pouvois meſurer d'une manière très-préciſe par la marche de la ſurface de l'eau dans le bocal *H*; enſuite ouvrant le robinet *I*, j'y ai laiſſé entrer du gaz inflammable juſqu'à refus, & tous les robinets étant fermés, j'ai tiré une étincelle qui a produit une première exploſion. J'ai laiſſé entrer une ſeconde fois un douzième d'air déphlogiſtiqué, & j'ai eu une ſeconde exploſion, & ainſi de ſuite juſqu'à ſix exploſions conſécutives; le gaz inflammable étant tout employé, j'ai rendu un douzième d'air déphlogiſtiqué, & j'ai laiſſé entrer de nouveau de l'air inflammable juſqu'à refus; mais dans ce cas il en entroit moins que la première fois, tant parce que le ballon étoit extrêmement chaud, que parce que la portion des gaz qui ne pouvoit ſervir à l'inflammation, commençoit à l'engorger, & je n'ai pu obtenir que cinq exploſions conſécutives : en continuant de cette manière, j'ai pu produire cent trente-ſept exploſions.

Le ballon étant alors engorgé, parce qu'il étoit trop petit, j'ai laiſſé tomber le nuage qui le rempliſſoit, enſuite j'ai recommencé l'opération du vide, & pour ne rien perdre de tous les produits, j'ai recueilli dans un appareil pneumatique particulier que j'avois adapté à la pompe, tout l'air extrait du ballon pour le ſoumettre enſuite à l'examen.

Par ce procédé, & en trois ſuites d'exploſions dont le nombre a été porté à trois cents ſoixante-douze, j'ai conſommé

145 pintes $\frac{91}{144}$ d'air inflammable
Et 74 pintes $\frac{9}{16}$ d'air déphlogiſtiqué.

Le poids de ces gaz, ſi leurs denſités avoient été les mêmes que lorſque je les peſai, auroit été

	onces.	*gros.*	*grains.*
Pour l'air inflammable..........	0.	6.	10,03.
Pour l'air déphlogiſtiqué........	3.	0.	58,53.
TOTAL.........	3.	6.	68,56.

Mais pendant les explosions le poids de l'atmosphère étoit diminué, & sa hauteur moyenne n'étoit plus que de 26 pouces 11 lignes, la température de l'appartement étoit encore la même. Il faut donc diminuer le poids total des deux airs dans le rapport de 27 pouces 5 lignes à 26 pouces 11 lignes; car quoique les différens fluides élastiques ne soient pas tous également dilatables par la chaleur, il est très-probable qu'ils sont tous compressibles suivant la même loi, du moins dans l'état moyen, c'est-à-dire en raison des poids comprimans: d'après cela on trouve que le poids total des airs que j'ai employés, est de 3 onces 6 gros 27,56 grains.

Avant que d'aller plus loin, je rapporterai quelques circonstances qui ont accompagné ces expériences: 1.° chaque explosion occasionnoit une chaleur très-forte, subite, & qui se faisoit sentir d'une manière très-sensible au visage, même à la distance de trois pieds du ballon; j'ai été obligé de mettre de l'intervalle entre les explosions, & de refroidir le ballon avec des linges mouillés pour empêcher les luts de se ramollir, & de laisser échapper les fluides élastiques: 2.° en refroidissant de cette manière le ballon, le fluide qu'il contenoit perdoit sa transparence & présentoit un brouillard très-épais qui disparoissoit sur le champ à l'explosion suivante, parce que les gouttes de liquide qui le composoient, étoient subitement converties en vapeurs par la haute température qu'excitoit l'inflammation: 3.° dans les commencemens de chaque suite d'explosions les étincelles produisoient un certain bruit; mais sur la fin de la suite & lorsque le ballon commençoit à s'engorger sensiblement, ce bruit changeoit de nature, ou plutôt il étoit accompagné d'un sifflement éclatant qui me donnoit de l'inquiétude & me faisoit craindre qu'il ne s'échappât quelque chose par les luts: j'ai été pleinement convaincu par la suite que ce sifflement étoit occasionné par la grande & subite compression qu'éprouvoit le fluide élastique intérieur, en vertu de la haute température à laquelle l'élevoit l'explosion.

Ces opérations étant finies, j'ai déluté le ballon, je l'ai

d'abord peſé avec la liqueur qu'il contenoit, puis j'ai tranſvaſé ce produit, & après avoir bien ſéché le ballon je l'ai repeſé de nouveau, & j'ai trouvé pour différence, 3 onces. 2 gros. 45,1 grains. ce poids eſt celui du produit en liqueur de l'inflammation des deux gaz.

J'ai enſuite peſé tout l'air que j'avois extrait du ballon par les trois opérations du vide, ſon volume étoit de ſept pintes, & j'ai trouvé ſon poids de . . . . 2. 27,91.

Ainſi le poids total des ſubſtances qui réſultent de l'opération, eſt de . . . . 3. 5. 1,01.

& il s'en faut 1 gros 26,55 grains que ce poids ne ſoit égal à celui des gaz que j'ai employés. Cette différence peut venir 1.° de ce que j'ai corrigé les volumes d'airs d'après l'état moyen du baromètre pendant l'opération, tandis qu'il faudroit corriger chaque volume d'après la hauteur du baromètre pendant ſa conſommation particulière: 2.° & principalement de ce que je n'ai pas tenu compte des changemens de température dans les réſervoirs qui ont dû s'échauffer par le voiſinage du ballon, quoique le thermomètre n'ait pas varié ſenſiblement dans l'appartement: 3.° enfin de la perte occaſionnée par la vaporiſation dans chaque opération du vide.

Examen de l'Air extrait du Ballon.

Les ſept pintes d'air que j'ai retirées du ballon, par la machine pneumatique, contenoient un peu d'air fixe: j'en ai agité une partie dans de l'eau de chaux qu'elle a blanchie, & par cette agitation elle a diminué d'un dix-huitième de ſon volume: je l'ai fait paſſer enſuite dans l'eudiomètre de M. de Volta, où elle a détonné par l'étincelle électrique, & par cette opération elle a encore été diminuée d'un cinquième de ſon volume; ce qui prouve qu'elle contenoit un mélange de gaz inflammable & de gaz déphlogiſtiqué. J'ai eſſayé de faire brûler, à l'air libre, le réſidu de cette inflam-

mation, & il a refusé de s'enflammer; mais par son mélange avec l'air nitreux, il a rutilé & s'est encore réduit comme l'air atmosphérique. Il contenoit donc encore à cette époque un quart de son volume d'air déphlogistiqué. Il suit de tout cela que cet air ne peut être regardé comme le produit de l'inflammation, & qu'il est le résultat des impuretés des deux gaz, impuretés qui peuvent venir en partie de l'air du vaisseau dans lequel j'ai fait le gaz inflammable, malgré l'attention que j'ai eue de ne pas recevoir le produit de la première effervescence, en partie de l'eau de l'appareil qui a été agitée plusieurs fois pour transvaser les gaz, enfin de l'eau employée pour affoiblir l'acide vitriolique.

Examen du produit en liqueur.

Cette liqueur, parfaitement transparente, a rougi imperceptiblement le papier teint en bleu par le tournesol, beaucoup moins que celle que j'avois obtenue dans une expérience antérieure, moins encore que la salive. Cette acidité ne peut pas être attribuée à l'air fixe, parce que la liqueur ne précipitoit pas l'eau de chaux, & parce que l'eau distillée, également acidulée par l'air fixe, rendoit sur le champ l'eau de chaux laiteuse; elle blanchit à peine la dissolution d'argent dans l'acide nitreux, & un peu plus sensiblement celle de mercure dans le même acide. Outre sa légère acidité, elle a encore la saveur empyreumatique que prend toujours l'eau dans la distillation; ce résultat doit donc être regardé comme de l'eau pure chargée de la petite quantité d'acide vitriolique qu'entraîne nécessairement avec lui l'air inflammable lorsqu'on le retire de la dissolution de fer.

Une partie de cette eau vient certainement de celle que les deux airs tenoient en dissolution dans leur état aériforme, mais on ne peut pas admettre qu'elle en vienne entièrement, car l'air inflammable & l'air déphlogistiqué ne seroient alors essentiellement composés l'un & l'autre que de la matière du feu & de celle de la lumière, substances qui ne peuvent être rendues coërcibles ainsi qu'elles le sont dans les fluides

élaſtiques, que par leur combinaiſon avec une matière incapable de paſſer au travers des parois des vaiſſeaux.

Il ſuit de cette expérience, que lorſqu'on fait détonner le gaz inflammable & le gaz déphlogiſtiqué, conſidérés l'un & l'autre comme purs, on n'a d'autre réſultat que de l'eau pure, de la matière de la chaleur & de celle de la lumière.

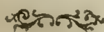
Il reſte à ſavoir actuellement ſi les deux gaz étant des diſſolutions de ſubſtances différentes dans le fluide du feu conſidéré comme diſſolvant commun, ces ſubſtances, par l'inflammation, abandonnent le diſſolvant & ſe combinent pour produire de l'eau qui ne ſeroit plus alors une ſubſtance ſimple ; ou bien ſi les deux gaz étant les diſſolutions de l'eau dans des fluides élaſtiques différens, ces fluides quittent l'eau qu'ils diſſolvoient pour ſe combiner & former le fluide du feu & de la lumière qui s'échappe à travers les parois des vaiſſeaux : & alors le feu ſeroit une matière compoſée. Les deux conſéquences ſont également extraordinaires, & l'on ne pourra ſe décider pour l'une d'elles que d'après des expériences d'un autre genre.

En admettant la première, c'eſt-à-dire, en regardant l'eau comme compoſée des baſes de l'air déphlogiſtiqué & de l'air inflammable, la végétation ſeroit une opération par laquelle la Nature décompoſeroit l'eau & lui enlèveroit la baſe de l'air inflammable pour la combiner avec les végétaux qui en ſont éminemment pourvus, tandis que la baſe de l'air déphlogiſtiqué, à l'aide de la chaleur & de la lumière qui nous viennent du Soleil, reprendroit l'état aériforme pour ſe porter au dehors, comme l'a obſervé M. Inghenouz. L'eau ne ſeroit donc pas néceſſaire à la végétation ſimplement comme véhicule, elle en ſeroit un des matériaux ; & l'on expliqueroit à-la-fois pourquoi cette opération ne peut pas avoir lieu ſans le concours de l'eau, de la chaleur & de la lumière. On rendroit pareillement raiſon d'un grand nombre d'autres phénomènes ; on expliqueroit, par exemple, pourquoi la flamme des végétaux mouille conſidérablement les corps froids qu'elle touche ; pourquoi les tuyaux

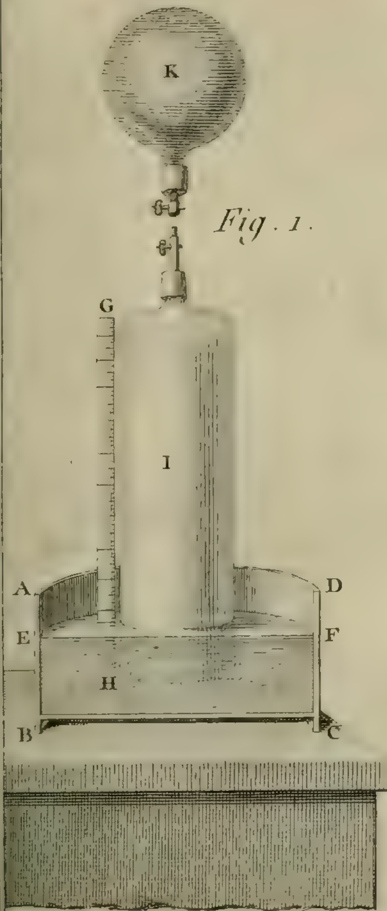
des poëles, quand il fait froid, condenſent une ſi grande quantité d'eau, dont une partie ſort des tuyaux & tache les murailles : on n'attribueroit plus la violence de la détonation de la poudre à canon au dégagement des fluides élaſtiques qu'elle contient, mais à la vaporiſation de l'eau produite par l'inflammation, &c. Mais cette hypothèſe comporte une difficulté qui, dans l'état actuel de nos connoiſſances, eſt difficile à réſoudre.

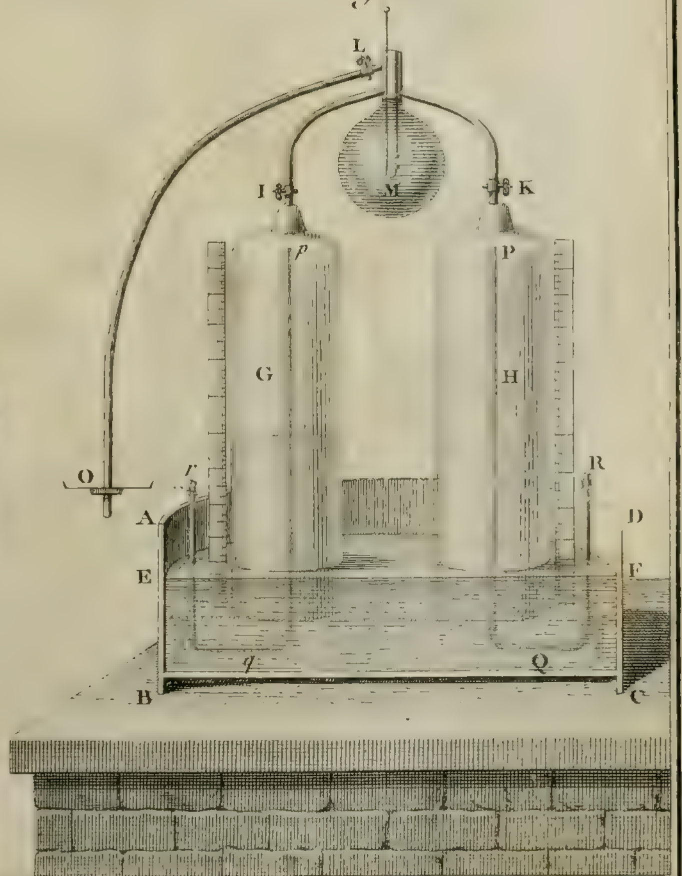
En effet, il eſt confirmé par une foule d'obſervations que le mélange du gaz inflammable & du gaz déphlogiſtiqué n'a beſoin, pour s'enflammer, que d'une ſimple élévation de température, & que cette température dépend de la nature du gaz inflammable, de la doſe du gaz déphlogiſtiqué, & des denſités de ces deux fluides. On éteint une bougie en approchant de ſa flamme un corps très-froid, de même qu'on la ralume, lorſqu'on vient de l'éteindre, en approchant de ſa mèche un corps très-chaud : le vent même n'éteint la bougie que parce qu'il abaiſſe trop la température de la vapeur inflammable qui s'élève de la mèche. Les huiles bouillantes s'enflamment par leur propre température & ſans avoir beſoin du contact d'un corps dans l'état d'ignition. Actuellement, ſi les deux gaz ne ſont autre choſe que les diſſolutions de deux ſubſtances différentes dans le fluide du feu, & ſi dans l'inflammation ces deux diſſolutions ſe précipitent l'une l'autre, en ſorte que les deux baſes, en abandonnant le feu qui les diſſolvoit, ſe combinent pour produire de l'eau, il arrive donc qu'en élevant la température, c'eſt-à-dire qu'en introduiſant du feu dans le mélange des deux gaz, ou pour mieux dire encore, qu'en augmentant la doſe du diſſolvant, on diminue l'adhérence qu'il avoit pour ſes baſes, ce qui eſt abſolument contraire à ce qu'on obſerve dans toutes les opérations analogues de la Chimie.

Il nous manque donc encore beaucoup de lumières ſur cet objet, mais nous avons droit de les attendre, & du temps, & du concours des travaux des Phyſiciens.



MÉMOIRE





Y le Gouaz Sculp


NATURAL HISTORY

MÉMOIRE
SUR L'ÉCLIPSE DE LUNE DU 18 MARS 1783,
Et sur la grandeur de l'ombre de la Lune.

Par M. DE LA LANDE.

L'ÉCLIPSE de Lune du 18 Mars ayant été observée complétement, & par sept Astronomes différens, à Paris, & ayant été presque centrale, m'a paru plus propre qu'une autre à donner la véritable grandeur de l'ombre de la Terre, & par conséquent la valeur de la quantité qu'on y ajoute pour l'effet de l'atmosphère terrestre. Lû le 22 Mars 1783.

Quand on calcule la grandeur réelle de la section de l'ombre terrestre dans une éclipse de Lune, on ajoute la somme des parallaxes de la Lune & du Soleil, & l'on en ôte le demi-diamètre du Soleil, mais on n'a que le demi-diamètre de l'ombre réelle, proprement dite, formée par le globe de la Terre. L'observation a prouvé que l'atmosphère de la Terre augmentoit un peu l'étendue sensible de cette ombre, mais on a varié sur la quantité; les uns ajoutent toujours 20 secondes, les autres une minute; T. Mayer un soixantième de l'ombre, calculée par la méthode précédente. M. le Gentil pensoit qu'il falloit ajouter 40 secondes ou 1′ 20″, suivant que la partie de l'ombre où la Lune entroit, étoit formée par les parties de l'atmosphère voisines de l'Équateur ou des Pôles. *(Mém. de l'Académie 1755)*.

Dans l'Éclipse du 18 Mars, le calcul des Tables m'a donné $58' 5'' + 9'' - 16' 5'' + 42'' = 42' 51''$ pour le demi-diamètre de l'ombre; l'opposition à $9^h 31' 42''$ dans $5^s 28^d 11' 39''$, avec $1' 59''$ de latitude australe, le mouvement horaire sur l'orbite relative, $31' 38'' 6$, l'inclinaison de l'orbite

relative, $5^d\ 43'\ 53''$; le milieu de l'Éclipſe $9^h\ 31'\ 19''$ par les Tables.

Pour comparer l'obſervation avec les Tables, j'ai rapproché ſept obſervations différentes de chacune des quatre phaſes principales, c'eſt-à-dire, celles de M.rs Caſſini, le Monnier, Pingré, le Gentil, Meſſier, Méchain, & la mienne; & prenant un milieu entre celles qui s'écartoient le moins, j'ai trouvé les quatre phaſes de la manière ſuivante.

	PHASES observées par moi.	MILIEU des ſept Observat.	PHASES calculées.	DIFF.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	M. S.
Comm. de l'Éclipſe.	7. 41. 48	7. 41. 43	7. 40. 8	1. 35.
Immerſion totale. . .	7. 41. 16	8. 41. 12	8. 40. 12	1. 0.
Émerſion.	10. 23. 27	10. 23. 21	10. 22. 26	0. 55.
Fin de l'Éclipſe. . . .	11. 23. 22	11. 23. 7	11. 22. 30	0. 37.

Les obſervations que j'ai employées pour ce réſultat moyen, différoient de 29 ſecondes pour la première phaſe, de 22 ſecondes pour la ſeconde, de 54 ſecondes pour la troiſième, de 63 ſecondes pour la quatrième. Par les obſervations du commencement & de la fin, on a le milieu à $9^h\ 32'\ 25''$; & par les deux obſervations intermédiaires, $9^h\ 32'\ 16''$; la différence n'étant que de 9 ſecondes de temps, on a lieu d'être ſatisfait de l'accord de ces obſervations, & l'on peut ſuppoſer que le milieu obſervé, eſt arrivé à $9^h\ 32'\ 20''$, c'eſt-à-dire, $1'\ 1''$ plus tard que par les Tables; de-là je conclus que l'oppoſition vraie eſt arrivée à $9^h\ 32'\ 43''$, temps vrai, la Lune ayant $5^s\ 28^d\ 11'\ 41''$ de longitude; les Tables donnent 34 ſecondes de trop. Mais comme l'obſervation faite au Méridien, vaut encore mieux que celle de l'Éclipſe pour déterminer l'erreur des Tables, ce n'eſt pas là le réſultat principal que je voulois tirer de cette obſervation; il s'agit de la grandeur de l'ombre.

La demi-durée de l'Éclipse totale par l'observation, est de 51′ 4″, & par mon calcul 51′ 7″; la demi-durée entière de l'Éclipse est 1h 50′ 42″, & par mon calcul, 1h 51′ 11″; j'avois donc à cet égard 29 secondes de trop. Comme les observations de l'immersion & de l'émersion me paroissent plus faciles à faire exactement, je ne crois pas devoir prendre un milieu entre ces deux résultats; mais en me rapprochant une fois plus de celui qui comporte plus de précision, je supposerai 12″ d'erreur sur les demi-durées, ce qui fait 6 secondes sur le demi-diamètre de l'ombre, à ôter de la correction de 42 secondes que j'avois employée dans mes calculs: ainsi l'effet de l'atmosphère me paroît devoir être réduit dans cette Eclipse à 36 secondes, pour satisfaire le mieux qu'il est possible aux observations: & comme la parallaxe de la Lune étoit de 58 minutes, qui est sa quantité moyenne entre les extrêmes 54 & 62, cette quantité de 36 secondes me paroît pouvoir suffire dans toutes les éclipses de Lune. Cela diffère peu des 30 secondes qu'emploie M. le Monnier, & des 40 secondes que trouve M. le Gentil, pour les parties de l'ombre qui répondent à l'Équateur.

T. Mayer ajoutant toujours un soixantième, supposoit que l'effet de l'atmosphère étoit plus grand quand la Lune se rapprochoit de la Terre; mais alors l'ombre est plus dense; les rayons dispersés par l'atmosphère de la Terre, sont un effet moins sensible, l'ombre doit être mieux terminée; il me paroît douteux que la correction de l'atmosphère doive augmenter, ainsi je crois qu'on peut employer une quantité constante, jusqu'à ce qu'on ait fait sur des éclipses de Lune dans l'apogée & le périgée, ce que je viens de faire pour la moyenne distance, où je trouve une correction de 36 secondes.

Dans cet effet de l'atmosphère est compris un autre effet beaucoup moindre, celui de la pénombre; une partie du Soleil éclairant encore l'espace qui environne le cône de l'ombre pleine, il en doit résulter une couronne d'environ 5 secondes dans sa totalité, ou égale au diamètre du Soleil multiplié par le rapport des parallaxes. La densité de cette

eſpèce d'anneau va en diminuant depuis ſa partie intérieure juſqu'à ſa circonférence extérieure : elle ne doit être ſenſible pour nous qu'à la moitié de ſa largeur ; ainſi des 36 ſecondes que nous ajoutons au demi-diamètre de l'ombre, il n'y en a probablement que deux ou trois qui dépendent, non de l'atmoſphère de la Terre, mais de ſa pénombre ſur la Lune.

J'ai employé dans ces calculs la parallaxe de la Lune ſous l'Équateur, ce qui doit avoir lieu certainement quand le Soleil eſt près de l'Équateur, & que la Lune traverſe l'ombre preſque par le centre, comme dans cette Éclipſe. Dans les autres cas, on pourroit tenir compte de la figure ſphéroïdique de la Terre, comme je l'ai fait pour les éclipſes de Satellites *(Mém. de l'Acad. 1763)*, mais la différence eſt inſenſible pour les éclipſes de Lune.



MÉMOIRE
SUR
LE CHANGEMENT D'INCLINAISON QUI DOIT AVOIR LIEU DANS LES ORBITES PLANÉTAIRES.

Par M. DE LA LANDE.

Lû le 4 Août 1781.

LORSQUE j'eus reconnu en 1761, la cauſe du mouvement direct dans le nœud de Jupiter & dans celui de ſon quatrième ſatellite, je ſentis qu'il devoit y avoir un changement dans les inclinaiſons, dépendant des attractions réciproques & du déplacement des orbites planétaires (*Mém. de l'Académie, 1762, page 233*); j'en donnai une idée dans le ſixième Livre de mon *Aſtronomie*, & je promis de donner ſur cette matière des détails plus circonſtanciés dans nos Mémoires (*Aſtronomie, 2.e édition, 1771, art. 1381*); c'eſt ce que je me propoſe d'exécuter aujourd'hui en donnant pour chaque Planète le réſultat de l'action de toutes les autres pour le changement d'inclinaiſon.

Je partirai pour cela du mouvement des nœuds que chaque Planète fait retrograder ſur ſon orbite, & dont j'ai donné le calcul (*Mém. de l'Académie 1758, page 261. Mém. 1761, page 404*); mais je changerai la maſſe de Vénus, comme dans mon dernier Mémoire ſur l'obliquité de l'Écliptique (*Mém. 1780, page 307*); car ayant reconnu que l'obliquité de l'Écliptique ne diminue pas de plus d'un tiers de ſeconde par an, d'après les meilleures obſervations, il faut néceſſairement juger de la petiteſſe de la maſſe de Vénus par la petiteſſe de ſon effet, & ſon action ſur l'obliquité de l'Écliptique eſt la plus propre à cette détermination; je ſuppoſerai donc que ſa maſſe, en prenant celle du Soleil pour unité, eſt 0,000001244, ou ſon logarithme

4,09480; & je diminuerai en conséquence d'environ moitié, tous les mouvemens produits par l'action de Vénus.

Soit *B C* l'Écliptique (*figure 1*) *A B* l'orbite de Jupiter, dont *B* est le nœud ascendant; *A C* l'orbite de Mars, dont *C* est le nœud ascendant; *A D* le mouvement rétrograde de l'intersection *A* des deux orbites, lequel est de 14",194 par année sur l'orbite de Jupiter (*Mém. de l'Académie 1758, page 251*); l'orbite *A C* transportée suivant *D E F*, changera en *E* de nœud & d'inclinaison sur l'Écliptique.

Le triangle *B C A* sera changé en *B E D*, l'angle *B* & l'angle *D* étant constans, & la variation de l'angle *C* sera égale à celle du côté *B A*, multipliée par le sinus de l'angle *B*, & par le sinus du côté *B C* (*Astronomie, art. 3848*): c'est-à-dire, que le mouvement du nœud d'une Planète troublée sur l'orbite de la Planète troublante, doit être multiplié par le sinus de l'inclinaison de celle-ci, & par le sinus de la distance entre les nœuds des deux orbites mesurée le long de l'Écliptique, pour donner le changement d'inclinaison de l'orbite troublée; cette règle est générale.

Dans notre exemple, l'inclinaison de l'orbite de Jupiter, est $1^d\ 19'\ 10''$; la différence des nœuds de Jupiter & de Mars, est de $50^d\ 40'$; multipliant 14"194 par le produit des deux sinus, on a 0"2528 pour le changement annuel de l'inclinaison de Mars par l'action de Jupiter en un an, ce qui fait 25"28 par siècle; on verra ci-après une Table des effets de toutes les autres Planètes.

La nouvelle inclinaison *E* doit être plus petite que la première inclinaison *C*, toutes les fois que le nœud *C* de la Planète troublée est moins avancé que le nœud *B* de la Planète troublante, soit que son inclinaison soit plus grande ou plus petite, & quand même le côté *A B* seroit plus grand que 90 degrés; car dans les *figures 2 & 3*, soit que le point d'intersection *F* de l'orbite primitive & de l'orbite troublée (lequel est toujours à 90 degrés du point *A*, à cause de l'égalité des angles *A* & *D*), soit au-dessus ou au-dessous de l'Écliptique *B C*, relativement à l'intersection

A des orbites des deux Planètes, l'Inclinaiſon *E* eſt toujours plus petite que l'inclinaiſon *C* qui avoit lieu auparavant; il n'en eſt pas de même pour le mouvement *CE* des nœuds, qui eſt direct dans la *figure 2*, & rétrograde dans la *figure 3*, cette conſidération doit changer le mouvement des nœuds de Mars par l'action de Saturne, & des nœuds de Jupiter par l'action de Mars, que j'avois aſſignés, dans les *Mémoires de 1761, page 404*; le mouvement total du nœud de Jupiter doit être diminué de 0″02, & celui de Mars augmenté de 0″57, par cette conſidération.

Si le nœud le plus avancé *B* étoit à plus de 90ᵈ du nœud *C*, cela reviendroit au même que le cas précédent où l'arc *A C* eſt obtus.

Voici les Planètes rangées ſuivant l'ordre des longitudes de leurs nœuds, avec l'inclinaiſon de chacune.

	NŒUD ASCENDANT.			INCLINAISON.		
	S.	D.	M.	D.	M.	S.
Mercure..	1.	15.	21	7.	0.	0
Mars....	1.	17.	36	1.	51.	0
Vénus...	2.	14.	26	3.	23.	20
Jupiter...	3.	8.	16	1.	19.	10
Saturne..	3.	21.	31	2.	30.	20.

L'on voit par cette Table, que Mercure ayant le nœud le moins avancé, doit augmenter les inclinaiſons de toutes les Planètes; & que Saturne, dont le nœud eſt le plus avancé en longitude, doit les diminuer toutes; les inclinaiſons règlent les effets que l'on cherche.

TABLE de l'effet de chaque Planète pour changer l'inclinaison de toutes les autres en un siècle.

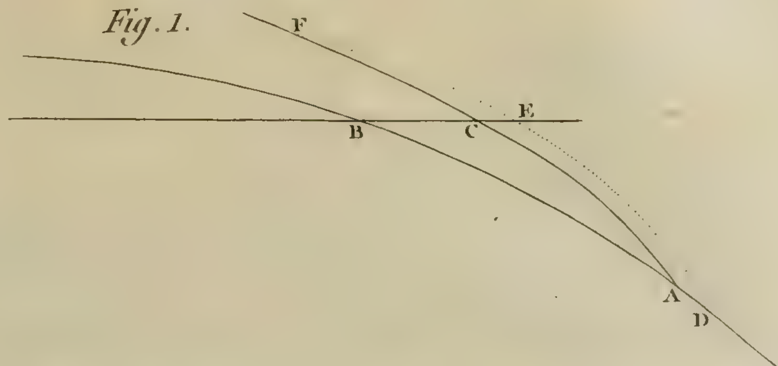
ACTION des PLANÈTES.	SUR L'INCLIN. de MERCURE.	SUR L'INCL. de VÉNUS.	SUR L'INCLIN. de MARS.	SUR L'INCLIN. de JUPITER.	SUR L'INCLIN. de SATURNE.
Mercure.	....	+ 1",190	+ 0",004042	+ 0",001048	+ 0",0001430.
Vénus . .	— 4",183	....	— 1,762	+ 0,004861	+ 0,0008475.
Mars . . .	— 0,001106	+ 0,1326	....	+ 0,1200	+ 0,01506.
Jupiter . .	— 2,894	— 3,844	— 24,85	....	+ 9,449.
Saturne .	— 0,3454	— 0,5560	— 2,867	— 8,576	....
TOTAL .	— 7,423506	— 3,0774	— 29,474958	— 8,450091	+ 9,4650505.

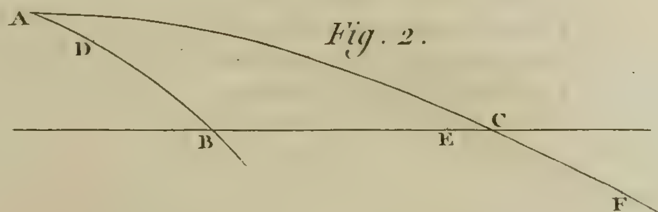
On voit par cette Table, que Mars eſt de toutes les Planètes, celle dont l'inclinaiſon change le plus, puiſqu'elle diminue de 29" ½ par ſiècle; c'eſt en partie pour cela que les obſervations de Boulliaud, faites en 1645, & calculées par M. le Gentil (*Mém. de l'Académie 1757, page 274*), donnent une inclinaiſon plus grande que les obſervations modernes. Cependant, comme pluſieurs autres ſemblent la donner plus petite, il faut convenir que les obſervations du dernier ſiècle ne ſont pas aſſez exactes pour nous faire apercevoir une ſi petite différence; mais le temps n'eſt pas bien éloigné, où l'on pourra faire entrer dans le calcul des Obſervations les petites variations qui ſont l'objet de ce Mémoire.

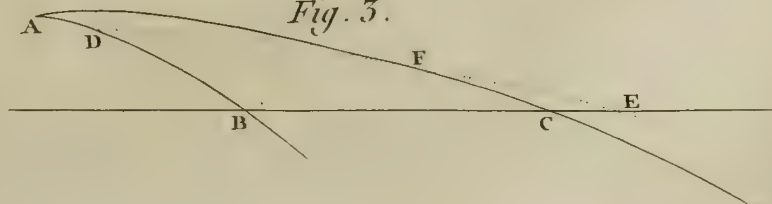


EXTRAIT

Changemens des inclinaisons Planetaires.







Y. le Gouaz Sculpsit.


NATURAL HISTORY.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
Qui décident de la position géographique de la ville & embouchure de la rivière de Saint-Domingue.

Par M. LE MONNIER.

LATITUDE boréale observée à l'embouchure du fleuve au-dessous de Saint-Domingue, dans l'anse, $18^d\ 28'\ 30''$. Fin de l'éclipse du Soleil le 23 Avril 1780, à $3^h\ 12'\ 6'',8$. Lû le 16 Août 1783.

Le commencement de l'éclipse, à cause des nuages, n'a pu être observé à Saint Domingue ni à Paris, où le Soleil a paru néanmoins peu de temps après.

On a vu à Paris proche l'abbaye de Montmartre, sous la latitude de $48^d\ 52'\ 55''$, le coucher du bord supérieur du Soleil à $7^h\ 5'\ 15''$, le 23 Avril 1780; & l'horizon de la station où l'on a observé, rue des Martyrs, paroissoit abaissé en ce lieu de près de 3 minutes.

Or à $6^h\ 46'\ 20''$ du soir, la phase de l'Éclipse étoit de $0^d\ 1'\ 17''\frac{1}{2}$; l'angle parallactique dans le sphéroïde étoit de $60^d\ 13'\frac{1}{4}$; ce qui donne, en supposant la latitude apparente de la Lune au Soleil, $0^d\ 27'\ 1''$ australe, & avançant de $2'\frac{1}{2}$ la longitude tirée des Tables des Institutions astronomiques, $29'\ 37''$ pour la distance apparente des centres de la Lune & du Soleil. Mais si on retranche la phase ci-dessus; savoir, de $1'\ 17''\frac{1}{2}$, de la somme des demi-diamètres apparens du Soleil & de la Lune, supposée $30'\ 47''\frac{1}{2} = 15'\ 56''\frac{1}{2} + 14'\ 51''$, il reste pour la distance des centres $29'\ 30''$, c'est-à-dire, $7''$ moindre que selon les suppositions précédentes & qu'on a faites ci-dessus des $2'\frac{1}{2}$ qui ont été ajoutées à la longitude tirée des Tables: ces mêmes

Tables ne donnoient en cet instant que 12″ pour la latitude australe vraie de la Lune.

J'ai voulu calculer aussi en toute rigueur & dans l'hypothèse du sphéroïde aplati de $\frac{1}{200}$, l'erreur des Tables selon l'observation du commencement de l'Eclipse, & j'ai trouvé l'erreur des Tables — 2′ 30″, vu à Rouen, à 6^h 42′ 1″ de temps vrai, réduisant au Méridien de Paris, & selon M. le chevalier d'Angos, l'Éclipse y a paru commencer : j'ai supposé la latitude du lieu 49^d 26′ 20″, & notre différence en longitude 4′ 59″, ce qui donneroit le commencement de cette Éclipse, observée à Rouen, à 6^h 37′ 2″, parce quon l'avoit, dans l'Écrit envoyé, réduite au Méridien de Paris. L'Eclipse depuis 4′ $\frac{1}{3}$ étoit donc commencée à Rouen, lorsque nous voyons ici, dans les Jardins de M. de Malsherbes, rue des Martyrs, une phase de 1′ $\frac{1}{4}$. C'est ce que je n'avois pas encore remarqué avant que d'entreprendre le calcul pour Rouen; or je ne me suis pas trompé dans la réduction de l'heure de la pendule au temps vrai; car outre que je l'ai comparée soigneusement, à l'aide de ma montre à secondes, à la pendule réglée dans mon observatoire près la place de Vendôme, la pendule de la rue des Martyrs, qui retardoit de 21″ $\frac{1}{3}$ par heure sur le temps vrai, marquoit 6^h 45′ 20″ lorsque j'ai mesuré la phase de de 1 Rev. 22 parties $\frac{1}{2}$ au micromètre, lesquelles valent 1′ 17″ $\frac{1}{2}$ ou 18″. Or, la troisième de mes hauteurs du Soleil m'a donné, à 5^h 50′ 00″, 11^d 7′ à mon nouveau secteur horizontal & niveau à bulles d'air, toutes corrections faites de la part de la réfraction & parallaxe du Soleil, & le bord supérieur a disparu dans l'horizon sensible à 7^h 4′ 7″ de la pendule; d'ailleurs j'ai indiqué suffisamment ci-dessus l'abaissement de l'horizon sensible au-dessous du niveau apparent. Enfin, le Soleil étoit élevé de 2^d 12′ $\frac{3}{4}$ lorsque j'ai mesuré la phase de 1′ 17″ $\frac{1}{2}$, & quoiqu'à Rouen, à l'heure indiquée par M.^{rs} le chevalier d'Angos & Bouin, il eût dû paroître élevé ou de 3^d 23′ $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire près d'un degré plus haut lorsqu'ils ont vu le commencement de l'Éclipse:

or il ne doit reſter ici aucun doute ſur l'effet ou inconſtance des réfractions qui agiſſent également ſur les points de contact, quelles que ſoient nos moyennes réfractions lors du commencement ou de la fin d'une Éclipſe.

L'erreur des Tables des Inſtitutions étant donc établie par mes obſervations, j'ai ſuppoſé, conformément à la Carte publiée par M.rs Verdun, Borda & Pingré, la longitude géographique de l'anſe, au Sud de la ville de Saint-Domingue, $73^d\ 45'$, ou de $4^h\ 55'$ de temps : on va voir qu'il faut la réduire par l'obſervation de la fin de l'Éclipſe, vue à cette ſtation, à $1^d\ \frac{1}{4}$, ou à 5 minutes de moins.

Nous ne connoiſſions pas juſqu'ici aſſez exactement la partie auſtrale de l'île Saint-Domingue, & les Officiers Eſpagnols viennent de découvrir avec des ſextans ou inſtrumens de Marine faits à Londres, que la latitude $18^d\ 28'\ 30''$ eſt moindre d'environ 6 minutes qu'on ne l'a ſuppoſée juſqu'ici. Venons au calcul de la longitude géographique, à $8^h\ 4'\ 52''$ de temps moyen à Paris, les Tables donnent le lieu du Soleil $1^ſ\ 3^d\ 57'\ 55''\ \frac{1}{4}$ (trop avancé d'environ 20 ſecondes ſelon mes obſervations), la longitude de la Lune $1^ſ\ 5^d\ 5'\ 46''\ \frac{1}{2}$, qu'il faut augmenter de $2'\ 43''\ \frac{1}{2}$ pour l'erreur des Tables; & enfin, la latitude boréale $0^d\ 3'\ 30''\ \frac{2}{3}$, que j'ai cru devoir augmenter de 20 ſecondes, c'eſt-à-dire, en l'admettant de $0^d\ 3'\ 50''\ \frac{2}{3}$: l'angle parallactique qui eſt obtus dans le ſphéroïde, a dû être $96^d\ 23'\ 46''$, & comme il a fallu accroître la parallaxe horizontale que j'avois ſuppoſée pour Paris de $54'\ 10''$, d'environ $7''\ \frac{2}{3}$ ſous la latitude de Saint-Domingue; & d'ailleurs la ſomme des demi-diamètres apparens étant $30'\ 57'' = 15'\ 55''\ \frac{1}{2} + 15'\ 1''\ \frac{1}{2}$, on trouve, par la latitude apparente de la Lune à l'égard du Soleil, ſavoir $8'\ 10''$, la différence en longitude $29'\ 51''$, laquelle ajoutée à la longitude apparente du Soleil, donne celle de la Lune $1^ſ\ 4^d\ 27'\ 26''$, plus petite que l'apparente, ſelon le calcul des Tables corrigées de $2'\ 26''\ \frac{1}{2}$, d'où il

s'ensuit qu'on a supposé l'heure de l'observation, réduite au Méridien de Paris, au moins 5 minutes d'heure trop grande, & qu'il faut réduire la longitude géographique à moins de $72^d\ 30'$, au lieu de $73^d\ 45'$ qu'on avoit adoptés, aux Cartes les plus récentes de cette Isle, pour la longitude de la ville de Saint-Domingue.



OBSERVATION SUR LE SEIGLE ERGOTÉ.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

DES Phyſiciens inſtruits & zélés pour le bien de l'humanité, ſe ſont aſſurés des effets funeſtes du grain de ſeigle qu'on nomme *ergoté*, lorſqu'on le réduit en farine & qu'on en fait un uſage journalier en aliment. Pluſieurs ont fait une étude de cette maladie qui attaque particulièrement le ſeigle, pour en connoître la cauſe & la prévenir, s'il étoit poſſible. Lû le 24 Juillet 1782.

La plupart de ces Auteurs l'ont attribuée aux brouillards qui gâtent les grains des épis. M. Tillet combat cette aſſertion, dans ſa Diſſertation imprimée en 1755; il y fait voir que dans un champ voiſin de celui de ſeigle ergoté on n'y trouve ſouvent pas un épi attaqué de l'ergot; que dans un épi de ſeigle attaqué de cette maladie, on y voit plus ou moins de grains ergotés, mais jamais tous; tandis que les brouillards ſe portent aſſez uniformément ſur des champs voiſins les uns des autres, & ſur tous les grains des épis. La maladie devroit être commune dans tous les champs d'une même expoſition, elle devroit s'annoncer principalement dans des lieux bas où les brouillards ſéjournent, & plutôt que dans des terreins élevés.

M. l'Abbé Teſſier, à qui l'on eſt redevable d'un travail ſuivi ſur pluſieurs maladies des grains, adhère plus volontiers au ſentiment qu'infirme M. Tillet, puiſqu'il croit qu'un fonds compoſé d'une terre glaiſeuſe ou marneuſe, une terre qui ſera reſtée plus de temps en friche, & qu'on aura labourée nouvellement, donnera de l'ergot, & que c'eſt à cette nature de terrein commun dans la Sologne, où l'on cultive beaucoup de ſeigle, qu'il attribue la production de l'ergot qui certaines années, eſt preſque général dans cette province.

Ray, *Histor. plant.* M. Tissot, dans son Avis au Peuple *(page 614)*, M. Gleditsch, dans sa Dissertation sur la Nielle, & M. Tillet, semblent plutôt attribuer l'origine de l'ergot à la piqûre de quelques insectes *(a)*.

Je n'entrerai dans aucun autre détail sur l'examen du seigle ergoté, sur les observations auxquelles il a donné lieu; encore moins rapporterai-je les explications différentes des Auteurs & des Physiciens sur ce qui peut lui donner origine: je me bornerai à rapporter un fait qu'il me paroîtroit difficile d'accorder avec le sentiment de ceux qui regardent l'ergot comme étant produit par une humidité résultante d'un terrein qui conserve l'eau des pluies & des brouillards.

Dans la partie de la Beauce près Denainvilliers, que j'habite, où rarement, sur-tout cette année, rencontreroit-on du seigle ergoté, deux grains de seigle se sont trouvés jetés par hasard dans un carré de potager, dont la terre fort sèche, avoit été bien préparée. Près de l'un de ces grains étoit du fumier de pigeons, qui y avoit été déposé depuis six mois ou un an pour y perdre sa force. Ces deux grains ont *tallé* pendant l'hiver, & chacun a produit soixante-dix & même quatre-vingts tiges ou chalumeaux & autant de très-beaux épis; mais celui de ces grains de seigle qui étoit le plus voisin de ce fumier avoit huit chalumeaux, dont le quart au moins des grains de l'épi étoit ergoté, & ces huit tiges se trouvoient placées du côté de ce fumier: ceux du milieu de cette petite gerbe étoient très-sains; ces grains ergotés avoient depuis vingt jusqu'à vingt-quatre & vingt-six lignes de longueur: les tiges & des uns & des autres étoient très-fortes.

Le second grain de seigle, semé par hasard & près de ce premier, étoit aussi fécond en tiges, éloigné de deux pieds environ du fumier de pigeon, avoit tous ses grains sains.

Ce fait me paroît prouver que l'origine de cette maladie ne dépend pas d'un vice dans la semence, puisqu'un grain

---

(a) Linn. animal. Suec. pag. 67, définit cet insecte. *Scarabæus minimus alter florilegus.*

ſeul a donné naiſſance à ces quatre-vingts tiges, dont huit ſeulement portoient du ſeigle ergoté : ne ſemble-t-il pas plutôt qu'elle proviendroit d'un vice dans quelques parties de la fructification de la Plante, du défaut de conformation de quelques-uns des ovaires, ou d'un manque de fécondation de quelques-uns des germes de l'épi ; c'eſt le ſentiment de Geoffroy *(Mém. Acad. 1711).* Ce défaut ou vice dans des parties de la fructification, aura pu provenir, comme le dit Thalius *(b)*, par la trop grande quantité de ſuc qui s'y porte, & cet excédant de ſuc ſeroit peut-être dû à la qualité de celui produit par le fumier de pigeons qui en étoit voiſin: peut-être auſſi l'attribueroit-on à la piqûre d'inſectes, ou à quelqu'autre cauſe encore inconnue, d'autant que l'excroiſſance contre nature du grain de ſeigle ergoté, n'eſt formée que du ſuc propre de la Plante. Je dois me contenter de rapporter l'obſervation, & comme elle eſt iſolée, me garder de tirer aucune concluſion.

(b) Thalius eſt cité par M. Read, dans ſon Traité du ſeigle ergoté.



OBSERVATIONS DE DEUX ÉCLIPSES TOTALES DE LA LUNE, EN 1783.

La première fut observée le 18 Mars au soir; la seconde, la nuit du 10 au 11 Septembre, à Paris, à l'Observatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

Première Éclipse totale de Lune, le 18 Mars.

LE ciel avoit été parfaitement beau & sans nuages, la veille & le jour de l'Éclipse, excepté le soir du 18 Mars, qu'un brouillard léger s'étoit élevé, il augmenta pendant la durée de l'Éclipse, mais vers la fin il avoit considérablement diminué; les observations n'en furent pas moins bonnes.

Pour cette observation, j'ai employé une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer à triple objectif & à grande ouverture, garnie d'un micromètre à fils: j'avois fait grossir cette lunette trente-six à quarante fois le diamètre de l'objet, ce grossissement convenoit pour cette observation, en ce qu'il procuroit beaucoup de lumière, & qu'on pouvoit voir distinctement les taches de la Lune, même à travers l'ombre: j'ai déjà détaillé ces avantages dans l'éclipse totale de Lune de la nuit du 30 au 31 Juillet 1776 (*Mémoires de l'Académie, année 1776, page 441*), le micromètre a servi à mesurer la distance des cornes de l'ombre, le diamètre vertical de la Lune dans l'ombre & hors de l'ombre; il a encore servi à comparer le bord de la Lune à deux Étoiles.

La pendule étoit réglée sur le mouvement des fixes, sa marche

marche fut connue par vingt-une hauteurs correſpondantes du bord ſupérieur du Soleil, priſes à un quart-de-cercle de 18 pouces de rayon fait à Londres par Bird, qui appartient à M. le Préſident B. de S **: ces hauteurs furent priſes avec ſoin & ne différoient entr'elles que d'une ſeconde. Ce quart-de-cercle eſt un des mieux exécutés & du plus habile Artiſte, on peut y ſuſpendre un fil-à-plomb, mais le niveau d'air qui y eſt adapté eſt encore plus commode; par le moyen des vis de l'inſtrument on peut le mettre parfaitement de niveau, & l'y conſerver en tournant l'inſtrument horizontalement: c'eſt l'opération que l'on eſt toujours obligé de faire lorſque l'on veut s'en ſervir pour prendre des hauteurs, ce moyen eſt très-facile, très-expéditif, & c'eſt celui que j'avois employé dans les hauteurs correſpondantes du Soleil que je viens de citer; mais malgré l'accord des hauteurs que j'avois priſes, il me reſtoit quelque ſoupçon d'incertitude ſur cette manière de les prendre; ce ſoupçon ſe trouva fondé dans la ſuite, comme on le verra ci-après. La température du jour, qui n'eſt pas la même le matin que le ſoir, devoit influer ſur l'inſtrument, mais beaucoup plus ſur le niveau, malgré le ſoin qu'on a pris pour en rendre l'intérieur parfaitement cylindrique; la bulle d'air étoit en effet bien plus dilatée le ſoir que le matin: pour connoître ſi des hauteurs priſes de cette manière étoient bonnes ou mauvaiſes, je me déterminai à en prendre à un quart-de-cercle de trois pieds & demi de rayon avec le fil-à-plomb, & au quart-de-cercle de 18 pouces, en employant le niveau. Les hauteurs priſes en grand nombre & avec ſoin, me donnèrent des réſultats différens, plus grands au petit quart-de-cercle qu'au grand: je fis cette comparaiſon en 1783 & en 1784; en voici les réſultats. Le 2 Avril 1783, le quart-de-cercle de 18 pouces donna le midi 2″ 36‴ plus tard qu'au grand quart-de-cercle; le 17, + 1″ 13‴; le 26, + 2″ 23‴; le 1.er Juillet, + 0″ 45‴; le 18 Août, + 1″ 1‴; le 29 Septembre, + 1″ 44‴; le 20 Décembre, + 7″ 0‴; & le 17 de Mai 1784, + 2″ 27‴. Je ne rapporte ces différences que pour faire voir qu'on ne peut

ſe ſervir utilement du niveau, & qu'on doit donner la préférence au fil-à-plomb : ſans cet examen, j'aurois peut-être été long-temps perſuadé qu'en employant ce niveau on pouvoit prendre des hauteurs des Aſtres, & correſpondantes du Soleil avec autant de préciſion qu'avec le fil-à-plomb ; ce niveau étant bien fait, ſolidement attaché à l'inſtrument, & dans une poſition commode. Comme Bird a beaucoup conſtruit de quart-de-cercles de cette manière, j'ai cru devoir prévenir les Obſervateurs qui ſe ſervent du niveau pour prendre des hauteurs : c'eſt pour cela que je ſuis entré dans ces détails.

Les midis du 18, jour de l'Éclipſe, & du lendemain 19, furent obſervés à un inſtrument des paſſages placé ſolidement dans le plan du méridien, de manière que la marche de la pendule fut exactement connue.

TABLE des Obſervations de l'Éclipſe de Lune.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES obſervées.
7. 32. 6	....	Pénombre foible.
7. 38. 5	....	Pénombre très-ſenſible.
7. 41. 54	....	Commencement de l'Éclipſe.
7. 43. 44	1	*Grimaldus* touche l'ombre.
7. 44. 43	1	*Grimaldus* entré.
7. 46. 47	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
7. 52. 2	*A*	*Mare humorum* au bord de l'ombre.
7. 53. 32	5	*Gaſſendus* au bord de l'ombre.
7. 54. 2	3	*Ariſtarchus* au bord de l'ombre.
7. 54. 2	4	*Keplerus* touche l'ombre.
7. 55. 12	*A*	*Mare humorum* à moitié dans l'ombre.
7. 55. 18	4	*Keplerus* à moitié dans l'ombre.
7. 56. 21	4	*Keplerus* entré.
8. 1. 1	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.

Suite de la Table des Observations, &c.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES observées.
8. 2. 1	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
8. 3. 21	11	*Copernicus* à moitié dans l'ombre.
8. 4. 40	11	*Copernicus* entré.
8. 4. 40	15	*Eratosthenes* au bord de l'ombre.
8. 7. 24	16	*Timocharis* au bord de l'ombre.
8. 8. 7	21	*Tycho* au bord de l'ombre.
8. 8. 7	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
8. 9. 7	21	*Tycho* à moitié dans l'ombre.
8. 9. 57	21	*Tycho* entré.
8. 12. 0	....	L'ombre augmentée, on ne voyoit presque plus le bord de la Lune.
8. 14. 24	17	*Plato* au bord de l'ombre.
8. 15. 25	17	*Plato* entré.
8. 17. 57	F	*Mare serenitatis* au bord de l'ombre.
8. 18. 27	24	*Manilius* au bord de l'ombre.
8. 22. 28	25	*Menelaus* au bord de l'ombre.
8. 22. 28	28	*Dionysius* au bord de l'ombre.
8. 22. 58	F	*Mare serenitatis* à moitié dans l'ombre.
8. 25. 57	G	*Mare fœcunditatis* à moitié dans l'ombre.
8. 27. 0	....	L'ombre devient plus claire qu'au commencement de l'Éclipse, on voit tout le disque de la Lune dans l'ombre, & les taches beaucoup mieux à travers l'ombre, que lorsque l'ombre étoit moins avancée sur la Lune.
8. 27. 18	27	*Possidonius* au bord de l'ombre.
8. 28. 0	F	*Mare serenitatis* entré.
8. 30. 26	G	*Mare fœcunditatis* entré.
8. 32. 8	34	*Promontorium somnii* au bord de l'ombre.

Suite de la Table des Obſervations, &c.

TEMPS VRAI.	N.os des TACH.	TACHES obſervées.
H. M. S.		
8. 32. 56	*E*	*Mare tranquillitatis* dans l'ombre.
8. 36. 46	*H*	*Mare criſium* au bord de l'ombre.
8. 37. 46	*H*	*Mare criſium* à moitié dans l'ombre.
8. 39. 34	*H*	*Mare criſium* entré.
8. 40. 55	....	Immerſion totale de la Lune dans l'ombre.
10. 19. 40	....	L'ombre qui couvre la Lune s'éclaircit beaucoup, & continue à s'éclaircir juſqu'à l'émerſion.
10. 21. 22	....	Commencement de l'émerſion.
10. 25. 54	1	*Grimaldus* au bord de l'ombre.
10. 26. 39	1	*Grimaldus* à moitié hors de l'ombre.
10. 27. 3	1	*Grimaldus* quitte l'ombre.
10. 30. 2	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
10. 32. 29	*A*	*Mare humorum* au bord de l'ombre.
10. 35. 41	*A*	*Mare humorum* à moitié hors de l'ombre.
10. 36. 51	3	*Ariſtarchus* au bord de l'ombre.
10. 37. 27	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
10. 38. 37	4	*Keplerus* à moitié hors de l'ombre.
10. 38. 57	*A*	*Mare humorum* quitte l'ombre.
10. 39. 43	4	*Keplerus* quitte l'ombre.
10. 43. 26	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.
10. 44. 9	21	*Tycho* au bord de l'ombre.
10. 45. 4	21	*Tycho* à moitié hors de l'ombre.
10. 46. 7	21	*Tycho* quitte l'ombre.
10. 46. 15	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
10. 46. 45	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
10. 47. 5	11	*Copernicus* à moitié hors de l'ombre.

Suite de la Table des Observations, &c.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES observées.
10. 47. 45	11	*Copernicus* quitte l'ombre.
		L'ombre qui restoit alors sur la Lune étoit d'une nuance égale, mais augmentée d'une teinte plus forte depuis plusieurs minutes ; de manière qu'on ne pouvoit plus voir les taches à travers l'ombre : je les avois vûes assez bien depuis le commencement de l'émersion, & pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
10. 54. 18	15	*Eratosthenes* au bord de l'ombre.
11. 1. 57	24	*Manilius* au bord de l'ombre.
11. 1. 57	*F*	*Mare serenitatis* au bord de l'ombre.
11. 4. 53	25	*Menelaus* au bord de l'ombre.
11. 6. 17	*F*	*Mare serenitatis* à moitié hors de l'ombre.
11. 6. 23	31	*Fracastorius* au bord de l'ombre.
11. 7. 47	*D*	*Mare nectaris* au bord de l'ombre.
11. 9. 46	*D*	*Mare nectaris* à moitié hors de l'ombre.
11. 10. 36	*E*	*Mare tranquillitatis* à moitié hors de l'ombre.
11. 11. 4	*F*	*Mare serenitatis* quitte l'ombre.
11. 11. 48	*D*	*Mare nectaris* quitte l'ombre.
11. 15. 51	34	*Promontorium somnii* au bord de l'ombre.
11. 16. 21	*E*	*Mare tranquillitatis* quitte l'ombre.
11. 18. 1	*H*	*Mare crisium* au bord de l'ombre.
11. 20. 9	*H*	*Mare crisium* à moitié hors de l'ombre.
11. 22. 10	*H*	*Mare crisium* quitte l'ombre.
11. 23. 42	....	Fin de l'Éclipse.
11. 34. 28	....	Reste de pénombre très-légère.

Distances des cornes de l'Ombre.

TEMPS VRAI. H. M. S.	DISTANCE des CORNES. M. S.	DÉTAILS du temps de la mesure des Cornes de l'ombre.
7. 57. 56	25. 44	pendant l'immersion.
8. 11. 1	31. 7	
8. 20. 0	31. 39	
10. 50. 26	31. 51	pendant l'émersion.
10. 53. 43	29. 53	

Diamètres apparens de la Lune, mesurés suivant son cercle horaire.

TEMPS VRAI. H. M. S.	DIAMÈTRE. M. S.	DÉTAILS du temps de la mesure du Diamètre.
8. 45. 25	31. 44	pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
8. 48. 55	31. 38	
8. 51. 55	31. 41	
9. 36. 46	32. 0	
10. 3. 42	31. 54	
10. 16. 10	31. 59	
11. 26. 29	32. 3	après la fin de l'Éclipse.
11. 35. 27	32. 0	

La Lune dans cette Éclipse est restée totalement dans l'ombre $1^h\ 40'\ 27''$; pendant tout le temps que la Lune est restée dans l'ombre, son disque étoit visible : je comparai ses deux bords à deux Étoiles que j'estimai être de septième & de huitième grandeur; l'une & l'autre sur le parallèle de la Lune.

TEMPS VRAI.			DIFFÉR. de HAUTEUR.		ÉTOILES comparées à la Lune.
H	M.	S.	M.	S.	
9.	21.	46	....		1.er bord de la Lune au fil horaire du micromètre.
9.	23.	59	....		2.d bord au même fil; un peu douteux.
9.	35.	55 ½	7.	30	*n* de la Vierge au même fil; inférieur au bord inférieur de la Lune.
9.	37.	12	14.	42	*n* de la Vierge au même fil; inférieur au bord inférieur de la Lune.

A $9^h\ 49'\ 45''$ de temps vrai, deux Étoiles téleſcopiques étoient ſorties de deſſous le diſque de la Lune depuis pluſieurs minutes, elles étoient déjà éloignées du bord.

Pour reconnoître ces Étoiles & en déterminer les poſitions, je les recherchai quatre jours après l'Éclipſe (le 22 de Mars); je fus fort étonné de trouver & de reconnoître que les deux Étoiles que j'avois comparées à la Lune, & que j'avois eſtimé être de la ſeptième & de la huitième grandeur, ſe trouvoient être les Étoiles, la première *n* de la Vierge, ſixième grandeur; & la ſeconde *n*, quatrième grandeur: cette erreur d'eſtime que j'avois faite, provenoit ſans doute du brouillard léger qui exiſtoit alors, & qui diminuoit leur lumière au degré où je les avois eſtimées. Je comparai ces deux Étoiles *n* & *n* de la Vierge à γ, troiſième grandeur de la même Conſtellation, & à deux Étoiles de huitième & neuvième claſſe, que je préſume être les deux Étoiles téleſcopiques qui ont été éclipſées.

ASCENSION DROITE.			DÉCLINAIS. BORÉALE.			GRANDEUR.	NOMS des Étoiles déterminées.
D.	M.	S.	D.	M.	S.		
179.	35.	41	0.	12.	29	9	Étoile qui a dû être éclipſée.
179.	41.	26	0.	27.	20	8	Étoile qui a dû être éclipſée.
181.	53.	26	0.	25.	20	6	*n* de la Vierge, comparée à la Lune.
182.	15.	26	0.	32.	39	4	*n* de la Vierge, comparée à la Lune.
187.	40.	41	0.	15.	19	3	γ de la Vierge, déduite de la Connoiſſ. des Temps : cette dernière ſa déclinaiſon auſtrale.

Auſſitôt que la Lune eut commencé à être éclipſée, il parut ſur l'ombre une légère nuance de couleur rouge qui augmenta avec le progrès de l'ombre; cette nuance de rouge fut conſidérable pendant tout le temps de l'immerſion totale de la Lune dans l'ombre, les parties les plus claires de la Lune préſentoient cette couleur rouge avec plus de vivacité que les parties ſombres appelées *les mers;* ces effets étoient très-ſenſibles à la vue ſimple: j'avois déjà remarqué cette couleur rouge dans des éclipſes précédentes de la Lune, & ſur-tout dans celle de la nuit du 30 au 31 Juillet 1776.

Pendant l'immerſion totale de la Lune dans l'ombre qui dura $1^h\ 40'\ 27''$, le léger brouillard duquel j'ai parlé avoit augmenté, & ce brouillard a pu contribuer pour beaucoup à augmenter la couleur rouge qu'on obſervoit, très-ſenſible & très-apparente ſur l'ombre qui couvroit la Lune: l'ombre, pendant l'immerſion totale, n'étoit pas d'une denſité égale; au commencement de l'immerſion, la partie inférieure étoit aſſez claire, & cette partie claire de l'ombre circuloit autour du centre de la Lune.

L'ombre

L'ombre, pendant la durée de l'Éclipse, étoit bien terminée & mieux que je ne l'avois encore vue dans les éclipses précédentes ; la pénombre très-claire & d'une nuance presque égale, séparée de l'ombre sans confusion, ne laissoit qu'une légère incertitude sur les observations.

Le brouillard & la Lune entièrement éclipsée avoient produit une obscurité très-grande, les lanternes n'étoient point allumées, les voitures dans Paris ne pouvoient plus se voir, elles se rencontroient & l'on craignoit les accidens ; dans ma rue j'entendois, de mon Observatoire, les cris des cochers pour se prévenir : on n'avoit pas prévu à Paris cette grande obscurité, qui eut lieu depuis 8 heures 41 minutes du soir jusqu'à 10 heures 21 minutes, que la Lune commença à sortir de l'ombre.

SECONDE *Éclipse totale de la Lune, la nuit du 10 au 11 Septembre.*

Le Ciel a été parfaitement beau & sans nuages pendant la durée de cette Éclipse, excepté vers sa fin qu'un nuage blanchâtre, mais très-léger, formé au-devant de la Lune, rendoit l'ombre un peu confuse : je parlerai encore de ce nuage dans le détail des Observations.

J'ai employé pour cette Éclipse la même lunette achromatique, le même micromètre que pour l'Éclipse précédente & le même grossissement. Ce grossissement m'a toujours réussi par la grande lumière qu'il procure & la netteté des objets, de manière que j'ai presque toujours vu les taches de la Lune dans les Éclipses à travers l'ombre ; cet avantage m'avoit souvent mis à même de faire de bonnes observations des taches, étant prévenu d'avance de leur sortie dans les émersions de l'ombre : mais dans cette Éclipse je n'ai pas eu le même avantage, l'ombre étoit si obscure que les taches dans l'ombre étoient entièrement effacées, quoique le Ciel fût parfaitement beau & que la lunette grossît peu ; je n'avois pas encore observé dans aucune éclipse de Lune d'ombre

auſſi noire que dans celle-ci, elle reſſembloit à une forte teinte d'encre de la Chine, je ne pouvois voir les taches que lorſqu'elles commençoient à paroître au bord de l'ombre; cet inconvénient a pu rendre les obſervations des taches dans l'émerſion un peu douteuſes.

La marche de la pendule étoit connue par des hauteurs correſpondantes du Soleil priſes le 18 Août & le 29 Septembre, & par les midis obſervés le jour de l'Éclipſe & le lendemain, à un inſtrument des paſſages placé ſolidement dans le plan du méridien.

OBSERVATIONS de l'Éclipſe de Lune.

TEMPS VRAI.			N.os des TACH.	TACHES obſervées.
H.	*M.*	*S.*		
9.	39.	34	....	Pénombre ſur la Lune déjà ſenſible.
9.	50.	32	....	La pénombre bien augmentée.
9.	55.	3	....	Commencement de l'Eclipſe.
9.	58.	42	1	*Grimaldus* au bord de l'ombre.
10.	0.	2	1	*Grimaldus* entré.
10.	3.	21	3	*Ariſtarchus* au bord de l'ombre.
10.	3.	41	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
10.	5.	51	4	*Keplerus* entré.
10.	8.	1	*A*	*Mare humorum* au bord de l'ombre.
10.	8.	1	5	*Gaſſendus* au bord de l'ombre.
10.	8.	57	5	*Gaſſendus* entré.
10.	8.	57	8	*Heraclides* entre dans l'ombre.
10.	11.	10	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
10.	11.	55	*A*	*Mare humorum* entré.
10.	12.	42	11	*Copernicus* entré.
10.	15.	59	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
10.	15.	59	14	*Bullialdus* au bord de l'ombre.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES observées.
10. 18. 41	17	*Plato* au bord de l'ombre.
		L'ombre cendrée, égale & très-épaisse, empêchoit de voir les taches à travers l'ombre; elles se voyoient encore avant cette dernière observation.
10. 19. 29	17	*Plato* entré.
10. 22. 38	*B*	*Mare nubium* entré.
10. 24. 25	*C*	*Mare imbrium* entré.
10. 24. 25	*F*	*Mare serenitatis* au bord de l'ombre.
10. 25. 25	21	*Tycho* au bord de l'ombre.
10. 25. 25	24	*Manilius* au bord de l'ombre.
10. 26. 18	21	*Tycho* à moitié dans l'ombre.
10. 26. 54	24	*Manilius* entré.
10. 27. 9	21	*Tycho* entré.
10. 28. 10	25	*Menelaus* au bord de l'ombre.
10. 29. 49	*F*	*Mare serenitatis* à moitié dans l'ombre.
10. 30. 0	*E*	*Mare tranquillitatis* au bord de l'ombre.
10. 31. 27	28	*Dyonisius* au bord de l'ombre.
10. 32. 47	29	*Plinius* au bord de l'ombre.
10. 34. 46	*F*	*Mare serenitatis* entré.
10. 36. 6	*E*	*Mare tranquillitatis* à moitié dans l'ombre.
10. 37. 46	*D*	*Mare nectaris* au bord de l'ombre.
10. 40. 26	....	L'ombre étoit encore d'une nuance plus forte; on ne pouvoit voir aucune tache à travers l'ombre, & on ne faisoit que soupçonner le bord de la Lune qui étoit dans l'ombre: l'ombre à ce moment devient un peu plus claire, & on commence à apercevoir les taches éclipsées à travers l'ombre. La couleur rouge qui avoit paru jusqu'à ce moment sur la ☾ y avoit été très-foible; elle augmente à mesure que l'ombre devient plus claire.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES observées.
10. 42. 20	*E*	*Mare tranquillitatis* entré.
10. 42. 55	*D*	*Mare nectaris* entré.
10. 43. 3	*G*	*Mare fœcunditatis* au bord de l'ombre.
10. 44. 1	*H*	*Mare crisium* au bord de l'ombre.
10. 46. 11	*H*	*Mare crisium* à moitié dans l'ombre.
10. 47. 19	*G*	*Mare fœcunditatis* entré.
10. 48. 16	*H*	*Mare crisium* entré.
10. 54. 26	....	Immersion totale de la Lune dans l'ombre.
		Le point du limbe de la Lune où l'immersion totale s'est faite, fut mesuré au moyen du micromètre, & trouvé de 26 minutes 39 secondes au-dessous du bord supérieur de la Lune, suivant son cercle horaire.
12. 35. 9	....	Émersion de la Lune de l'ombre.
12. 37. 6	1	*Grimaldus* commence à paroître au bord de l'ombre.
12. 38. 28	1	*Grimaldus* quitte l'ombre.
12. 39. 2	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
12. 42. 48	3	*Aristarchus* au bord de l'ombre.
12. 43. 23	*A*	*Mare humorum* au bord de l'ombre.
12. 44. 8	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
12. 45. 49	*A*	*Mare humorum* à moitié sortie.
		L'ombre qui étoit restée assez claire sur la Lune jusqu'à cette dernière observation, de manière à voir les taches à travers l'ombre, augmente de nuance, & les taches disparoissent dans l'ombre; le bord de la Lune n'est presque plus visible à la lunette.
12. 46. 54	4	*Keplerus* quitte l'ombre.
12. 48. 50	8	*Heraclides* quitte l'ombre.
12. 52. 26	12	*Helicon* quitte l'ombre.
12. 52. 26	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH.	TACHES observées.
12. 54. 36	11	*Copernicus* quitte l'ombre.
12. 57. 32	21	*Tycho* au bord de l'ombre.
12. 58. 23	21	*Tycho* à moitié hors de l'ombre.
12. 58. 26	17	*Plato* quitte l'ombre.
12. 59. 6	21	*Tycho* quitte l'ombre.
13. 4. 34	*C*	*Mare imbrium* quitte l'ombre.
13. 6. 34	*F*	*Mare ſerenitatis* au bord de l'ombre.
13. 8. 4	24	*Manilius* quitte l'ombre; douteuſe. L'ombre étoit encore augmentée de denſité à cette dernière obſervation, on ne pouvoit voir avec la lunette aucune tache à travers l'ombre, le bord de la Lune dans l'ombre étoit preſque effacé.
13. 10. 54	25	*Menelaus* quitte l'ombre.
13. 11. 14	*F*	*Mare ſerenitatis* à moitié hors de l'ombre.
13. 11. 47	*E*	*Mare tranquillitatis* déjà un peu hors de l'ombre.
13. 16. 19	*F*	*Mare ſerenitatis* quitte l'ombre.
13. 18. 1	*E*	*Mare tranquillitatis* quitte l'ombre. L'ombre juſqu'à cette dernière obſervation avoit augmenté en denſité; le bord de la Lune dans l'ombre que j'avois toujours ſoupçonné, ne pouvoit plus ſe voir; ce qui pouvoit provenir d'un nuage léger & blanchâtre qui s'étoit formé au devant de la Lune, & qui probablement augmentoit la denſité de l'ombre, en rendoit les limites mal terminées & les obſervations des taches incertaines.
13. 22. 2	*D*	*Mare nectaris* quitte l'ombre; l'ombre mal terminée.
13. 24. 2	*E*	*Mare tranquillitatis* quitte l'ombre.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI. H. M. S.	N.os des TACH	TACHES observées.
13. 24. 52	G	*Mare fœcunditatis* à moitié hors de l'ombre. A cette dernière observation, le nuage blanchâtre étoit presque dissipé.
13. 27. 31	H	*Mare crisium* à moitié hors de l'ombre.
13. 30. 1	H	*Mare crisium* quitte l'ombre.
13. 30. 47	G	*Mare fœcunditatis* quitte l'ombre.
13. 35. 45	....	Fin de l'Éclipse.
13. 43. 58	....	Pénombre très-sensible à la vue simple.
13. 48. 57	....	Il restoit encore sur la Lune un soupçon de pénombre.

Distances des Cornes de l'ombre.

TEMPS VRAI.	DISTANCES des CORNES.	DÉTAILS du temps de la mesure des CORNES.
12h 42′ 8″	23′ 5″	pendant l'émersion de la Lune de l'ombre.
12. 47. 40	29. 3	
12. 53. 43	31. 45	
12. 59. 55	32. 41	
13. 5. 9	31. 49	
13. 10. 8	30. 32	
13. 11. 19	29. 25	
13. 18. 3	27. 14	
13. 22. 9	24. 57	
13. 26. 42	23. 56	
13. 29. 25	16. 4	
13. 31. 31	13. 39	
13. 33. 0	11. 5	
13. 34. 14	9. 27	

Diamètres apparens de la Lune, mesurés suivant son cercle horaire.

TEMPS VRAI.	DIAMÈTRE.	DÉTAILS du temps de la mesure du Diamètre.
H. M. S.	*M. S.*	
9. 33. 38	32. 26	diamètre mesuré avant l'Éclipse.
11. 8. 20	32. 33	pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
12. 17. 11	32. 42	pendant l'immersion totale.
13. 38. 58	32. 31	après la fin de l'Éclipse.

Avant que l'Éclipse fût commencée, j'examinai s'il n'y auroit pas dans le voisinage de la Lune quelques Étoiles qui pussent lui être comparées ; j'en trouvai une de sixième grandeur sur son parallèle, qui étoit la quatre-vingt-seizième du Verseau, suivant Flamstéed. J'avois soupçonné que cette Étoile pourroit bien être éclipsée pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre ; elle ne le fut pas, le bord supérieur passa au-dessous de l'Étoile : celle-ci fut comparée à la Lune, ainsi que trois autres Étoiles, pendant l'immersion totale. De ces trois Étoiles, il y en avoit deux de connues, qu'on trouve dans le Catalogue de *Tobie Mayer.* Deux Étoiles télescopiques furent éclipsées pendant l'immersion totale. Voici ces Observations.

TEMPS VRAI. H. M. S.	DIFFÉR. de HAUTEUR. M. S.	ÉTOILES comparées à la Lune.
9. 29. 37 ½	8. 33	96.ᵉ du Verseau ; paff. au fil horaire, fupérieur au bord inférieur de la Lune.
9. 33. 28 ¼	......	premier bord de la Lune au même fil.
9. 35. 42 ⅓	......	fecond bord de la Lune au même fil.
9. 45. 0	......	fecond bord de la Lune au fil horaire.
9. 48. 49	9. 3	96.ᵉ étoile du Verfeau au même fil, inférieur au bord fupérieur de la Lune.
11. 26. 41 ½	......	premier bord de la Lune au fil horaire.
11. 28. 47 ½	......	fecond bord au même fil.
11. 30. 13 ¼	19. 55	Étoile de feptième grandeur de Mayer au même fil, inférieur au bord fupérieur de la Lune.
11. 32. 13	6. 24	Étoile de fept à huitième grandeur de Mayer au même fil, fupérieur au bord fupérieur de la Lune.
11. 34. 13	13. 23	Étoile de feptième grandeur nouvelle au même fil, inférieur au bord fupérieur de la Lune.
11. 49. 40 ½	......	immerfion d'une Étoile de neuvième grandeur ; bonne à la feconde.
11. 50. 50	......	immerfion d'une feconde Étoile de neuvième grandeur, moins bonne.

L'immerfion de cette dernière Étoile étoit difficile à bien faire, à caufe du mouvement de la Lune en déclinaifon ; l'Étoile fut long-temps comme adhérente au bord de la Lune avant fon immerfion : j'avois employé pour cette Obfervation un groffiffement de quatre-vingts fois, car avec un plus foible, l'Obfervation eût été trop douteufe, à caufe de la petiteffe de ces deux Étoiles. Quelques minutes avant les immerfions, une petite Étoile de même grandeur étoit fortie du bord oppofé de la Lune.

Pour reconnoître les Étoiles que j'avois comparées à la Lune,

Lune, & les deux petites qui avoient été éclipsées, je les recherchai le 14 Septembre, quatre jours après l'éclipse de Lune: les ayant reconnues, je les comparai à l'étoile φ du Verseau, quatrième grandeur. J'ai déterminé leurs positions en ascension droite & en déclinaison pour le 10 Septembre 1783.

ASCENSION droite. D. M. S.	DÉCLINAISON australe. D. M. S.	Grandeur.	NOMS des Étoiles déterminées.
345. 46. 26	7. 12. 17	4.5	φ Du Verseau, position déd. de la *Conn. des Temps.*
347. 2. 40	6. 17. 44	6	96.e du Verseau, Catalogue de Flamstéed.
347. 33. 9	5. 50. 46	7	Étoile qui n'avoit pas encore été déterminée.
348. 50. 10	5. 48. 36	9	Étoile qui a été éclipsée, mais non observée.
349. 22. 17	5. 27. 57	9	Étoile éclipsée, l'immersion observée.
349. 22. 17	5. 38. 23	9	Étoile éclipsée, l'immersion observée.
349. 35. 2	5. 42. 3	7	Étoile du Catalogue de Tobie Mayer.
350. 4. 50	5. 15. 42	7.8	Étoile du même Catalogué.
350. 34. 39	5. 35. 21	7	Étoile qui n'avoit pas encore été déterminée.

Les observations de cette Éclipse sont d'autant plus exactes, que les limites de l'ombre se distinguoient sans confusion de la pénombre : cette dernière étoit d'une nuance égale & assez claire pour juger de leurs différences, & ne pas les confondre l'une avec l'autre.

Avant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre, la couleur rouge parut sur la Lune ; elle augmenta avec le progrès de l'ombre ; elle fut très-apparente pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre, qui dura $1^h\ 40'\ 43''$. La Lune paroissoit, à une vue basse, comme une grande Étoile rougeâtre, semblable à la Planète de Mars, & rayonnante ; mais en la regardant avec la lunette, on voyoit foiblement son disque & la couleur rouge inégalement distribuée sur la Lune, ainsi que l'ombre : une partie étoit plus claire que l'autre ; la

partie la plus obſcure circuloit lentement autour du centre de la Lune. Dans l'émerſion de la Lune, la couleur rouge fut moins apparente : elle le fut moins auſſi dans cette Éclipſe que dans la précédente du 18 Mars, ce qui pouvoit provenir dans celle-ci du brouillard léger qui avoit exiſté pendant ſa durée.

Tout le temps que la Lune reſta dans l'ombre, l'obſcurité fut très-grande & le ciel d'une très-grande beauté; on pouvoit voir juſqu'aux plus petites Étoiles. Je n'avois pas encore vu un ciel auſſi pur & les Étoiles auſſi brillantes ; ce ſpectacle étoit raviſſant. Je parcourus le ciel pendant cette grande obſcurité, avec une lunette de nuit pour la recherche des Comètes, mais je ne rencontrai que des Nébuleuſes déjà connues, que je n'avois jamais vues auſſi belles & auſſi apparentes que dans le temps de cette grande obſcurité.

Cette Éclipſe avoit ſans doute rappelé la grande obſcurité qu'avoit produite la dernière Éclipſe du 18 Mars, les accidens & les embarras des voitures qu'elle avoit occaſionnés dans les rues de Paris, faute d'avoir éclairé cette grande Ville: les réverbères durant celle-ci furent allumés, & il n'arriva aucun embarras.

M. Pigott fils m'a envoyé d'York l'Obſervation qu'il avoit faite des deux petites Étoiles que j'avois obſervées pendant l'immerſion totale de cette Éclipſe avec l'occultation de deux autres Étoiles en 1783 : les voici.

	Temps vrai.	
1783. Sept. 10	$11^h\ 29'\ 6''$	Immerſion de l'une des deux petites Étoiles.
	11. 34. 44 ½	Immerſion de la ſeconde.
Oct. 7	14. 26. 28 ½	Immerſion de φ du Verſeau.
Déc. 30	8. 0. 24	Immerſion de δ des Poiſſons.



MÉMOIRE
CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA COMÈTE DE 1783,
Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine. (a)

Par M. MESSIER.

CETTE Comète qui étoit très-petite, très-difficile à observer, & qu'on ne pouvoit voir qu'avec des lunettes, fut découverte à Paris, par M. Méchain, le 26 Novembre 1783, à neuf heures du soir, sur le pied droit de derrière de la constellation du Bélier: à 10 heures 30 minutes du soir, il en détermina la position; son ascension droite étoit de 34 degrés 47 minutes, & sa déclinaison boréale de 12 degrés 2 minutes $\frac{1}{2}$; & à 14 heures 16 minutes, elle avoit 34 degrés 41 minutes d'ascension droite, & 12 degrés 15 minutes de déclinaison. Le lendemain 27 Novembre, M. Méchain me donna ces positions, au moyen desquelles je cherchai la Comète avec ma grande lunette achromatique, montée sur sa machine parallactique; à 7 heures du soir, par un beau ciel, je trouvai la Comète au-dessous & près de l'Écliptique, sous le ventre du Bélier; elle ressembloit à une nébuleuse, sa lumière étoit extrêmement foible; au centre on apercevoit une lumière plus forte, qui étoit le noyau, autour duquel cette lumière foible s'étendoit également; son diamètre étoit d'environ 4 minutes de degré: avec un peu d'attention, & l'œil dirigé par la grande lunette, je pouvois voir la Comète avec une lunette de nuit, d'un

(a) C'est la XXI.e Comète que j'ai observée de l'Observatoire de la Marine, & la LXVIII.e dont l'orbite a été calculée: en suivant l'ordre de la Table des Comètes, qui est rapportée dans l'Astronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366; & tome IV, page 704.*

pied de foyer, mais à la vue fimple il n'étoit pas poffible de la voir. Je comparai la Comète deux fois à une Étoile de la neuvième grandeur, qui étoit fur fon parallèle, & cette Étoile fut enfuite comparée aux étoiles *o* & *σ* du Bélier, au moyen d'une Étoile intermédiaire; de cette comparaifon, j'ai tiré la pofition de la petite Étoile *(n.° 8)*, qu'on trouvera dans la *Table II* qui eft à la fuite de ce Mémoire; & de la comparaifon de la Comète à cette Étoile, j'ai déduit celle de la Comète: le 27 Novembre, à 7 heures 56 minutes 17 fecondes, temps vrai, la Comète précédoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d\ 44'\ 15''$; la Comète étoit au midi de l'Étoile, de $27'\ 13''$: ainfi fon afcenfion droite étoit de $34^d\ 4'\ 30''$, & fa déclinaifon, $13^d\ 8'\ 7''$, boréale: à 8 heures 34 minutes 29 fecondes, l'afcenfion droite de la Comète étoit de $34^d\ 3'\ 17''$; & fa déclinaifon, $13^d\ 9'\ 46''$.

Je ne rapporte ces détails que pour la première obfervation, on trouvera les autres dans deux Tables qui font à la fuite de ce Mémoire: la première contient les déterminations de la Comète en afcenfion droite & en déclinaifon pour tous les jours d'obfervations; & la feconde Table, les pofitions des Etoiles, foit celles qui étoient déjà connues, foit celles que j'ai déterminées par de nouvelles obfervations, & dont la plupart ont fervi à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où la Comète a été obfervée.

Le 28, la Comète fe voyoit moins bien que la veille, le ciel étoit cependant beau, mais il *y* avoit un peu de brouillard; je pouvois voir la Comète avec la lunette de nuit, mais plus foiblement que le 27; je la comparai directement aux étoiles *σ* & *o* du Bélier, j'en ai rapporté trois pofitions dans la Table: la Comète, dans cette obfervation, étoit au-deffus de l'Écliptique qu'elle avoit traverfée entre les obfervations du 27 & du 28 Novembre.

Le 29, beau temps; la Comète paroiffoit, à peu de chofe près, avoir la même lumière que les deux jours précédens, fans qu'on pût reconnoître fi fa lumière augmentoit ou diminuoit; je comparai la Comète à une Étoile nouvelle de

huitième grandeur: pour déterminer le lieu de cette Étoile, je la comparai directement à σ du Bélier; ces observations m'ont donné deux positions du lieu de la Comète, qu'on trouvera dans la *première Table*.

Le 30, le ciel fut couvert: le même jour je reçus une Lettre d'Angleterre, de M. Pigott fils, datée d'Yorck, le 22 Novembre, dans laquelle il m'annonçoit la découverte qu'il venoit de faire d'une nouvelle Comète, c'étoit la même que celle dont je rends compte dans ce Mémoire. Voici un extrait de la Lettre de M. Pigott.

« Je m'empresse de vous annoncer que j'ai découvert une Comète le 19 de ce mois (Novembre): voici les obser- « vations que le temps m'a permis d'en faire. Le 19 Novembre, « à 11 heures un quart du soir, elle avoit $41^d\ 0'$ d'ascension « droite, & $3^d\ 10'$ de déclinaison boréale: le 20, je vis la « Comète le soir, où je l'attendois; à 10 heures 54 minutes; « son ascension droite étoit de 40 degrés, sa déclinaison de « 4 degrés 32 minutes: le 21, je vis la Comète, mais je ne « pus l'observer avec mes instrumens; cette Comète ressemble « à une nébuleuse, ayant un diamètre d'environ 2 minutes « de degré; le centre n'est pas beaucoup plus brillant que la « lumière environnante, en éclairant les fils de l'instrument, « on ne pouvoit la voir qu'avec difficulté. »

L'on voit par l'extrait de cette lettre, que la Comète a été vue en Angleterre, sept jours plus tôt qu'à Paris.

Le 1.er Décembre, le ciel qui avoit été couvert s'éclaircit vers une heure de l'après-midi; le soir, beau temps, à l'exception d'un léger brouillard qui s'étoit élevé; la Lune qui entroit dans son premier quartier, répandoit une grande lumière; & ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète, je la trouvai placée sur le parallèle de l'étoile γ du Bélier, à laquelle elle fut directement comparée; je ne fus pas obligé d'éclairer les fils du micromètre pour l'observer, la lumière de la Lune suffisoit.

L'étoile γ du Bélier, qui est rapportée dans les catalogues de quatrième grandeur, est double; ce sont deux étoiles,

très-près l'une de l'autre, séparées seulement de l'un de leurs diamètres ; les deux étoiles ayant exactement la même lumière, estimées de la septième à sixième grandeur.

Le 2, beau temps le soir, il y avoit moins de brouillard que la veille, mais la Lune qui avoit passé son premier quartier, répandoit une si grande lumière qu'elle étoit suffisante pour éclairer les fils du micromètre : je comparai la Comète directement à la même étoile γ du Bélier ; elle fut observée & comparée plusieurs fois à cette Étoile, j'en ai rapporté les positions dans la première Table.

Le 3, ce ne fut qu'avec la plus grande difficulté que je pus revoir la Comète, il falloit bien connoître sa position & son lieu dans le Ciel pour la trouver & la reconnoître; je la comparai directement & trois fois à l'Étoile η du Bélier, sixième grandeur ; la grande lumière de la Lune effaçoit presque celle de la Comète ; je présumai qu'il ne seroit pas possible de la revoir tant que la Lune & la Comète seroient sur l'horizon, & j'étois presque sans espérance de la revoir, lorsque la Lune n'y formeroit plus d'obstacle, à cause de la foiblesse de sa lumière qui diminuoit en s'éloignant de la terre.

Depuis le 3 de Décembre jusqu'au 12, la lumière de la Lune & le brouillard, m'empêchèrent de rechercher la Comète ; le 12, le ciel étant devenu très-beau le soir, je cherchai la Comète avant que la Lune fût levée, je la trouvai près de l'Étoile α du grand triangle où elle devoit être d'après mes précédentes observations ; sa lumière étoit si affoiblie qu'il ne fut pas possible de pouvoir éclairer les fils du micromètre, sans la faire disparoître ; je la comparai cependant trois fois à l'Étoile α du grand triangle, de troisième à quatrième grandeur ; de ces trois déterminations j'ai pris le milieu pour avoir la position de la Comète, qu'on trouvera dans la première Table.

Le 13 Décembre, beau temps comme la veille, je comparai quatre fois la Comète à la même étoile α du grand triangle ; jen ai déduit par un milieu la position de

la Comète; je déterminai le même ſoir la poſition d'une Étoile de ſeptième grandeur, en la comparant à la même Étoile, pour ſervir le lendemain à la détermination de la Comète, celle-ci ne pouvant plus être comparée directement à l'Étoile α.

Le 14, beau temps le ſoir; mais les illuminations de Paris pour la paix, répandoient une grande vapeur dans l'atmoſphère, & ce ne fut pas ſans peine que je pus revoir la Comète; elle étoit bien plus difficile à apercevoir que la veille, je la comparai encore trois fois à l'Étoile nouvelle de ſeptième grandeur, que j'avois déterminée par α du grand Triangle; de ces trois obſervations qui s'accordoient entr'elles, j'ai déduit la poſition de la Comète; elle étoit ſur le parallèle de la nébuleuſe qui eſt entre le grand Triangle & le Poiſſon boréal, que j'avois découverte le 2 Août 1764, & qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 453*, ſous le *n.° XXXIII.* La Comète & cette nébuleuſe avoient la même lumière.

Grand brouillard les 15, 16 & 17 Décembre, le Soleil même ne parut pas: ce brouillard avoit dépoſé un givre conſidérable, les toits étoient blancs comme s'il eût tombé de la neige. La nuit du 17 au 18, ce grand brouillard ſe diſſipa & le ciel s'éclaircit; le 18, beau temps le ſoir, je cherchai la Comète qui perdoit chaque jour de ſa lumière, & ce ne fut pas ſans peine que je pus la revoir; je la trouvai ſur le parallèle des étoiles ε, η & γ du grand Triangle, je la comparai à ces trois Étoiles, & j'en ai déduit la poſition de la Comète.

Le 19, beau temps le ſoir, la Comète paroiſſoit un peu plus foible que la veille, elle étoit ſur le parallèle de l'étoile γ du grand Triangle à laquelle je la comparai directement; comme la différence de paſſage au fil horaire du micromètre, entre la Comète & l'Étoile, étoit de plus d'une demi-heure, je ne pus répéter une ſeconde fois l'obſervation; je crois cependant que cette différence obſervée eſt bonne à quelques ſecondes près, je dis à quelques ſecondes, à cauſe de la

grande difficulté de voir la Comète, & parce que je ne pouvois plus éclairer les fils du micromètre ſans la faire diſparoître, ainſi l'obſervation de ce ſoir peut être plus incertaine que les précédentes.

Le 20 au ſoir, le ciel aſſez beau, cependant il y avoit un peu de brouillard qui commençoit à s'élever; la Comète étoit ſur le parallèle de la belle étoile β, deuxième grandeur de la ceinture d'Andromède: je la comparai directement à cette Étoile, & deux fois à une Étoile de la ſixième grandeur que j'avois déterminée en la comparant à la même étoile β; cette Étoile de ſixième grandeur étoit peu éloignée de la Comète: ces obſervations s'accordoient entr'elles, j'ai pris un milieu pour avoir la poſition de la Comète.

Dernière obſervation.

Le 21 Décembre, beau temps, la Comète, à cauſe de ſon peu de mouvement en declinaiſon, ſe trouvoit encore ce ſoir ſur le parallèle de β d'Andromède, & de la nouvelle Étoile que j'avois déterminée; je comparai la Comète une fois à β & deux fois à l'autre Etoile: le milieu m'a donné, avec aſſez de préciſion, la poſition de la Comète en aſcenſion droite & en déclinaiſon.

Le 22, le ciel couvert d'un brouillard, qui continua les jours ſuivans, de manière qu'il ne fut plus poſſible de rechercher & de revoir la Comète: il eſt même à préſumer qu'il n'auroit plus été poſſible de la revoir; ſa lumière, à ma dernière obſervation, étoit trop foible pour qu'elle pût être viſible encore les jours ſuivans. Ainſi ma dernière obſervation ſur cette Comète eſt du 21 Décembre : & depuis le 27 de Novembre juſqu'au 21 de Décembre, j'ai eu treize jours d'obſervations & vingt-deux déterminations du lieu de la Comète en aſcenſion droite & en déclinaiſon.

Voici maintenant deux Tables, dont l'une contient tous les lieux de la Comète obſervés en aſcenſion droite, en déclinaiſon, en longitude & latitude, avec les différences de paſſages entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre, & les différences que les obſervations ont données en déclinaiſon entre la Comète & l'Etoile à laquelle elle

elle a été comparée. Ces différences ſont marquées des ſignes + & —: le premier indique qu'il ſaut ajouter ces différences obſervées aux poſitions des Étoiles avec leſquelles la Comète a été comparée, pour avoir celles de la Comète en aſcenſion droite ou en déclinaiſon.

La ſeconde Table contient les aſcenſions droites & les déclinaiſons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été priſes en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées. Ces Étoiles ſont réduites au temps des obſervations; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, ſous le titre de *variation annuelle.*

Je joins auſſi à ce Mémoire une Carte céleſte, que j'ai deſſinée & conſtruite d'après mes Obſervations; cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon. J'ai rapporté les poſitions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes. Il ſera aiſé de juger, à l'inſpection de cette Carte, de la poſition de la Comète obſervée, & de celles des Etoiles qui ont ſervi à ſa détermination: je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté auſſi ſur cette Carte la poſition obſervée à York. On voit par cette Carte, que la Comète, pendant la durée de ſon apparition, a paſſé entre les deux Comètes obſervées en 1766 (que j'ai rapportées ſur cette Carte), par la tête de la Baleine, par le Bélier qu'elle a traverſé, & par la pointe du grand Triangle: elle a ceſſé de paroître ſur le parallèle de l'Étoile β de la ceinture d'Andromède.

TABLE I.

Des lieux apparens de la Comète de 1783, comparée aux Étoiles fixes.

1783.	TEMPS MOYEN des Obſerv.	ASCENS. droite de la Comète obſervée.	DÉCLIN. de la Comète obſervée, boréale.	DIFFÉRENCE en aſcenſion droite de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉR. en déclin. de la Comète avec les Étoiles.	LONGIT. de la Comète obſervée.	LATITUDE de la Comète obſervée *.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.os des Étoiles.	ÉTOIL. avec leſquel. la Comète a été comp.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
Nov. 27	7. 44. 23	34. 4. 30	13. 8. 7	— 1. 44. 15	— 27. 13	36. 13. 45	0. 30. 19 *A*	9	8	déterm.
	8. 22. 35	34. 3. 17	13. 9. 46	— 1. 45. 28	— 25. 34	36. 13. 9	0. 28. 22 *B*	9	8	
28	7. 28. 14	33. 18. 17	14. 19. 37	— 6. 35. 30	+ 8. 39	35. 55. 5	0. 52. 1 *B*	6	σ	du Bélier.
	7. 59. 33	33. 16. 32	14. 20. 59	— 6. 35. 15	+ 10. 1	35. 53. 55	0. 53. 52	6	σ	
	8. 31. 10	33. 14. 55	14. 22. 25	— 6. 38. 52	+ 11. 27	35. 52. 54	0. 55. 44	6	σ	
29	7. 27. 1	32. 30. 55	15. 29. 8	+ 1. 28. 45	+ 40. 41	35. 35. 6	2. 14. 20	8	6	déterm.
	8. 10. 12	32. 28. 55	15. 30. 48	+ 1. 26. 45	+ 42. 22	35. 33. 53	2. 15. 9	8	6	
Déc. 1	7. 50. 51	31. 1. 10	17. 45. 55	+ 5. 35. 45	— 28. 4	35. 0. 38	4. 50. 40	4	γ	du Bélier.
	8. 16. 6	31. 0. 10	17. 46. 48	+ 5. 34. 45	— 27. 11	34. 59. 59	4. 51. 50	4	γ	
2	6. 51. 11	30. 20. 10	18. 47. 44	+ 4. 54. 45	+ 33. 45	34. 45. 14	6. 2. 6	4	γ	
	6. 15. 13	30. 19. 10	18. 49. 1	+ 4. 53. 45	+ 35. 2	34. 44. 48	6. 4. 29	4	γ	
	7. 38. 39	30. 18. 47	18. 50. 11	+ 4. 53. 22	+ 36. 12	34. 44. 52	6. 4. 51	4	γ	
3	6. 57. 3	29. 38. 24	19. 51. 40	— 0. 32. 30	— 19. 30	34. 30. 23	7. 15. 46	6	η	
	7. 26. 39	29. 37. 47	19. 51. 50	— 0. 33. 7	— 19. 20	34. 29. 54	7. 16. 7	6	η	
	7. 35. 53	29. 37. 9	19. 51. 56	— 0. 33. 45	— 19. 14	34. 29. 22	7. 16. 25	6	η	
12	6. 23. 16	24. 30. 8	28. 6. 23	— 0. 42. 0	— 24. 56	33. 5. 49	16. 38 48	4	α	grand Triang.
13	6. 15. 17	24. 3. 33	28. 53. 49	— 1. 8. 35	+ 22. 30	33. 2. 2	17. 31. 33	4	α	
14	6. 2. 31	23. 39. 8	29. 38. 39	+ 1. 16. 52	+ 41. 39	32. 59. 24	18. 21. 7	7	3	déterm.
18	8. 28. 2	22. 10. 16	32. 31. 15	— 8. 57. 36	— 19. 9	32. 56. 31	21. 29. 43	4	γ	grand Triang.
19	7. 36. 56	21. 52. 52	33. 7. 37	— 9. 15. 0	+ 17. 13	32. 57. 38	22. 8. 55	4	γ	
20	7. 37. 45	21. 34. 41	33. 47. 35	+ 7. 9. 25	— 40. 39	32. 59. 55	22. 51. 36	2	β	d'Andr.
21	7. 35. 37	21. 19. 29	34. 23. 28	+ 6. 54. 13	— 4. 46	33. 3. 8	23. 29. 31	2	β	

* La latitude de la Comète du 27 Novembre eſt auſtrale, toutes les autres ſont boréales.

TABLE II.

Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.

Leurs positions sont réduites au temps des Observations.

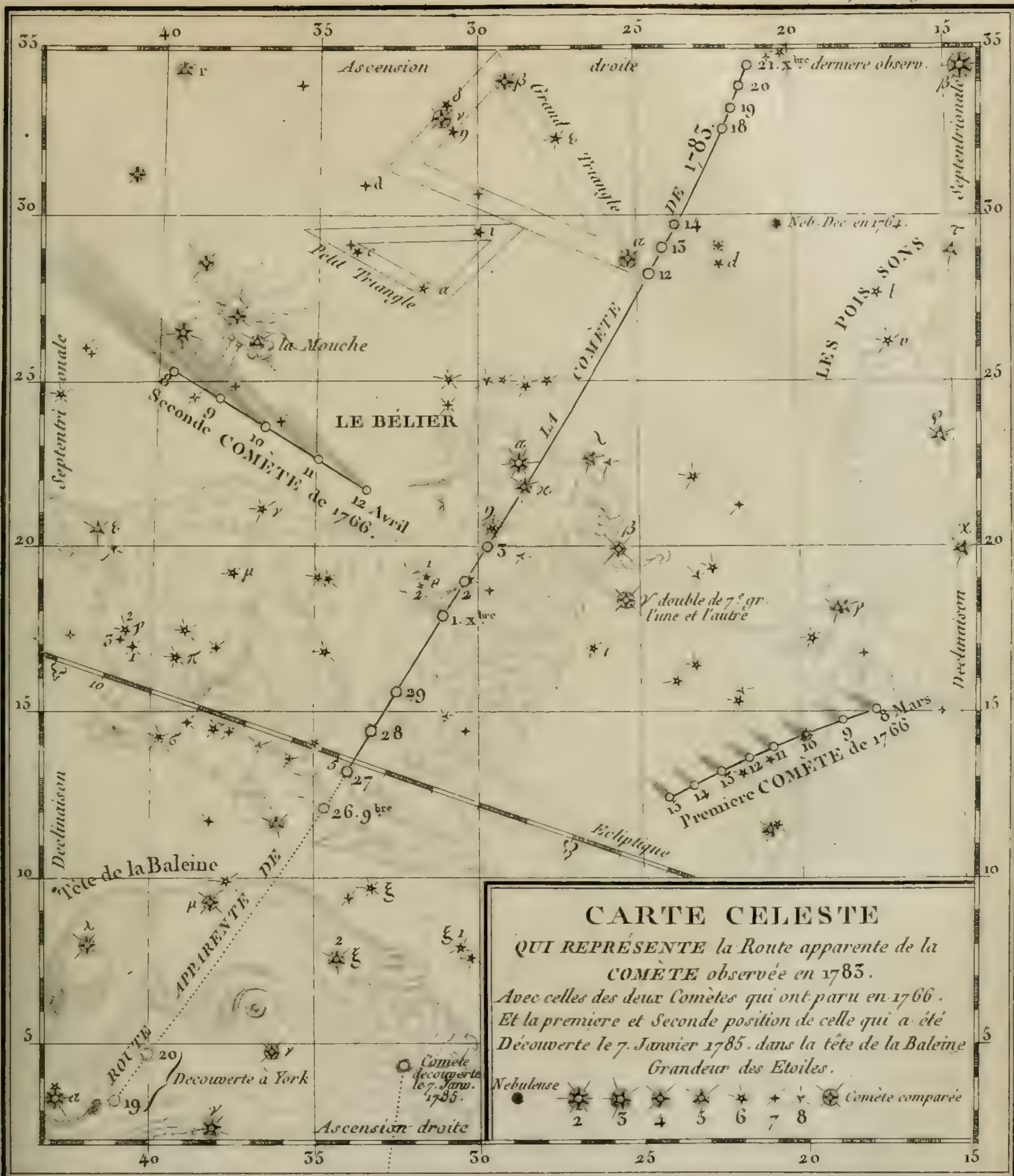
Ascension droite des Étoiles.	Déclinais. des Étoiles boréale.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.os des Étoiles.	Noms des constellations qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
14. 25. 16	34. 28. 14	2	β	d'Andromède, Connoissance des Temps, Comète comparée les 20 & 21 Décembre.
20. 7. 16	34. 43. 35	6	1	déterminée par le *n.°* 4 ci-dessous.
20. 23. 23	34. 29. 32	7	2	déterminée par le *n.°* 1 ci-dessus.
22. 22. 16	28. 57. 0	7	3	déterminée par α du grand Triangle, Comète comparée le 14 Décembre.
22. 24. 19	34. 9. 6	6	4	déterminée par β d'Andromède.
25. 12. 8	28. 31. 19	4	α	du grand Triangle, Conn. des Temps, Comète comparée les 12 & 13 Décembre.
25. 25. 25	18. 13. 59	4	γ	double du Bélier, Catalogue zod. de la Caille, Comète comparée les 1.er & 2 Décembre.
25. 40. 58	19. 44. 39	4	β	du Bélier, Connoissance des Temps.
28. 35. 5	19. 33. 6	8	5	déterminée par β du Bélier.
29. 40. 13	18. 28. 46	7	15	du Bélier, comparée à γ.
30. 10. 54	20. 11. 10	6	η	du Bélier, comp. à β, Comète comp. le 3 Déc.
31. 2. 10	14. 48. 26	8	6	déterminée par σ du Bélier, Comète comparée le 29 Décembre.
31. 7. 52	32. 50. 24	4	γ	du grand Triangle, Conn. des Temps, Comète comparée le 19 Décembre.
35. 16. 27	14. 3. 55	7	7	déterminée par le *n.°* 6 ci-dessus.
35. 48. 45	13. 35. 20	9	8	déterm. par le *n.°* 9 ci-dessous, Comète comp. le 27 Novembre.
36. 47. 6	13. 55. 1	8	9	déterminée par σ du Bélier.
37. 38. 58	14. 17. 2	7	10	déterminée par le *n.°* 9 ci-dessus.
38. 9. 45	14. 23. 13	6	ο	du Bélier, comparée au *n.°* 9 ci-dessus.
39. 0. 42	14. 35. 39	7	11	déterminée par le *n.°* 9 ci-dessus.
39. 33. 47	14. 10. 58	6	σ	du Bélier, prise du Catalogue zodiac. Comète comparée le 28 Novembre.

D'après les lieux déterminés de cette Comète, l'on a recherché les élémens de son orbite ; M. le Président de Saron l'a calculée, ainsi que M. Méchain : les élémens qu'ils en ont déduits ne cadrent pas avec les observations, il y a toujours quelques minutes de différence, quoiqu'on ait employé différentes déterminations de la Comète dans la recherche de chacun de ces élémens.

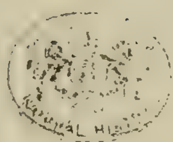
	I.er Élément.	II.e Élément.	III.e Élément.
	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
Lieu du nœud ascendant..	1. 24. 10. 10	1. 24. 26. 51	1. 24. 10. 45
Inclinaison de l'orbite....	54. 9. 53	56. 46. 28	52. 19. 57
Lieu du périhélie dans l'orb.	1. 13. 58. 47	0. 27. 44. 56	1. 19. 4. 30
Logar. de la distance périh.	0,195175	0,167876	0,1978810
Passage au périhélie 1783, temps moyen à Paris.	Nov. 13j 6h 13′ 0″	Oct. 23j.	Nov. 20j 9h 26′ 0″
Sens du mouvement direct.			

M. le Chevalier d'Angos, Directeur de l'Observatoire de Malte, à qui j'avois envoyé mes observations, m'a écrit, « je n'ai pu faire cadrer vos observations de la Comète de 1783, dans une parabole ».





Gravé par Y. le Gouaz, d'après le dessin de Mr. Messier



EXPÉRIENCES
Propres à développer les effets de la Lumière sur certaines Plantes.

Par M. l'Abbé TESSIER.

LES personnes livrées à l'étude de la Physique végétale, n'ont pas oublié d'observer que la lumière du jour produisoit des effets sur les Plantes : deux phénomènes sur-tout ont dû les frapper ; le penchant de celles qui se trouvent écartées de la lumière pour se diriger vers elle, c'est ce qu'on appelle *nutation*, & l'*éthiolement* de celles qui croissent dans l'obscurité. Ray, & peut-être d'autres Savans avant lui, ont parlé de la cause de l'éthiolement des Plantes : M.rs Bonnet, du Hamel & Meesse ont rapporté sur cet objet des expériences qui leur sont propres, particulièrement M. Bonnet ; mais ils se sont arrêtés trop tôt, & n'ont pas poussé leurs recherches aussi loin qu'ils l'auroient pu faire. Quoiqu'il soit très-vrai que mes expériences sur cet objet aient été projetées & exécutées en partie avant que j'eusse rien lû de ce que ces Savans en ont écrit, & avant même qu'ils eussent publié toutes leurs découvertes, néanmoins je ne m'attribuerai que le foible mérite d'avoir varié les expériences & d'en avoir fait de neuves, qui m'ont conduit à calculer, pour ainsi dire, le penchant des Plantes vers la lumière, & à prouver jusqu'à quel point la lumière, différemment modifiée, pouvoit influer sur l'éthiolement de certains végétaux.

Lû en 1783.

Ce Mémoire sera partagé en deux articles.

ARTICLE PREMIER.

Penchant des Plantes vers la lumière.

LORSQUE dans une serre ou dans une cave, on voit des Plantes qu'on y cultive se pencher vers les fenêtres ou vers les soupiraux, on est porté à croire qu'elles ne prennent cette

direction que pour se rapprocher de l'air ; car on ne peut imaginer que ce soit pour chercher la chaleur, puisqu'en hiver il fait plus chaud dans les serres & dans les caves que dehors ; mais il est certain que c'est uniquement pour recevoir l'impression de la lumière. J'ai vu dans une serre de jardin, qui n'avoit qu'une fenêtre, plusieurs rangs de chicorée sauvage qui y croissoit, se courber plus ou moins, à proportion de ce qu'ils étoient plus ou moins éloignés de la lumière. Dans une cave destinée à conserver des pommes de terre, les fanes de celles qui poussèrent au printemps étoient d'autant moins penchées, qu'elles étoient plus près du soupirail.

Ces observations réunies à beaucoup d'autres, m'ont fait naître l'idée de m'assurer, par des expériences : 1.° si le penchant des Plantes vers la lumière avoit lieu à la surface de la terre, comme dans des caves; dans des appartemens fort éclairés, comme dans des serres où il y avoit peu de jour : 2.° si l'inclinaison des Plantes ne varieroit pas, selon la manière dont elles seroient élevées & selon l'époque de leur végétation : 3.° si les différentes modifications de la lumière n'y causeroient pas quelque changement : 4.° si elles n'auroient pas plus ou moins de penchant vers la lumière, selon qu'elles seroient dans telle ou telle position. C'est par des faits que tous ces points se trouveront éclaircis.

I.ere Expérience. Un pot, dans lequel j'avois semé du blé, fut placé dans une chambre, où il recevoit obliquement la lumière de la fenêtre : les jeunes tiges s'inclinèrent de ce côté d'une manière très-sensible : lorsqu'elles eurent un pouce je retournai le pot; bientôt l'extrémité des tiges se renversa & se pencha vers la fenêtre; ce ne fut que quelques jours après que le reste des tiges prit cette direction & par degrés.

II.me Expérience. Je semai du blé dans plusieurs pots, remplis, comme le premier, de terre de jardin; je les disposai de manière que le jour de la fenêtre tombât plus ou moins obliquement sur eux. L'inclinaison des tiges qui poussèrent, fut en raison de l'éloignement où étoient les pots de la fenêtre. Ces tiges étant foibles, comme celles de beaucoup de Plantes élevées

dans des appartemens, au moment où la première feuille s'en sépara, elles se renversèrent, mais presque toutes du côté de la lumière.

III.me Expérience.

Je posai dans un gobelet plein d'eau un morceau de liége percé de trous, sur lesquels j'avois placé des grains de blé: ils germèrent, & leurs tiges se dirigèrent vers la fenêtre: l'une d'elles se pencha presque horizontalement, en s'appuyant sur le bord antérieur du gobelet.

IV.me Expérience.

Sur une cheminée en face d'une fenêtre, deux gobelets pleins de mousse humide, & dans lesquels j'avois mis des grains de blé, ayant été placés, l'un devant la glace & l'autre devant un des pilastres du dessus de cheminée, les tiges du premier s'élevèrent presque droites; celles du second se dirigèrent, mais foiblement, vers la fenêtre. Je pensai que dans ces deux cas l'inclinaison étoit foible, parce que la lumière de la fenêtre étant répétée dans la glace & réfléchie par la couleur blanche du pilastre, les tiges avoient reçu moins d'impression de la lumière directe de la fenêtre.

V.me Expérience.

Après avoir couvert d'une étoffe noire, une encoignure placée obliquement par rapport à la fenêtre, j'y disposai deux gobelets pleins de mousse & sur laquelle il y avoit du blé: derrière l'un d'eux j'avois ajusté un miroir, de manière qu'il en recevoit toute la réflexion; les tiges du gobelet qui avoit derrière lui l'étoffe noire, s'inclinèrent fortement; celles de celui qui étoit devant le miroir s'élevèrent presque droites.

VI.me Expérience.

De quatre gobelets dans l'état de ceux de l'expérience précédente, deux furent mis devant une glace, & deux devant des pilastres de cheminée, recouverts d'une étoffe noire, & tous en face d'une fenêtre; c'étoit pour confirmer l'expérience précédente, & pour voir si dans la cinquième expérience j'avois eu raison d'attribuer à la glace & à la blancheur des pilastres, le peu d'inclinaison des tiges: en effet, dans celle-ci, les tiges des deux gobelets placés devant la glace, n'eurent qu'une très-foible inclinaison, tandis que celles des deux gobelets placés devant les pilastres tendus en noir, en eurent une très-forte.

J'ai répété plusieurs fois cette expérience en semant du blé dans la terre, au lieu de le mettre sur de la mousse; les résultats en ont été les mêmes.

VII.me Expérience. Lorsque les tiges qui étoient dans des gobelets & dans des pots, furent parvenues à une certaine hauteur, je les coupai jusqu'à leurs racines; mon intention étoit d'examiner si les repousses se porteroient vers la lumière, mais elles se dirigèrent en différens sens; je n'ai vu de penchant bien marqué vers la fenêtre, que dans les repousses des tiges placées devant une étoffe noire: les premières tiges qui sortent du germe, sont tendres, & par conséquent plus sensibles aux effets de la lumière, que les repousses qui sont plus fermes & moins mobiles; celles qui se trouvoient devant une étoffe noire, n'étant contre-balancées par aucune lumière de réflexion, ont cédé à l'impression de la lumière directe.

J'observerai que j'ai employé pour les expériences précédentes, tantôt du blé pur, tantôt du blé entaché de carie, tantôt du blé nouveau, tantôt du blé vieux; dans tous ces cas l'inclinaison est la même: je me suis servi de blé plutôt que de toute autre graine, parce que j'ai reconnu qu'il s'inclinoit sensiblement vers la lumière, & parce que d'ailleurs il germe promptement.

VIII.me Expérience. Les trois expériences qui suivent, ont été faites dans une chambre & sur une cheminée qui étoit éclairée par des fenêtres placées obliquement & à une plus grande distance que dans les premières expériences; j'ai cru que je devois me conduire ainsi pour rendre les observations plus certaines en les faisant de diverses manières: je disposai sur la cheminée deux gobelets remplis de terre, deux remplis de coton, & deux remplis de mousse humide, sur lesquels j'avois semé du blé; les deux remplis de coton étoient devant la glace: les grains en pleine terre ont germé les premiers, ensuite ce sont ceux qui étoient sur de la mousse, les autres n'ont germé qu'après: les tiges des premiers se sont inclinées le plus, celles des troisièmes se sont inclinées le moins, mais leur inclinaison

inclinaiſon a été plus forte que celle des deux premiers de l'expérience ſixième, quoiqu'également placés devant une glace: la raiſon de cette différence eſt ſans doute parce que dans la chambre où l'expérience ſixième a été faite, la glace eſt en face de la fenêtre, au lieu que dans celle-ci la glace eſt placée obliquement: les tiges qui pouſſent dans la terre ſe penchent plus que celles qui pouſſent dans de la mouſſe, & ces dernières plus que celles qui pouſſent dans du coton, parce qu'une de ces matières gêne plus que l'autre la ſortie du germe, & toutes les deux la gênent plus que la terre: j'ajouterai que les tiges étoient d'autant plus inclinées qu'elles ſe trouvoient plus éloignées de la fenêtre.

J'avois cru remarquer que toutes choſes étant égales d'ailleurs, certaines tiges s'inclinoient plus que d'autres vers la lumière; je préſumai que la poſition différente des grains de blé que j'avois juſque-là ſemés au haſard, en étoit peut-être la cauſe: en conſéquence je plaçai avec attention des grains de blé dans huit bocaux remplis de terre; dans deux, les grains avoient le germe en bas; dans deux, ils étoient poſés ſur la rainure, le germe étant oppoſé à la fenêtre; dans deux, les grains étoient ſur la rondeur, le germe du côté de la fenêtre; ils ont levé inégalement, toutes les tiges ſe ſont inclinées vers la fenêtre, celles dont les ſemences avoient été poſées ſur la rainure, le germe oppoſé à la fenêtre, avoient une inclinaiſon ſenſiblement plus forte. IX.me Expérience.

J'ai répété cette expérience; la terre ayant été trop mouillée, il s'eſt formé deſſus une croûte & des crevaſſes, par où les jeunes pouſſes ſe portoient, quelquefois en s'écartant du jour; mais à peine ſorties, elles ſe tournoient vers la fenêtre en décrivant une courbe.

Juſque-là je n'avois point encore meſuré les degrés d'inclinaiſon des Plantes que j'élevois ſur une cheminée: comme ils pouvoient varier, ſelon la diſtance où elles étoient du jour, ſelon la manière dont les grains étoient poſés, & ſelon la hauteur que les tiges acquéroient, j'employai le procédé ſuivant pour tout comparer à la fois. X.me Expérience.

Dix vaſes remplis de terre de jardin, priſe au même endroit, ont reçu chacun deux grains de blé ſeulement: ſi j'en euſſe ſemé davantage, il eût été difficile d'en meſurer les tiges. Les vaſes ont été préparés à la même heure: c'eſt du même blé que j'y ai ſemé; ils ont été poſés ſur une cheminée à la ſuite les uns des autres, de manière que le premier de la ligne étoit à la diſtance de 8 pieds d'une grande fenêtre, placé obliquement, & le dernier en étoit à 12 pieds. Les vaſes ſe correſpondoient tellement pour la poſition où étoient les grains, que le *n.º 1.er* le plus près de la fenêtre, répondoit au *n.º 10*, c'eſt-à-dire, au plus éloigné; le *n.º 2* au *n.º 9*, & ainſi de ſuite. Dans chaque vaſe un grain étoit placé ſur le bord voiſin de la fenêtre, & l'autre ſur le bord oppoſé.

Dans les *n.os 1.er* & *10*, le germe des grains avoit été mis en bas.

Dans les *n.os 2* & *9*, ils étoient en haut.

Dans les *n.os 3* & *8*, les grains étoient poſés ſur la rainure, le germe oppoſé à la fenêtre: dans les *n.os 4* & *7*, la rainure étoit en deſſus, & le germe du côté de la fenêtre.

Dans le *n.º 5*, les grains étoient poſés ſur la rondeur, les germes près l'un de l'autre, de manière que ces grains croiſoient ceux du *n.º 4*, qui étoit à côté.

Dans le *n.º 6*, les grains étoient poſés ſur la rainure, germes éloignés l'un de l'autre, de manière que ces grains croiſoient ceux du *n.º 7*, qui étoit à côté.

Ces grains n'ont pas levé tous en même-temps, mais à peu-près, parce que j'ai tenu la terre de tous les vaſes dans le même état d'humidité. Voici quels en ont été les degrés d'inclinaiſon: la tige antérieure du *n.º 1.er*, c'eſt-à-dire, le plus près du bord antérieur du vaſe, & dans lequel les grains avoient été poſés le germe en bas, meſurée à 14 lignes de hauteur, avoit 15 degrés d'inclinaiſon, & à 4 pouces 1 ligne, avoit 9 degrés: la tige poſtérieure, c'eſt-à-dire, celle qui étoit le plus près du bord poſtérieur à 15 lignes, avoit 8 degrés, & à 4 pouces $\frac{1}{2}$, avoit 3 degrés.

La tige antérieure du *n.º 10*, correſpondant au *n.º 1.er*, mais

éloigné de la fenêtre de 4 pieds plus que le précédent, à 12 lignes avoit 46 degrés, & à 2 pouces 11 lignes avoit 4 degrés: la tige postérieure, à 13 lignes avoit 46 degrés, & à 3 pouces avoit 6 degrés.

La tige antérieure du *n.° 2*, dont les grains avoient été posés le germe en haut, à 6 lignes avoit 33 degrés, & à 4 pouces 4 lignes avoit 22 degrés: la tige postérieure, à 7 lignes avoit 21 degrés, & à 4 pouces 5 lignes avoit 15 degrés.

La tige antérieure du *n.° 9*, correspondant au *n.° 2*, à 11 lignes avoit 47 degrés, & à 3 pouces avoit 6 degrés: la tige postérieure, à 8 lignes avoit 43 degrés, & à 2 pouces $\frac{1}{2}$ avoit 5 degrés.

La tige antérieure du *n.° 3*, dont les grains étoient posés la rainure en bas, le germe opposé à la fenêtre, à 11 lignes $\frac{1}{2}$ avoit 37 degrés, & à 3 pouces $\frac{1}{2}$ avoit 4 degrés: la tige postérieure, à 8 lignes avoit 22 degrés, & à 3 pouces 5 lignes avoit 6 degrés.

La tige antérieure du *n.° 8*, correspondant au *n.° 3*, à 11 lignes avoit 70 degrés, & à 2 pouces 9 lignes avoit 19 degrés: la tige postérieure, à 11 lignes avoit 60 degrés, & à 2 pouces 9 lignes avoit 16 degrés.

La tige antérieure du *n.° 4*, dont les grains étoient posés sur la rondeur, le germe du côté de la fenêtre, à 7 lignes avoit 10 degrés, & à 1 pouce 11 lignes avoit 1 degré: la tige postérieure, qui se trouvoit un peu recoquillée, à 5 lignes avoit 21 degrés $\frac{1}{2}$, & à 3 pouces avoit 4 degrés.

La tige antérieure du *n.° 7*, correspondant au *n.° 4*, à 9 lignes avoit 7 degrés, & à 1 pouce 10 lignes avoit 3 degrés: la tige postérieure, à 4 lignes avoit 15 degrés, & à 1 pouce $\frac{1}{2}$ avoit 12 degrés.

La tige antérieure du *n.° 5*, dont les grains posés sur la rondeur, germes près l'un de l'autre, croisoient les grains du *n.° 4*, à 7 lignes avoit 31 degrés, & à 3 pouces 1 ligne avoit 3 degrés: la tige postérieure, qui étoit un peu reco-

quillée, à 6 lignes avoit 36 degrés, & à 3 pouces 3 lignes avoit 36 degrés.

On obſervera que du *n.° 1.er* au *n.° 5*, la diſtance de la fenêtre augmentoit de 6 pouces par vaſe : de même, du *n.° 10* au *n.° 6*, la diſtance de la fenêtre diminuoit de 6 pouces par vaſe.

La tige antérieure du *n.° 6*, dont les grains poſés ſur la rainure, germes éloignés l'un de l'autre, croiſoient les grains du *n.° 7*, à 12 lignes avoit 17 degrés, & à 2 pouces 11 lignes avoit 11 degrés : la tige poſtérieure, à 9 lignes avoit 58 degrés, & à 3 pouces 3 lignes avoit 7 degrés.

Toutes ces inclinaiſons ont été meſurées à la manière ordinaire, c'eſt-à-dire, en marquant ſur un papier blanc le plus exactement poſſible, le point extrême de chaque tige & le point d'où elle ſort de terre, & en tirant ainſi de l'un à l'autre une ligne, dont l'angle a été pris ſur le rapporteur.

Il eût été à deſirer que les jours où j'ai meſuré toutes les tiges, elles euſſent été à la même hauteur ; mais les grains ayant été ſemés dans des poſitions différentes, ils n'avoient pu croître également. D'ailleurs, pour que l'accroiſſement ſoit égal entre pluſieurs Plantes, il faut la réunion de beaucoup de circonſtances ; ce qui ne ſe trouve jamais.

XI.me Expérience.

Indépendamment des meſures priſes des degrés d'inclinaiſon de toutes les Plantes de la précédente expérience, dans un vaſe ſéparé je meſurai une Plante : à 3 lignes de hauteur elle avoit une inclinaiſon de 83 degrés $\frac{1}{2}$; à 13 lignes, de 35 degrés; & à 2 pouces 3 lignes, de 12 degrés $\frac{1}{2}$.

Je pouſſai ces meſures encore plus loin, & je voulus ſavoir en même-temps ſi en plaçant des vaſes devant une glace, devant un linge blanc & devant une étoffe noire, la différence d'inclinaiſon qui devoit en réſulter, ſe prolongeroit ſelon l'accroiſſement des Plantes. Des vaſes furent placés de ces trois manières : les grains de blé que j'avois ſemés, au nombre de quatre par vaſe, étoient tous poſés ſur la rainure, germe oppoſé à la fenêtre, & par conſéquent dans la poſition la plus favorable pour ſe pencher davantage. Je n'en meſurai

qu'un dans chaque vaſe, ce ſut celui qui d'abord me parut le plus incliné. Chacun ſut meſuré quatre ſois au même moment, & de vingt-quatre en vingt-quatre heures.

La tige placée devant une étoffe noire, à 12 lignes avoit 86 degrés d'inclinaiſon; à 23 lignes, en avoit 45 degrés; à 3 pouces, elle en avoit 47 degrés, & à 4 pouces 4 lignes, 39 degrés.

La tige placée devant un miroir, à 8 lignes avoit 50 degrés d'inclinaiſon, à 19 lignes elle avoit 37 degrés $\frac{1}{2}$, à 2 pouces 11 lignes elle avoit 34 degrés, & à 4 pouces 8 lignes elle avoit 20 degrés. La tige placée devant un linge blanc à 9 lignes avoit 47 degrés $\frac{1}{2}$, à 21 lignes en avoit 27, à 2 pouces 7 lignes en avoit 25 $\frac{1}{2}$, & à 4 pouces avoit 19 degrés.

Si l'on compare ces degrés d'inclinaiſon avec ceux des tiges de l'expérience dixième, dont les grains ont été poſés auſſi favorablement, on verra que dans cette dernière expérience l'inclinaiſon eſt plus forte. On ceſſera d'en être étonné quand on ſaura que le lieu où a été faite la dixième expérience, étoit vaſte & éclairé de deux grandes fenêtres; au lieu que j'ai fait la onzième dans un lieu plus étroit, où il n'y avoit qu'une petite fenêtre à 10 pieds des vaſes. Mon intention étoit de varier toujours les expériences autant qu'il étoit poſſible, pourvu qu'en vérifiant mes obſervations dans des endroits différens, je puſſe en faire de nouvelles, qui ajoutaſſent quelque choſe aux premières.

XII.me Expérience.

J'avois diſpoſé dans une cave pluſieurs miroirs, dont le premier recevoit la lumière d'un ſoupirail: celui-ci la réfléchiſſoit ſur un autre, & ainſi des uns aux autres; des tiges de blé & de chicorée ſauvage, placées devant ces miroirs s'inclinoient vers la lumière qu'ils réfléchiſſoient; il en étoit de même des tiges de pareilles Plantes & d'autres élevées dans une cave & placées vis-à-vis d'une lampe ou d'un miroir qui renvoyoit la lumière de la lampe: ce qui paroît contraire à l'opinion de M. Senebier (*Journal de Phyſique de Novembre 1779*) qui prétend que la lumière de la flamme

ne remplace pas celle du jour ſur les Plantes. La réflexion de deux miroirs, qui recevoient la lumière du jour par des ſoupiraux différens, ayant été réunie dans un même point, des Plantes placées à cet endroit s'élevoient droites, parce que la lumière renvoyée par un miroir, contrebalançant celle de l'autre, il n'y avoit plus lieu à l'inclinaiſon.

De tous ces faits rapportés dans ce Mémoire, il réſulte les vérités ſuivantes : plus les tiges des Plantes ſont près de leur naiſſance, plus elles s'inclinent vers la lumière ; plus elles s'éloignent de leur naiſſance, plus leur inclinaiſon diminue : chacune des expériences particulières compriſes dans la dixième & dans la onzième, en fournit une preuve. On ne peut dire qu'elles ont d'autant plus beſoin de la lumière, qu'en germant dans la terre elles en ont été privées ; car des grains qui germent ſur de la mouſſe ou ſur du coton ou ſur du liége s'inclinent auſſi davantage à leur naiſſance : c'eſt ſans doute parce que plus une Plante eſt jeune, plus elle eſt tendre & diſpoſée à ſe porter vers un élément qui lui eſt néceſſaire.

Plus des Plantes, qu'on élève dans des vaſes, ſont éloignées de la lumière, toutes choſes étant égales d'ailleurs, plus elles ont de penchant pour s'y porter ; dans la dixième expérience, entr'autres exemples frappans, les tiges antérieures des *n.os 3* & *8*, dont le dernier étoit à 3 pieds plus loin de la lumière que le premier, ayant été meſurées à 11 lignes, marquoient, celle du *n.o 3*, 37 degrés, & celle du *n.o 8*, 70 degrés.

Plus des Plantes, toutes choſes étant égales d'ailleurs, croiſſent devant des corps dont les couleurs abſorbent, ou réfléchiſſent peu les rayons de la lumière, plus leur inclinaiſon vers elle eſt conſidérable. Dans la onzième expérience les tiges placées devant une étoffe noire, ſe ſont inclinées plus que celles qui étoient devant un miroir, & ces dernières plus que celles qui étoient devant un linge blanc ; parce que le miroir renvoyoit une partie de la lumière bien au-delà

du vaſe où étoient les Plantes, tandis que le linge blanc la conſervoit aux environs.

La poſition du germe des ſemences eſt encore une des cauſes de la différence de l'inclinaiſon de leurs tiges vers la lumière; par exemple, dans le blé la jeune tige qui ſort du germe ſe prolonge le long de la rondeur. Il arrive de là que ſi l'on diſpoſe des grains ſur la rainure, le germe étant oppoſé à la fenêtre, ils ont naturellement du penchant pour s'y diriger: auſſi a-t-on vu dans la dixième expérience les *n.os 3, 5, 8,* fournir des exemples d'inclinaiſon plus grande, parce que les grains étoient poſés ſur la rainure, germe oppoſé à la fenêtre, que les *n.os 4, 6* & *7* qui étoient auprès, & dont les grains étoient poſés ſur la rondeur, le germe vers la fenêtre. Il ne s'enſuit pas pour cela que des grains placés de la même manière, à hauteur égale & à côté les uns des autres, auront toujours une égale inclinaiſon; car ſouvent dans le même vaſe des grains poſés les uns comme les autres ne forment pas des angles d'inclinaiſon pareils, comme on le voit dans les tiges du *n.o 8* de la dixième expérience: mais la différence de l'inclinaiſon de ces tiges entre elles eſt bien moindre que celle qui ſe trouve entre des tiges de vaſes plus éloignés les uns que les autres de la fenêtre, ou dont les grains ont été poſés diverſement. Plus des Plantes ont de facilité à pouſſer leurs tiges au-dehors, plus elles s'inclinent aiſément vers la lumière; il eſt aiſé de s'en convaincre par la huitième expérience.

On peut conclure de ces dernières réflexions, que l'inclinaiſon des Plantes vers la lumière, eſt en raiſon compoſée de leur jeuneſſe, de la diſtance où elles ſont de la lumière, de la manière dont leurs germes ont été poſés, de la couleur des corps devant leſquels elles croiſſent, & du plus ou moins de facilité que leurs tiges trouvent à ſortir ſoit de terre, ſoit des autres matières, ſur leſquelles on a ſemé les graines.

On doit tirer encore de toutes les expériences précédentes les conſéquences qui ſuivent, 1.° de quelque côté qu'on place des Plantes qu'on élève, elles ſe tournent vers la

lumière ; si on les dérange de leur penchant naturel en plaçant les vases en sens contraire, d'abord leur extrémité plus tendre que le reste, se retourne ; le surplus de la tige prend, mais lentement & successivement, la même direction. Les feuilles se renversent lorsqu'elles sont à une certaine hauteur, & la plupart du côté de la lumière. Si on coupe les tiges jusqu'à la racine, en repoussant de nouveau il n'y en a que quelques-unes qui s'inclinent, parce qu'elles acquèrent plus de force.

2.° Que ce soit à la surface de la terre ou dans des souterrains, dans des appartemens très-éclairés, ou dans des lieux qui reçoivent peu de jour, qu'on sème des graines pour les élever, les jeunes tiges se pencheront toujours vers la lumière, parce qu'il paroît que les végétaux en ont un grand besoin. M. Fougeroux de Bondaroy a remarqué que des marrons d'Inde, qu'il avoit plantés au moment où ils commençoient à germer, ayant été retirés au mois de Juin, d'une terre très-ameublie & profonde, les tiges & les racines étoient mêlées sans aucune direction. Selon le même Observateur, des pommes de terre, placées dans un caveau entièrement obscur, sans soupirail, poussèrent des racines & des tiges qui ne s'élevèrent point : dans ces deux cas, c'est la privation de la lumière qui a formé obstacle à l'ascension des tiges. Ce besoin se manifeste singulièrement à l'égard des arbres des forêts : on voit ceux qui se trouvent sur les bords se jeter du côté libre, leurs voisins s'en rapprocher ; ceux qui sont environnés de beaucoup d'autres, s'élever au-dessus pour recevoir l'impression de la lumière, en périr même s'ils ne peuvent y parvenir. C'est peut-être autant en facilitant la distribution de la lumière, qu'en procurant des courans d'air, que des percées faites dans les bois en favorisent la végétation.

3.° Comme la lumière est une, & que ses différentes modifications n'altèrent point son essence ni ses propriétés, les Plantes qui croissent devant la lumière réfléchie par des miroirs, s'y inclinent aussi ; non pas à la vérité aussi fortement que vers la lumière directe. La flamme d'une chandelle ne

me

me paroît être autre chose que la lumière du jour dans un état différent. Il n'est donc pas étonnant que j'aie vu des Plantes s'incliner vers cette espèce de lumière, moins fortement sans doute que vers la lumière du jour réfléchie. Au reste, si j'avois employé une forte flamme, l'inclinaison eût peut-être été aussi considérable.

Je sens bien qu'on pourroit rendre ces expériences & ces observations encore plus complètes, mais le temps ne permet pas toujours de pousser les recherches aussi loin qu'on le desireroit. Il me semble que j'en ai dit assez pour développer, plus qu'il ne l'avoit été, un phénomène aussi curieux que celui de l'inclinaison des Plantes vers la lumière. A l'exception de la douzième expérience, dans laquelle j'ai employé de la chicorée sauvage, seulement pour faire voir qu'elle s'inclinoit vers la lumière, ou directe ou réfléchie, & vers la lumière d'une lampe, ou directe ou réfléchie; toutes les autres expériences ont été faites avec du blé. Je ne regarde donc les conséquences que j'en tire que comme relatives à ce genre de Plantes; & je me propose d'en examiner qui soient d'un autre genre & d'une autre classe, pour en connoître les rapports & les différences; car on ne peut douter qu'il ne s'en trouve entr'elles.

ARTICLE SECOND.

Éthiolement des Plantes.

LES Plantes qui viennent dans les souterrains, & celles qui se trouvent couvertes par hasard, ou qu'on lie dans les jardins, sont jaunes ou blanches, au lieu d'être vertes: ce phénomène ne peut être attribué qu'à la privation de la lumière. Les Physiciens en sont persuadés, sur-tout depuis que M.rs Bonnet, de Genève; du Hamel du Monceau, Meese, & quelques autres, ont fait aussi des expériences sur ce sujet. Je ne rappellerai point ici les moyens ingénieux qu'ils ont imaginés pour prouver cette vérité, on peut consulter les Ouvrages de M. Bonnet, la Physique des arbres de M du Hamel, & le Journal de Physique, *tome VI, page 445;* mon

but eſt d'examiner dans ce Mémoire, ſi les différentes modifications de la lumière ont ſur la couleur des plantes la même influence que la lumière directe; recherches que je ne crois pas qu'on ait encore faites, du moins d'une manière auſſi particulière.

Le lieu dans leſquel je fis les expériences ſuivantes, eſt une cave de dix à douze pieds de profondeur; elle a ſept pieds de largeur & quarante pieds de longueur: à une extrémité eſt l'eſcalier, dont le bas eſt éclairé par un ſoupirail oblique de neuf pouces d'ouverture en carré, & qui jette ſa lumière à quatorze pieds. Il y a à l'autre extrémité un ſoupirail perpendiculaire, dont l'ouverture eſt de dix pouces ſur ſeize, & qui jette ſa lumière à huit pieds; la poſition de ces ſoupiraux & celle de la porte établiſſent dans la cave un courant d'air: on n'y voit clair qu'aux deux extrémités; le reſte, à cauſe de l'éloignement des ſoupiraux & d'un coude qui s'y trouve, eſt dans l'obſcurité parfaite.

J'avois réſolu de me ſervir du *ſolanum tuberoſum*, dont les feuilles ſont d'un vert foncé; mais en ayant deſcendu à la cave, bientôt les feuilles ſe flétrirent & pourrirent.

Je ſemai du blé dans un pot que je laiſſai à la ſurface de la terre, juſqu'à ce qu'il eût un pouce & demi; alors je le plaçai dans la cave, à l'endroit où un miroir renvoyoit la lumière qu'il recevoit d'un des ſoupiraux: le blé s'étant élevé ſe renverſa en différens ſens, en ſorte que certaines feuilles ſe trouvoient dans l'obſcurité, & d'autres expoſées à la réflexion de la lumière du miroir; ces dernières étoient vertes & les premières jaunes.

Je plaçai enſuite dans la même cave quatre miroirs, un au bas du premier ſoupirail, un à la réflexion de ce miroir, un autre au bas du ſecond ſoupirail, & le quatrième à la réflexion de celui-ci: les deux miroirs placés à chacune des réflexions des miroirs qui recevoient le jour des ſoupiraux, renvoyoient leur lumière en un point commun qui étoit au milieu de la cave, en ſorte que cette double réflexion réunie en étoit plus forte

Les miroirs étoient de grandeur inégale, & tels que j'avois pu me les procurer; par cette diſpoſition, la cave, obſcure auparavant, devenoit aſſez éclairée pour qu'on pût y marcher ſans lumière, car dans les endroits où les réflexions ne portoient pas, il y avoit une lueur qui en ôtoit l'obſcurité.

Les deux miroirs qui recevoient immédiatement la lumière du jour, étoient diſtans l'un de l'autre de quarante-huit pieds; chacun renvoyoit la lumière à douze pieds, & ceux qui la recevoient d'eux, la renvoyoient auſſi à douze pieds: je plaçai au bas de chaque miroir un pot rempli de blé ſemé à la cave, un à la réunion des deux réflexions, & un dans un endroit où il n'y avoit point de réflexion: comme la chicorée ſauvage croît facilement à la cave, j'en fis mettre des racines dans des pots, & je plaçai un pot de cette Plante à côté de chaque pot de blé.

Des thermomètres placés aux différens endroits, annoncèrent que par toute la cave la température étoit à 12 degrés; celle de l'atmoſphère étoit alors à 24.

Au bout de quelque temps je comparai les pots entr'eux: 1.° les plants de ceux qui étoient placés au-deſſous de l'un & l'autre ſoupirail, étoient plus verts que le reſte; ceux qui recevoient la lumière du ſoupirail perpendiculaire, plus grand que l'autre, avoient la couleur verte plus foncée que ceux qu'éclairoit le ſoupirail oblique.

2.° Les pots placés devant le miroir qui répétoit la lumière de celui qui la recevoit du ſoupirail oblique, n'étoient pas auſſi verts que les pots placés à la réflexion du ſoupirail perpendiculaire, pour deux raiſons ſans doute; la première, parce que ce dernier miroir étoit plus grand; la ſeconde, parce que le ſoupirail perpendiculaire avoit plus d'ouverture, & ne jetoit pas la lumière auſſi loin, ce qui ne l'affoibliſſoit pas autant: les uns & les autres avoient une nuance de vert inférieur à celui des pots placés au bas de chaque ſoupirail.

3.° Je ne trouvai preſque point de différence dans la couleur verte des Plantes placées à la réunion des deux réflexions ſecondaires, d'avec celle des Plantes placées à

chacune des deux premières réflexions, parce qu'en réunissant ainsi deux réflexions, j'ai rendu la lumière aussi forte que celle de chaque première réflexion.

4.° Les Plantes placées à l'obscurité, quoiqu'au plus à un pied des lumières directes ou réfléchies, étoient d'un jaune-pâle : puisque la lueur répandue dans la cave, à cause de toutes les réflexions, n'a pas suffi pour rendre vertes ces dernières Plantes, il est donc nécessaire pour qu'elles conservent cette couleur, que la lumière tombe directement sur elles : on voit encore par-là, que pour peu qu'elles soient éloignées du point où se dirigent les rayons de la lumière, elles ne participent point, ou ne participent que foiblement à son influence.

J'observerai que dans les pots de blé, les nuances n'étoient pas aussi sensibles que dans les pots de chicorée sauvage qui peut-être souffre moins de la privation de la lumière, car j'ai déjà remarqué que la chicorée sauvage s'incline moins vers la lumière que le blé.

Pour bien voir l'effet de l'obscurité sur une Plante de chicorée sauvage, il faut qu'elle commence a pousser à la cave, car si on ne l'y descend que quand elle a commencé à pointer, souvent cette pointe seulement reste un peu verte, tandis que le surplus de la Plante est jaune.

On avoit négligé pendant six jours d'ôter l'humidité des miroirs, cette négligence me fit répéter l'expérience de la même manière & avec plus de soin encore, & les résultats en furent mieux marqués : dans cette seconde expérience, le pot placé auprès du soupirail perpendiculaire, donna des plants moins verts que ceux des réflexions, ce qui m'étonna d'abord; mais je m'aperçus qu'il se trouvoit par hasard sur la bordure de l'obscurité & dans l'obscurité, aussi étoit-il semblable à celui que j'avois mis exprès dans l'obscurité.

Il ne suffisoit pas de savoir que la lumière réfléchie par des miroirs, conservoit plus ou moins aux Plantes leur couleur verte, il falloit encore s'assurer si la flamme d'un corps allumé produiroit le même effet, ce qui étoit à présumer,

puiſque devant une lampe, des Plantes s'inclinent comme devant la lumière du jour, ſoit directe, ſoit réfléchie; cette idée donna lieu aux quatre expériences ſuivantes.

Un pot de laitue romaine, de l'eſpèce la plus verte, & qui étoit déjà levée, fut expoſé à la cave, au-deſſous d'une lampe tenue allumée jour & nuit, & dont la mèche étoit trop petite pour qu'elle pût échauffer le pot qui en étoit à plus de deux pieds: pour avoir un objet de comparaiſon, je mis en même temps un autre pot de la même Plante au bas du premier ſoupirail, d'où il recevoit la lumière du jour.

La végétation de ces Plantes a été très-lente, leurs tiges étoient blanchâtres comme toutes celles des végétaux qui croiſſent dans les ſouterrains; mais les feuilles étoient vertes, à la vérité avec moins d'intenſité que celles des mêmes Plantes élevées à la ſurface de la terre; le pot placé au bas de la lampe avoit une nuance de moins que celui qui étoit au bas du ſoupirail.

Ces Plantes, en vingt jours, n'étoient parvenues qu'à deux pouces & deux pouces & demi; les ayant remontées de la cave, je les vis périr en peu de temps.

Un pot de laitue romaine deja avancée, fut mis devant la même lampe, les feuilles reſtèrent vertes quelques jours, & peu-à-peu elles pourrirent.

La laitue ne m'ayant pas paru propre à être élevée dans la cave, parce qu'apparemment elle eſt d'une nature trop humide; pour répéter l'expérience précédente, je recourus à la chicorée ſauvage, dont la racine aſſez forte, rend les tiges en état de réſiſter à l'humidité des ſouterrains; j'en fis mettre dans quatre pots qui furent diſtribués lorſquelle commençoit à pouſſer, ſavoir;

Le *n.*° *1.*er au bas du premier ſoupirail de la cave:

Le *n.*d *2* à la réflexion d'un miroir placé au bas de ce ſoupirail:

Le *n.*° *3* dans un endroit obſcur de la cave, mais peu diſtant du *n.*° *précédent* & du *ſuivant:*

Le *n.° 4* au bas de la lampe, vers le milieu de la cave, à la place même où tous les hivers un Jardinier élevoit de la chicorée ſauvage qui y devenoit jaune.

Cette diſtribution de pots me parut capable de prouver mieux l'effet de la lumière de la lampe ſur la Plante qui étoit au bas, parce qu'elle fourniſſoit une ſuffiſante quantité d'objets de comparaiſon: ſept jours après, les quatre pots ayant été examinés les uns à côté des autres, les feuilles des *n.os 1.er, 2 & 4* furent jugées vertes, à peu-près comme des feuilles de laitue romaine qui ne ſont pas d'un vert égal; les feuilles du *n.° 3* placé dans l'obſcurité, étoient totalement jaunes.

Je continuai encore l'expérience pendant onze jours, afin de voir ſi avec le temps les tiges vertes ne jauniroient pas; ce jour-là je remontai tous les pots, & je les expoſai, ſans prévenir, au jugement d'un grand nombre de perſonnes; elles prononcèrent unanimement que les feuilles du *n.° 1.er* étoient du vert le plus foncé; que les feuilles des *n.os 2* & *4* dont la verdeur étoit la même, avoient quelques feuilles auſſi vertes que dans le *n.° 1.er*, & quelques-unes moins vertes; le *n.° 4* étoit devant la lampe: enfin que le *n.° 3* mis dans l'obſcurité, étoit parfaitement jaune.

Je coupai toutes les feuilles, je laiſſai les racines, afin qu'elles en repouſſaſſent de nouvelles, & je changeai quelques pots de place, 1.° pour examiner ce qui arriveroit aux repouſſes; 2.° pour confirmer encore mieux par le changement des pots, l'influence de la lampe, de l'obſcurité & de la réflexion du miroir ſur les Plantes qui y étoient expoſées,

Le *n.° 1.er* reſta au bas du ſoupirail.

Le *n.° 2* fut mis à la place du *n.° 3*, c'eſt-à-dire, dans l'obſcurité.

Le *n.° 3* remplaça le *n.° 2*, c'eſt-à-dire qu'il fut mis à la réflexion du miroir.

Le *n.° 4* ne changea point de place, mais j'éteignis la lampe.

Onze jours s'étant écoulés, je comparai entr'eux les pots: le *n.° 1.er*, comme on n'en peut douter, étoit vert; le

n.° 2 d'un jaune-pâle ; le *n.° 3* moins vert que le *n.° 1.er*, & aussi moins vert que le *n.° 2*, avant que les feuilles en eussent été coupées ; & le *n.° 4* parfaitement jaune, au lieu que celui qui avoit été devant la lampe, avant qu'elle fût éteinte, étoit verdâtre.

Il résulte de cette expérience, que des Plantes qui croissent devant une lampe allumée, y conservent une verdeur à peu-près pareille à celle des Plantes placées devant la réflexion d'un miroir; tandis qu'en les faisant croître à la même place, mais après avoir éteint la lampe, elles sont décolorées ; ce seul exemple ne suffiroit-il pas pour constater l'influence de la flamme sur la couleur des végétaux ?

Par les changemens que j'ai fait des différens pots, on voit que le plus ou moins d'altération de la couleur provient des places dans lesquelles je les ai posés, puisque la repousse du *n.° 2*, qui avoit été verte étant à la réflexion du miroir, étoit jaune lorsque ce *numéro* a été mis dans l'obscurité. Par la même raison le *n.° 3*, qui d'abord avoit été jaune, en passant de l'obscurité à la réflexion d'un miroir, est devenu vert, mais non pas autant que le *n.° 2*, lorsque celui-ci occupoit sa place ; peut-être parce que l'influence de l'obscurité sur ce *numéro*, dans le premier cas, a conservé sur ces racines quelque effet capable d'altérer la couleur des repousses. Je dois observer que si la lampe n'eût pas été allumée sans interruption, je n'aurois pas eu devant elle des Plantes presque aussi vertes que celles qui étoient à la réflexion d'un miroir ; mais je ne risquois rien d'entretenir la lampe pour avoir un effet marqué, parce que si elle n'eût dû avoir aucune influence sur la couleur verte des Plantes, je ne lui en aurois pas donné en l'entretenant sans cesse : j'ai d'un autre côté lieu de soupçonner qu'avec une mèche plus forte j'aurois rendu les Plantes plus vertes. Qui sait comment on peut égaler par la lumière d'une lampe une masse donnée de lumière du jour ?

J'avois placé autant de pots qui contenoient du *solanum frutescens*, que de pots de chicorée sauvage, & à autant

d'endroits différens. La tige de cet arbuste étant ligneuse, j'avois espéré qu'il se soutiendroit long-temps à la cave.

Je m'aperçus au bout de douze jours que les *n.*os *1.*er, *2* & *4* étant toujours verts, le *n.*o *3* jaunissoit, parce qu'il étoit dans l'obscurité. Bientôt ces Plantes, loin de croître, dépérirent.

Après avoir éprouvé précédemment que la lumière du jour réfléchie empêchoit les Plantes de perdre leur couleur verte, je pensai que je devois aussi m'assurer si la réflexion de la lumière d'une lampe auroit la même influence. En conséquence, j'en fis allumer une dans la cave; on en ménagea tellement la lumière, en l'environnant de planches, qu'elle tomboit en partie sur un miroir qui en étoit à un pied & demi; ce miroir avoit un pied en carré, & renvoyoit la lumière, qu'il recevoit de la lampe, à cinq pieds, où je plaçai un pot de chicorée sauvage: un autre pot de chicorée fut placé à quatre pieds de la lampe, dans l'endroit où étoit dirigé le surplus de sa lumière.

Pour suivre toujours la comparaison, il y avoit un pot de chicorée sauvage au bas du premier soupirail, un autre à le réflexion d'un miroir placé au bas de ce soupirail, & un autre dans l'obscurité à trois pieds de la lampe. Les places où étoient tous ces pots se trouvoient à la même température.

Huit jours après cette disposition, j'examinai les Plantes qui n'étoient pas encore bien hautes; mais je me trouvois obligé de partir du lieu où je faisois l'expérience.

Celles du bas du soupirail étoient les plus vertes.

Celles de la réflexion du miroir étoient moins vertes.

Celles de l'obscurité étoient d'un jaune-blanc.

Celles de la lumière de la lampe étoient verdâtres.

Enfin celles de la réflexion de la lampe, avoient une nuance de vert moindre que celles de la lumière directe de la lampe; & les unes & les autres étoient d'une nuance différente de celles qui étoient dans l'obscurité.

Dans cette circonstance, la lampe ne brûloit pas toute la nuit.

On

On peut donc en quelque ſorte aſſimiler les effets de la flamme ſur les Plantes, à ceux de la lumière du jour. S'il y avoit un moyen de ſe procurer une lumière de lampe, ou de tout autre corps en combuſtion, qui pût égaler la lumière du jour, peut-être les Plantes qui croîtroient ſous l'influence de l'une, ſeroient-elles auſſi vertes que celles qui croîtroient ſous l'influence de l'autre. Mais n'entrons pas dans une matière qui nous conduiroit trop loin, & rendons compte encore de quelques recherches.

La lumière de la Lune étant la réflexion de celle du Soleil, & par conſéquent un affoibliſſement du jour, il y avoit lieu de croire que des Plantes qu'on n'expoſeroit qu'à cette lumière ne ſeroient pas entièrement privées de la couleur verte, néanmoins j'ai voulu m'en aſſurer de la manière ſuivante.

Au mois de Juin, j'ai ſemé de la graine de rave dans quatre pots remplis de terreau, qui étoient d'une égale hauteur, & d'une égale capacité.

L'un, que je déſignerai par le *n.º 1.er* a été placé dans un Jardin, à l'ombre du Soleil, où il eſt reſté toujours.

Le *n.º 2* eſt reſté auſſi pendant toute l'expérience dans une ſerre cloſe & obſcure, où l'on entroit pluſieurs fois par jour.

Le *n.º 3*, depuis le lever du Soleil juſqu'après ſon coucher, étoit expoſé au jour & aux rayons du Soleil; le ſoir on l'entroit dans la ſerre à côté du *n.º 2*.

Le *n.º 4*, depuis le coucher du Soleil juſqu'à ſon lever, ſe trouvoit expoſé à la lumière de la Lune qui étoit à ſon premier quartier; on le rentroit dans la ſerre au moment où l'on déplaçoit le *n.º 3* pour le mettre au jour; de manière qu'alternativement le *n.º 3* & le *n.º 4* étoient dans l'obſcurité, dont on ôtoit le dernier pendant la nuit & l'autre pendant le jour.

Environ quinze jours après je comparai les Plantes des quatre pots.

Les feuilles du *n.º 1.er* étoient très-vertes.

Celles du *n.°* 2 étoient entièrement éthiolées & blanches.

Celles du *n.°* 3 avoient une nuance de vert plus foible que celles du *n.°* 1.

Enfin celles du *n.°* 4 étoient d'un vert beaucoup plus foible que celles des *n.*^{os} *1 & 3;* elles différoient de celles du *n.°* 2, qui étoient blanches.

On en peut donc conclure que la lumière de la Lune influe sur la couleur des végétaux.

Desirant connoître en outre les effets de la lumière sur les Plantes en passant par des milieux diversement colorés, j'ai fait placer un chassis, composé de quatre carreaux, à une fenêtre d'un rez-de-chaussée; l'un des carreaux étoit de verre blanc, un autre de verre jaune-clair ou peu foncé, un autre de verre jaune-foncé, & un autre de bleu-foncé; c'étoient les seuls verres colorés que je pusse me procurer.

Ils ont été séparés les uns des autres par des planches; j'ai pris toutes les précautions pour éviter que les murs & les embrasures de la fenêtre ne jetassent sur les planches une lumière de réflexion.

J'ai placé devant chaque carreau un pot de racines de chicorée sauvage, qui ont poussé avec lenteur, parce que la saison étoit froide.

Quand les pousses ont été parvenues à une certaine hauteur, je les ai comparées.

Les feuilles qui ont poussé devant le carreau de verre blanc, étoient vertes, moins cependant que si le pot eût été hors d'un appartement.

Les feuilles qui étoient devant le verre bleu étoient ensuite les plus vertes, il y avoit entr'elles & les précédentes une nuance sensible.

Les feuilles qui ont poussé devant le carreau jaune-clair, ne différoient des dernières que par une foible nuance, elles étoient un peu moins vertes.

Enfin, les moins vertes de toutes étoient celles qui avoient été placées devant le carreau d'un jaune-foncé; la différence en étoit frappante.

Voici les conſéquences que je crois devoir tirer des expériences qui précèdent.

Les feuilles des Plantes qui croiſſent à la lumière du jour en liberté, ſont en général vertes, à moins que quelques circonſtances de culture ou de maladie, ou de chaleur, n'en changent ou n'en altèrent la couleur.

Celles qu'on élève dans les ſouterrains y ſont d'autant moins vertes qu'il s'y introduit moins de lumière, ou qu'elle y parvient plus obliquement, ou que la cave étant profonde, la lumière y eſt portée de plus loin.

Dans les ſouterrains, celles qui reçoivent la lumière du jour, ont une couleur verte plus foncée que celles qui ne reçoivent que la lumière de réflexion; plus les réflexions ſe multiplient, plus la couleur verte diminue, parce que la lumière s'affoiblit davantage.

La lumière d'une lampe conſerve aux Plantes leur verdeur avec moins d'intenſité que la lumière du jour directe ou réfléchie : à la réflexion de la lumière d'une lampe, la couleur verte s'affoiblit encore, du moins j'en ai eu des preuves dans les expériences dont j'ai rendu compte; mais comme je n'ai pas calculé les degrés de lumière, ſoit naturelle, ſoit artificielle, employés, je ne prononce pas ſur cette diminution d'influence. Il ſuffit de dire ici que la couleur verte des végétaux ne ſe détruit pas à la clarté la plus foible comme elle ſe détruit dans l'obſcurité.

Pour qu'une Plante ſoit décolorée, il n'eſt pas néceſſaire qu'elle ſoit très-éloignée de la lumière; pourvu que la lumière ne tombe pas ſur elle, elle n'aura pas de couleur.

Toutes les Plantes ne ſont pas également diſpoſées à être élevées dans les ſouterrains, qui ſont les endroits qu'on peut rendre les plus obſcurs; il y en a qui n'y croiſſent pas, d'autres ne s'y ſoutiennent pas, d'autres enfin s'y élèvent plus facilement.

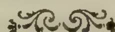
On ne peut douter que la lumière de la Lune n'entretienne dans les végétaux la couleur verte qu'ils reçoivent du jour ou du Soleil, puiſque des Plantes qui paſſent les nuits dans

des lieux parfaitement obſcurs, ſont moins vertes que celles qui ſont la nuit expoſées à la lumière de la Lune.

Quelles conſéquences tirer de ce que des Plantes en végétation devant un verre coloré en bleu-foncé, y ſont ou plus ou au moins auſſi vertes que celles qui végètent devant un verre jaune-foncé, ou même jaune-clair & par conſéquent approchant de la tranſparence? je crois qu'il faut s'en abſtenir juſqu'à ce que ce fait unique ait été répété & conſtaté de nouveau.

On demandera pourquoi, s'il eſt vrai que la couleur verte des Plantes ſoit, comme il le paroît, en raiſon de la plus ou moins grande lumière qu'elles reçoivent, celles qui ſont au nord moins éclairé que le midi, ou abritées par des bois, ſont plus vertes que celles qui ſont au grand Soleil & ſans abri? C'eſt que dans le premier cas elles ſont ordinairement plus fraîchement, au lieu que dans le ſecond cas étant plus expoſées aux évaporations & à l'ardeur du Soleil qui les deſſèche, elles ne peuvent conſerver leur couleur verte, qui demande, outre la lumière, une certaine humidité ſans laquelle elle ne ſe ſoutient pas.

Il ſeroit ſans doute intéreſſant de pouvoir expliquer par quelle raiſon la couleur verte des végétaux eſt dépendante de la lumière; il le ſeroit également d'expliquer la cauſe de leur inclinaiſon vers elle : ce dernier phénomène ſe conçoit mieux que le premier, parce qu'on peut croire que la lumière eſt néceſſaire pour la végétation, comme l'eau l'eſt en général pour toutes les Plantes, & particulièrement pour quelques-unes qui dirigent leurs tiges vers cet élément lorſqu'elles en ſont à quelque diſtance. Les rapports de la lumière du jour avec la couleur verte des végétaux ne ſont encore point connus, ce ne ſeroit qu'en ſe livrant à des conjectures qu'on pourroit eſſayer d'en rendre raiſon; moyens que nous croyons devoir rejeter, & qui ne ſont nullement propres à avancer la Phyſique.



RAPPORT

FAIT À L'ACADÉMIE,

Relativement à l'avis que le Parlement a demandé à cette Académie, par arrêt du 6 Septembre 1783.

Sur la contestation qui s'est élevée à Rochefort, au sujet de la taxe du Pain; sur les Expériences qui ont été faites dans cette Ville à ce même sujet, en exécution d'un arrêt du Parlement du 17 Juin 1781; & sur les moyens d'établir le prix juste du Pain, proportionnément à celui du Blé, suivant la quantité de Farines différentes qu'une quantité de livres de Blé peut rendre, & suivant la quantité de Pain que ces Farines doivent donner.

Par M.rs LE ROY, TILLET & DESMAREST.

LE Parlement a fait l'honneur à l'Académie de lui demander son avis sur une contestation qui s'est élevée, au sujet de la taxe du pain, entre les Maire & Échevins de la ville de Rochefort, Lieutenans généraux de Police, & la communauté des Boulangers de la même Ville. L'Académie nous a chargés en conséquence d'entrer dans l'examen de cette contestation, aussi importante en elle-même que délicate par les circonstances qui l'ont accompagnée; de faire toutes les expériences qu'elle pourroit exiger, & de lui rendre compte des résultats auxquels nos observations nous auroient conduits.

Le Parlement ordonna, par un arrêt du 8 Janvier 1780, qu'un tarif fait en 1703 pour la taxe du pain à Rochefort,

y auroit ſon exécution; les Maire & Échevins de cette Ville y formèrent oppoſition; ils demandèrent qu'une Ordonnance de Police rendue en 1709, & peu favorable aux Boulangers, fût exécutée par préférence au tarif de 1703.

Les Boulangers croyant avoir autant lieu de ſe plaindre de l'Ordonnance de 1709, que les Maire & Échevins avoient d'oppoſition pour le tarif de 1703, demandèrent qu'il fût fait un eſſai, afin qu'on pût juger authentiquement du produit réel de leur travail, & prononcer en connoiſſance de cauſe ſur les motifs de leurs réclamations; cet eſſai fut accordé aux Boulangers par un Arrêt du 17 Juin 1781, & le Parlement ordonna en même-temps aux Juges d'Angoulême de ſe tranſporter à Rochefort pour y préſider à cette opération.

C'eſt préciſément cet eſſai dont le réſultat auroit dû devenir une baſe fixe pour aſſeoir la taxe du pain, un moyen déciſif de rendre juſtice au Peuple ſans bleſſer les intérêts des Boulangers, qui a excité des plaintes réitérées de la part de ceux-ci, qui a fait naître de vives diſcuſſions par écrit, que le Parlement n'a pas cru devoir homologuer, & ſur le fonds duquel l'Académie ſe trouve conſultée aujourd'hui.

Qu'il nous ſoit permis avant que de rendre compte de notre travail, de faire ici une réflexion ſur laquelle peut-être l'Académie nous a déjà prévenus.

On eſt étonné au premier coup-d'œil, que dans ce moment-ci, où les Boulangers de pluſieurs villes de Province font des repréſentations aux Magiſtrats ſur la taxe trop baſſe du pain, & en trouvent naturellement les motifs dans une augmentation aſſez conſidérable depuis un certain temps du prix de toutes les denrées, des frais de main-d'œuvre, & en général de tout ce qui fait un objet de dépenſe pour les Citoyens, on eſt ſurpris que les Boulangers de Rochefort ne s'éloignent pas beaucoup d'adopter un tarif fait pour cette Ville en 1703, & relatif à celui qui a été établi pour la Rochelle en 1700, & que leurs plaintes tombent princi-

palement ſur une Ordonnance de Police qui s'eſt écartée à leur préjudice de la teneur de ce tarif; il pouvoit être trop favorable aux Boulangers en 1703, mais en conſidérant l'augmentation réelle du prix des denrées depuis quatre-vingts ans, n'a-t-on pas lieu de préſumer, avant tout examen en détail, que ce tarif porté d'abord trop haut, rentre aujourd'hui dans l'ordre d'une eſtimation modérée, & ne s'éloigne preſque point de ceux qui ont été établis dans pluſieurs villes de Province par des Magiſtrats éclairés?

Inſtruits, comme nous le ſommes, des lumières qu'a l'Académie ſur la mouture des grains, ſur les produits en farines qu'il eſt ordinaire d'en tirer, & ſur la quantité de pain que fournit une quantité déterminée de blé, nous aurions pu ſans doute, en y joignant les connoiſſances que nous avons acquiſes ſur ce ſujet, nous diſpenſer de faire des expériences en grand, & nous borner au précis d'un travail que des Citoyens zélés ont déjà mis dans tout ſon jour: mais nous avons ſenti que ce ſeroit mieux répondre à la confiance dont le Parlement honore l'Académie, & à la commiſſion dont elle nous a chargés, de faire des expériences plus étendues que celles qui ont été exécutées à Rochefort; de faire même marcher de pair la mouture économique avec la mouture à la groſſe; & en rempliſſant le vœu du Parlement par le détail de celle-ci qu'il a demandé d'une manière expreſſe, de mettre encore ſous ſes yeux les réſultats d'une mouture mieux entendue en elle-même, & plus parfaite pour la diſtinction des produits. Si par ces expériences faites aſſez en grand, & qui ont été ſuivies avec toute l'attention qu'elles demandoient, nous ne parvenons pas à aplanir les difficultés qui ſe ſont élevées à Rochefort, au moins viendront-elles à l'appui des bons principes ſur la mouture, qui ſont établis aujourd'hui; elles montreront qu'il y a en ce genre un point de perfection auquel le tâtonnement a conduit, & que ſaiſiſſent d'une manière aſſez conſtante les Meuniers intelligens; qu'aller au-delà pour avoir un produit plus abondant, c'eſt perdre un temps

précieux, augmenter la dépense, altérer les derniers produits en farines & n'en obtenir que de mauvais pain.

Nous diviserons ce Rapport en trois Parties; la première contiendra tous les détails des opérations de meunerie qui ont été faites sous nos yeux, tant par la mouture économique que par la mouture à la grosse, sur vingt-quatre setiers de blé, dont la moitié étoit de la meilleure qualité, & l'autre moitié d'une qualité médiocre.

Il sera question dans la deuxième Partie, des opérations de boulangerie appliquées également sous nos yeux à des quantités déterminées de farines de qualités différentes, & qui faisoient partie de celles que nous avions obtenues de la mouture de nos blés; on y verra les détails relatifs à la formation des levains, à la préparation de la pâte, à l'apprêt qu'on lui donne pendant qu'elle est en masse & après qu'elle a été subdivisée, à la conduite assez délicate du four, & enfin à la quantité de pain, de formes & de qualités différentes, qu'ont rendue les farines que nous avons employées.

Nous exposerons dans la troisième les conséquences qui nous auront paru naître des expériences dont nous aurons rendu compte dans les deux premières Parties: nous rapprocherons de l'essai fait à Rochefort, sur lequel l'Académie est consultée, le résultat de nos opérations: après avoir établi la valeur du pain proportionnément à celle du blé & des farines, en y joignant un prix fixe pour les frais de main-d'œuvre, nous proposerons un moyen d'aplanir les difficultés qui se sont élevées à Rochefort, celui d'y mettre en vigueur, pour la taxe du pain, un tarif ancien rédigé pour le pays d'Aunis, & de l'y établir à l'avantage du Public, avec les changemens qui sont autant indiqués par nos propres expériences que par les opérations ordinaires des boulangers instruits.

Dans l'obligation où nous sommes de donner à ce Rapport une assez grande étendue, afin qu'il conduise, s'il est possible, à quelque utilité générale pour le fonds des opérations, ou au moins à une connoissance exacte de celles qu'on fait communément à Paris, nous ne nous dissimulons point qu'un grand

grand nombre de faits répandus dans ce Mémoire, des calculs multipliés, beaucoup de résultats d'un ordre différent, & plusieurs observations qui s'y trouvent jointes, demanderont une attention suivie, & pourront même échapper en partie à l'application qu'on leur donnera. Nous avons donc cru devoir terminer ce rapport par un résumé qui en contiendra toute la substance, qui offrira des réponses directes aux questions que le Parlement a proposées à l'Académie, & dans lequel ces réponses, déduites du fond de notre travail avec la précision dont il est susceptible, pourront préparer la voie à une décision sur l'objet important qui l'a occasionné.

PREMIÈRE PARTIE.

Dès le moment où l'Académie nous eut chargés de l'examen de l'affaire délicate de Rochefort, & où nous eumes réflechi sur les suites, à l'égard de la taxe du pain en général, que nos observations pouvoient avoir, nous sentimes combien il étoit important, pour l'expérience que nous avions projetée, d'être entièrement libres dans le moulin où nous l'exécuterions, d'y être aidés dans notre travail par des personnes auxquelles nous eussions une entière confiance, & de pouvoir y suivre sans interruption la mouture complète des grains.

Les moulins de Corbeil qui appartiennent à l'Hôpital général de Paris, & d'où sortent les quantités immenses de farines que consomment les maisons dépendantes de cet hôpital, nous parurent les plus propres à remplir notre objet, tant pour y obtenir la meilleure mouture que nous pouvions espérer, que pour y avoir toutes les facilités nécessaires, & une tranquillité dont nous n'aurions joui que difficilement dans un moulin particulier. M.rs Cochin & Boscheron, Administrateurs des Hôpitaux, & qui sont chargés spécialement de la partie des grains, se prêtèrent avec plaisir à la proposition que nous leur fimes d'employer pour notre expérience leurs moulins de Corbeil : le Bureau d'Administration auquel ils en firent part, l'agréa sur le champ avec

tout le zèle qui lui est propre; il favorisoit une opération que le rapprochement des deux sortes de mouture sur le même grain rendoit intéressante pour les hôpitaux, & qui d'ailleurs avoit trait au bien public.

Avec ces facilités pour faire aussi exactement qu'il nous seroit possible les expériences que nous avions déterminées, nous nous rendimes à Corbeil le 25 Septembre 1783. M. Boscheron très-instruit sur la mouture des grains, M.rs d'Arcet & Legendre, Membres de l'Académie, se joignirent à nous pour toute la suite de cette opération, & y furent témoins assidus des résultats différens & assez nombreux qu'elle nous fournit. M. de Malaizieux, Auditeur des Comptes & Administrateur des Hôpitaux, se rendit aussi à Corbeil pendant le séjour que nous y fimes, & y fut témoin également des produits de notre travail : deux habiles Meuniers, & dignes d'une entière confiance, le sieur Roland attaché aux moulins des hôpitaux, & le sieur Hallé établi à Essonne, se chargèrent avec plaisir de la conduite des trois moulins que nous employames en même temps, & ne laissèrent aux ouvriers en sous-ordre que ce qu'il y avoit de plus pénible dans le travail.

Notre premier soin en arrivant à Corbeil, fut de choisir les grains qui devoient faire la matière de notre expérience; on nous avoit prévenus que nous en trouverions à Essonne de différentes qualités; nous y allames, & ce fut chez le sieur Hallé même que nous eumes le choix des deux sortes de blé dont nous avions besoin : après avoir fait enlever de chez lui & transporter à Corbeil une quantité plus forte que celle qui nous étoit nécessaire, tant en grains de la première qualité qui étoit de 1781, & qui avoit été tiré de Provins, qu'en grains de 1782 d'une qualité médiocre, & tiré de la Brie, nous les fimes cribler séparément; on en mesura ensuite sous nos yeux douze setiers de l'une & de l'autre sortes, & les vingt-quatre sacs de grains bien distincts pour leur qualité, furent pesés séparément : le poids cumulé des douze setiers du plus beau grain, se trouva de deux mille

neuf cents quatre livres, déduction faite du poids des sacs; c'est-à-dire, que chacun des douze setiers, mesure de Paris, pesoit, l'un dans l'autre, deux cents quarante-deux livres, ce qui annonce du froment d'une bonne qualité, bien nourri, & que les insectes n'ont point attaqué : le poids cumulé, aussi des douze setiers de froment médiocre, n'étoit que de deux mille sept cents cinquante-une livres huit onces, déduction faite également des sacs, c'est-à-dire, que chaque setier de ce blé inférieur ne pesoit, l'un dans l'autre, que deux cents vingt-neuf livres quatre onces cinq gros vingt-quatre grains, & avertissoit par-là, comme nous en avions jugé par le coup-d'œil, de la qualité médiocre dont il étoit.

Les deux mille neuf cents quatre livres de froment de la première qualité, qui composoient douze setiers, furent partagées en deux parties égales, du poids chacune de quatorze cents cinquante-deux livres, & furent destinées l'une à être soumise à la mouture économique, & l'autre à la mouture à la grosse.

Les douze autres setiers en blé médiocre, pesant ensemble deux mille sept cents cinquante-une livres huit onces, furent divisés aussi en deux parties égales, ayant chacune le poids juste de treize cents soixante-quinze livres douze onces; & six de ces setiers de froment inférieur furent destines également à la mouture économique, pendant que nous réservames les six autres pour la mouture à la grosse.

Des trois moulins que nous employames pour notre expérience, deux furent consacrés uniquement à la mouture économique, comme exigeant le double du temps ou environ que demande l'autre mouture; & le troisième moulin servit seul pour celle-ci : la totalité des grains dont nous venions de constater le poids, fut transportée en ordre dans l'étage du bâtiment de Corbeil, qui est immédiatement au-dessus des moulins.

Les douze setiers de blé représentés par autant de sacs, & qui avoient été destinés à la mouture économique, avec des marques distinctives qui annonçoient la qualité des

grains, furent placés au-deſſus des deux moulins où ils devoient être convertis en farine, mais de manière que ſix de ces ſacs, qui contenoient le froment de la première qualité, étoient placés à côté de l'ouverture pratiquée au plancher, laquelle communiquoit à la trémie dépendante du premier des deux moulins où la mouture économique devoit être employée; & les ſix autres ſacs en blé inférieur, répondoient à la trémie du ſecond moulin où cette même mouture devoit avoir lieu.

Nous primes les mêmes précautions à l'égard des douze autres ſetiers, tant du plus beau froment, que de celui qui étoit d'une qualité inférieure, en les plaçant au-deſſus du troiſième moulin qui étoit un peu éloigné des deux autres, & où la mouture à la groſſe devoit être employée: nous établimes une ſéparation bien marquée entre les ſix ſacs de beau froment par leſquels l'opération devoit y commencer, & les ſix autres ſacs de blé médiocre par leſquels elle devoit s'y terminer.

Cet ordre une fois établi dans la diſtribution des grains qui étoient la matière de notre expérience, & qu'il falloit garantir de la moindre confuſion, nous nous occupames du ſoin de viſiter les moulins, & de n'y rien laiſſer qui pût augmenter nos produits; nous cédames cependant dans cette circonſtance, au conſeil que nous donnèrent les deux meuniers intelligens qui nous guidoient; ils nous déterminèrent à ne pas dégarnir le fond des archures du peu de farine qui s'y raſſemble lorſque les meules broient les grains, & qui s'y maintient toujours en petite quantité aſſez égale dans l'opération de la mouture: on ſait que ces archures ſont un bâtis en bois, de forme circulaire, & compoſé de pluſieurs pièces qui ſont maintenues enſemble par des crochets; ces archures portent ſur la meule giſſante, & ſervent à retenir la farine à meſure qu'elle ſe forme, à ne lui laiſſer d'autre iſſue que celle de l'anche d'où elle tombe dans la bluterie, & de-là dans le dodinage quand il eſt employé : c'eſt au fond du petit eſpace qui ſe trouve entre les côtés de la meule

tournante & les parois intérieures des archures, que séjourne une petite portion de farine; rassemblée une fois dans cet endroit, elle s'y maintient, & en même temps qu'elle ne reçoit aucune augmentation sensible par les moutures réitérées, elle paroît n'éprouver aucune diminution dont il faille s'occuper; au moins est-il certain qu'à la fin de notre expérience les archures parurent à peu-près garnies comme elles l'étoient avant qu'on la commençât; & d'ailleurs, sur 4178 livres de farine qu'elle nous fournit, quelques onces ou même une livre de plus ou de moins n'étoit d'aucune conséquence pour les produits différens que nous tirames de la mouture de nos blés.

Les mêmes meuniers jugèrent encore qu'il étoit convenable de faire passer dans l'œillard de la meule tournante, sept à huit livres de recoupettes ou menu son, avant d'y faire tomber le grain; afin que les meules eussent quelque aliment entr'elles dès que le moulin seroit en action, & pour que la première portion de nos blés, réduite en farine, succédât sans interruption à ces recoupettes, sauf à laisser dans l'œillard, en terminant l'expérience, une quantité pareille de notre menu son.

Après tous ces préparatifs, dont il convenoit que nous fissions un exposé fidèle, & qui devenoient nécessaires par la nature même de notre expérience, dans laquelle nous avions un double objet; il ne nous restoit plus qu'à nous rendre attentifs à la mouture des grains, suivant l'ordre que nous avions établi, & à être de simples témoins de l'intelligence des deux meuniers auxquels nous avions confié la conduite des moulins: ils furent mis en action tous les trois en même temps; le premier, comme nous l'avons dit, étoit disposé pour la mouture économique, & reçut le grain de la première qualité; le second, préparé également pour cette même mouture, fut employé pour le blé inférieur; l'un & l'autre avoient d'abord un bluteau propre à donner la fleur de farine, & duquel s'échappoient les sons gras pour tomber dans un dodinage à travers duquel passoient d'abord les

gruaux blancs & enſuite les gruaux bis: à meſure qu'on tiroit de la huche les premiers produits de l'un & de l'autre moulins, on les mettoit dans des ſacs, vis-à-vis du moulin qui les avoit fournis, & dans l'ordre même des produits: les gruaux repaſſés ſous la meule à quatre repriſes, & blutés autant de fois, étoient mis également dans des ſacs, & prenoient, en face du moulin, le rang ſuivant lequel ils avoient été blutés; par-là, en voyant à la tête des ſacs la fleur de farine, on diſtinguoit par ordre le premier, le ſecond, le troiſième & le quatrième produit de la mouture réitérée des gruaux; à leur ſuite venoient auſſi par ordre les iſſues ſorties de chaque moulin, c'eſt-à-dire le remoulage de gruau, le remoulage bis, les recoupes & le gros ſon.

Le précis que nous donnons, mais auquel nous aurons lieu de revenir, ſur les différens produits que nous tirames par la mouture économique des ſix ſetiers de froment de la première qualité, ce détail ſuccinct doit être appliqué aux réſultats que nous fournit la mouture pareille des ſix ſetiers de blé médiocre; & comme le procédé fut le même dans les deux moulins, le même ordre régna dans les cinq produits en farine & dans les iſſues qui en furent ſéparées.

L'opération qui ſe fit au troiſième moulin, où l'on employa la mouture à la groſſe, n'offrit aucun des produits diſtincts qui viennent d'être expoſés; il n'étoit queſtion en effet que d'y broyer ſimplement les grains, & de faire paſſer dans des ſacs la farine confondue avec les gruaux & le ſon: on commença donc par moudre les ſix ſetiers de froment de la première qualité, & enſuite les ſix autres ſetiers d'une qualité inférieure: les ſacs qui contenoient la farine brute de l'une & l'autre ſortes de grain, furent tranſportés & diſtingués avec ſoin, ſuivant la qualité du blé duquel cette farine brute provenoit, dans l'endroit indépendant du moulin où elle devoit être blutée ſuivant l'uſage, & partagée en différens produits, ſans qu'aucun d'eux paſsât de nouveau ſous les meules. Comme la mouture économique eſt la ſeule dont on faſſe uſage dans les moulins de l'hôpital, nous n'y trou-

vames point de bluterie montée pour la mouture à la grosse: prévenus de bonne heure que nous n'y aurions pas cet avantage, & desirant néanmoins que notre expérience fût consommée à Corbeil, nous y envoyames, avant notre départ de Paris, le sieur Sédaine, ouvrier formé à ce genre de travail, & pourvu de tout ce qui étoit nécessaire pour l'exécuter.

Le sieur Leroux, boulanger très-instruit, & qui a toute la confiance de l'Administration des hôpitaux, pour la partie des grains, accompagna cet ouvrier: deux grands bluteaux, bien partagés pour le degré de finesse des soies, se trouvèrent établis à Corbeil avant que nous y arrivassions; ce fut à la faveur de ces deux instrumens bien disposés pour leur effet, & qui devoient donner chacun des produits différens, que nous nous préparames à établir une séparation dans nos farines brutes, & à obtenir les résultats ordinaires de la mouture à la grosse: le sieur Leroux voulut bien se charger de la conduite des bluteaux, dont l'usage lui est familier, & qui demandent une certaine attention pour que dans le mouvement qu'on leur imprime, la farine plus ou moins atténuée passe à travers les soies du bluteau qui lui sont le mieux appropriées.

Les détails relatifs à la mouture à la grosse étant principalement ceux que le Parlement demande, & la bluterie séparée du moulin, par le moyen de laquelle nous avons partagé la farine brute en différens produits, faisant partie essentielle de l'opération dont il s'agit ici, nous avons cru devoir entrer dans quelque explication sur l'ordre qui a régné dans cette bluterie, & sur la manière la plus avantageuse dont on y a tiré parti de la farine brute des deux sortes de grains.

Nous avons employé pour cet effet deux bluteaux renfermés chacun dans une espèce de coffre alongé, ouvert sur un des côtés, lequel étoit recouvert avec soin par une toile lorsque le travail avoit lieu; ce coffre étoit partagé sur la longueur en deux parties, dont la première avoit trois fois

l'étendue de la dernière, comme devant recevoir le produit le plus abondant.

Le premier bluteau, nommé *bluteau à blanc*, étoit composé de huit laizes de ſoie, dont les ſix premières plus fines que les deux autres, ſe trouvoient au-deſſus de la caſe la plus longue d'un des coffres dont nous venons de parler, & y laiſſoient tomber la fleur de farine; tandis que les deux autres laizes, placées au-deſſus de la caſe la plus courte, donnoient paſſage à la farine moins légère, nommée *bis-blanc : les ſons gras*, c'eſt-à-dire chargés de gruaux, ſortoient par la grande ouverture de ce bluteau, & recueillis enſuite, ils étoient portés au ſecond, nommé *bluteau à ſons gras.*

Celui-ci étoit composé auſſi de huit laizes, dont les quatre premières étoient de ſoie, il eſt vrai, comme les précédentes, mais elles étoient plus claires que celles de l'autre bluteau, & par-là hors d'état de retenir les gruaux blancs : quant aux deux laizes ſuivantes elles étoient formées de quintin, eſpèce de toile de fil gommé, moins ſerrée que le tiſſu des quatre premières laizes, & propre à laiſſer échapper les gruaux bis; on n'avoit employé pour les deux dernières laizes qu'une toile aſſez groſſière, nommée *rifflard*, & deſtinée à donner paſſage, tant aux recoupes qu'aux recoupettes; & enfin le gros ſon ſortoit par la grande ouverture de ce ſecond bluteau.

Dans le deſſein de retirer la plus grande quantité de fleur de farine qu'il ſeroit poſſible d'obtenir des farines brutes, & d'en bien ſéparer les gruaux, on réunit, après les opérations ſucceſſives de la bluterie, le premier produit du ſecond bluteau à ſons gras avec le ſecond produit, nommé *bis blanc*, du premier bluteau, & on les fit repaſſer mêlés enſemble dans ce même premier bluteau, qui rendit encore de la fleur de farine dans la caſe la plus longue du coffre, & du bis blanc dans la caſe la plus courte; ce qui ſortit par la grande ouverture de ce premier bluteau fut reporté dans le ſecond qui reſtitua d'abord du bis blanc, enſuite des farines biſes ſur celles qui étoient reſtées dans le coffre de ce ſecond bluteau, &

enfin

enfin du menu ſon au-deſſus de celui qu'on y avoit laiſſé également.

Auſſi a-t-on peut-être déjà remarqué avec quelque ſurpriſe, en jetant les yeux ſur les tableaux de tous les produits que nous avons obtenus, qu'ils ont été plus f rts en fleur de farine dans la mouture à la groſſe que dans la mouture économique; en voici la raiſon: la portion de cette fleur de farine qui avoit échappé d'abord aux ſix premières laizes du bluteau à blanc, qui étoit tombée en partie ſur le bis-blanc qu'on a repris, qui avoit ſuivi en partie les ſons gras, & s'étoit mêlée avec les premiers produits du ſecond bluteau ; cette même portion de fleur de farine a paſſé enfin à travers les ſix premières laizes du bluteau à blanc, lorſqu'on y a fait repaſſer confuſément & le bis-blanc dont nous venons de parler, & les premiers produits du ſecond bluteau.

Toutes les opérations de bluterie que nous venons de détailler, & qu'avoit exigées la mouture à la groſſe pour que nous en tiraſſions tout l'avantage qu'il étoit poſſible d'en eſpérer, ont été appliquées ſucceſſivement aux farines brutes des deux ſortes de blé, & conduites dans le même ordre qu'on a déjà vu ; de manière qu'après avoir commencé par les farines des grains de 1781, on ne s'eſt occupé de celles du blé de 1782 que lorſqu'on a eu recueilli les produits donnés par les premières, & vidé avec ſoin tant les deux coffres que les bluteaux.

L'opération commença par la farine brute que nous avions obtenue des ſix ſetiers de froment de la première qualité, & fut continuée ſans interruption : de la totalité de cette farine brute nous tirames d'abord trois produits diſtincts, qui étoient 1.° la fleur de farine; 2.° la farine de la ſeconde qualité ou le bis blanc, le blanc bourgeois ; 3.° la farine biſe ; & enfin il reſta trois autres produits en iſſues, c'eſt-à-dire, le gros ſon, les recoupes & les recoupettes.

Dans l'opération pareille de la bluterie ſur la farine brute des ſix ſetiers de blé médiocre, nous eumes les mêmes réſultats, quant à la diſtinction ſeulement des farines en trois

qualités différentes & à la séparation des issues, dans l'ordre que nous venons d'exposer.

Les produits de toutes les farines brutes furent mis chacun dans des sacs, avec une distinction pour leur qualité, & une marque relative, soit aux six setiers du blé le plus beau, soit aux six autres de blé médiocre; & nous n'eumes plus qu'à constater le poids tant des farines, que des issues que les deux sortes de mouture nous avoient données.

Le même ordre que nous avions observé pour les produits différens que nous avions obtenus des deux sortes de mouture, nous le suivimes dans la pesée de ces mêmes produits.

On peut se rappeler que les six setiers de froment de la première qualité, qui furent soumis à la mouture économique, pesoient ensemble, & déduction faite des sacs 1452 livres; nous tirames de cette quantité de grains, déduction faite également du poids des sacs,

	Livres.	Onces.
En fleur de farine	583.	//
En première farine de gruau	286.	8.
En deuxième farine de gruau	122.	8.
En troisième	57.	//
En quatrième	47.	//
	1096.	//

Le poids des issues ayant été constaté ensuite, celui du remoulage de gruau fut de	43.	//	324.	8.
Du remoulage bis fut de	94.	8.		
Les recoupes pesèrent	119.	//		
Et le gros son se trouva du poids de.	68.	//		
Les déchets se trouvèrent de			31.	8.
			1452.	//.

	Livres.	Onces.
On voit d'après ce Tableau, qu'un ſetier de froment d'une bonne qualité, à la meſure de Paris, & peſant 242 livres, a donné en farines différentes, par la mouture économique	182.	$10\frac{2}{3}$.
Que les iſſues ont été de	54.	$1\frac{1}{3}$.
Et qu'il y a eu en déchet	5.	4.
	242.	"

	Livres.	Onces.
Les ſix ſetiers de froment d'une qualité inférieure, qui furent ſoumis également à la mouture économique, peſoient enſemble, déduction faite du poids des ſacs, 1375 livres 12 onces, ils nous donnèrent en fleur de farine	454.	"
En farine de premier gruau	280.	"
En farine de ſecond gruau	151.	8.
En farine de troiſième	64.	"
Et enfin, en produit de quatrième gruau	64.	8.
	1014.	"

	Livres.	Onces.	Total livres.	Total onces.
Le poids des iſſues fut pour le remoulage de gruau, de	44.	"	322.	"
Pour le remoulage bis de	106.	8.		
Pour les recoupes de	65.	8.		
Et pour le gros ſon de	106.	"		
Les déchets furent par conſéquent de			39.	12.
			1375.	12.

	Livres.	Onces.
Le ſetier de ce froment, d'une qualité médiocre, & du poids ſeulement de 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$, ne donna donc en farines différentes que	169.	"
Le poids des iſſues fut de	53.	$10\frac{2}{3}$.
Et celui du déchet de	6.	10.
	229.	$4\frac{2}{3}$.

Que d'après ce premier expoſé, on rapproche les produits du ſetier de froment de la première qualité, & recueilli en

1781, des produits de l'autre ſetier de froment d'une qualité inférieure & récolté en 1782, & qu'on faſſe la comparaiſon de leur poids, on remarquera d'abord que ſi le ſetier de blé de 1781, peſoit 12 livres 11 onces $\frac{1}{3}$ de plus que celui de 1782, il a fourni auſſi une plus grande quantité de farine que ce dernier, par une ſuite de ſa plus grande peſanteur & de ſa meilleure qualité ; il a donné en effet 182 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ de farine, pendant que le ſetier de blé de 1782, n'en a donné que 169. La différence, comme on voit eſt de 13 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ à l'avantage du froment de 1781, & cet excédant en farine ne ſauroit être conſidéré comme ſouſtrait à la partie des iſſues du ſetier de froment de 1781, puiſqu'elle eſt du poids de 54 livres 1 once $\frac{1}{3}$, & que cette quantité de gros & menu ſon, eſt celle que retirent en général les Meuniers, par la mouture économique, d'un ſetier ordinaire de froment ; on a vu d'ailleurs dans le détail précédent, que le ſetier de blé de 1782 a donné 53 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ d'iſſues, quoiqu'il n'ait produit que 169 livres de farine ; c'eſt-à-dire, comme nous venons de le faire obſerver, 13 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ de moins qu'on n'en a obtenu du ſetier de blé de 1781. Il eſt donc à préſumer que l'opération de la mouture économique appliquée ici à des grains de qualité aſſez inégale, a été bien conduite, puiſque les réſultats en farines paroiſſent ne varier qu'à raiſon du poids des grains, & que l'excédant en farines qui ſe trouve ſur les ſix ſetiers de froment de la première qualité, ſe rapproche beaucoup de l'excédant de poids de ces ſix ſetiers en nature ſur les ſix autres de blé médiocre.

Qu'il nous ſoit permis de faire ici une obſervation qui tient à ce que nous venons de dire, & qui tiendra également au détail ſur les produits de la mouture à la groſſe que nous allons bientôt expoſer.

On a remarqué ſans doute que l'excédant en poids des ſix ſetiers de 1781 ſur ceux de 1782, n'étoit que de 76 livres 4 onces, pendant que l'excédant en farines alloit juſqu'à 82 livres, & on en a conclu avec raiſon que cette

dernière quantité de farines ne peut pas résulter d'une moindre quantité de grains, puisqu'on ne retire ordinairement en farines différentes, par la mouture économique, que les trois quarts du blé qu'on a fait moudre, & qu'alors les 76 livres 4 onces d'excédant de poids du froment de 1781, n'auroient dû donner tout au plus sur ce pied-là, en excédant de farines, que 57 livres 3 onces.

Mais il est essentiel d'observer que si l'on peut attendre pour l'ordinaire, à la faveur de la mouture économique, les trois quarts en farines, & même un peu au-delà, comme on l'a vu, d'une certaine quantité de froment d'une qualité supérieure & d'un poids déterminé, de 200 livres, par exemple, on ne doit pas espérer un produit aussi avantageux d'une quantité pareille de 200 livres de blé médiocre & peu nourri. On sent en effet que la pesanteur du grain résultant & de la farine qu'il contient & de son écorce, le poids de celle-ci est toujours à-peu-près le même dans le blé médiocre que dans celui qui est d'une qualité supérieure; outre qu'il doit y avoir un plus grand nombre de grains en nature, & conséquemment plus d'écorce dans les 200 livres de blé médiocre que dans les 200 livres de celui qui est d'une bonne qualité & bien nourri; ainsi, loin que dans notre expérience les 1375 livres 12 onces de blé inférieur aient rendu autant de farine proportionnément que les 1452 livres de blé supérieur, elles n'ont pas même donné les $\frac{3}{4}$ de leur poids en farines différentes; il auroit fallu qu'au lieu de 1014 livres de farine qu'on a tirées de ces 1375 livres 12 onces de blé médiocre, on en eût obtenu 1038 livres 13 onces ou à-peu-près, pour que leur produit eût été proportionné à celui des 1452 livres de beau froment; alors les farines de ces 1452 livres, comparées avec celles que les 1375 livres 12 onces ont rendues, n'auroient eu en excédant de poids que 57 livres 3 onces, qui sont précisément le produit en farine des 76 livres 4 onces de grains en nature qu'ont les 1452 livres de beau froment au-delà du poids des 1375 livres 12 onces de froment inférieur.

Si, à l'appui de ce raiſonnement, on jette les yeux ſur les produits en iſſues & ſur les déchets relatifs, tant aux ſix ſetiers de 1781 qu'à ceux de 1782, on verra que le total du gros & menu ſon & des déchets dépendans des 1452 livres de beau froment, ne s'eſt trouvé que de 356 livres; c'eſt-à-dire, de 7 livres au-deſſous du quart de ces 1452 livres; tandis que la totalité tant des iſſues que des déchets relatifs aux 1375 livres 12 onces de blé médiocre, eſt de 361 livres 12 onces, c'eſt-à-dire, de 17 livres 13 onces plus fort que le quart de ces mêmes 1375 livres 12 onces; ce dernier excédant, tant en iſſues qu'en déchets, particulier aux ſix ſetiers de 1782, étant réuni aux 7 livres en iſſues & en déchets qu'ont éprouvé de moins les ſix ſetiers de 1781, forment un total de 24 livres 13 onces, qui eſt exactement la quantité de plus en produit de différentes farines qu'auroient dû donner les ſix ſetiers de 1782, pour que ce produit ſe trouvât proportionnel à celui du blé de 1781, pour qu'il fût de 1038 livres 13 onces, au lieu de 1014 livres, dont il a été ſeulement; & ceci fait bien connoître que dans l'achat des blés on doit peut-être ſe rendre plus attentif à la qualité des grains qu'au prix qui s'y trouve attaché, puiſqu'on eſt bien dédommagé de 20 ou 30 ſous, que chaque ſetier peut coûter de plus, par un produit plus fort en farine, par une plus grande quantité de meilleur pain, & un profit ſupérieur au prix un peu plus haut, ſur lequel on a eu la prudence de ne point héſiter.

Les produits de la mouture à la groſſe avoient été ſéparés avec ſoin, comme on a vu, de ceux dont nous venons de rendre compte: les farines obtenues par cette mouture, & ſorties des grains de 1781, avoient été ſéparées également de celles que le blé de 1782 avoit données, & il régnoit d'ailleurs une diſtinction exacte entr'elles pour la qualité des produits.

Nous commençames par établir le poids des farines que nous avions tirées des ſix ſetiers de froment de la première

qualité, & qui, comme les ſix autres de la même ſorte, peſoient enſemble 1452 livres.

		Livres.	Onces.
Le poids de la farine de la première qualité, déduction faite de celui des ſacs, ſe trouva de..........		701.	8.
Celui de la farine de la deuxième qualité, ou du bis-blanc, étoit de..........................		136.	8.
Et enfin, la farine biſe ou de la troiſième qualité peſoit..............................		233.	//
		1071.	//
Pour le produit des iſſues, nous eumes en gros ſon........................	117. //		
En recoupes..................	99. //	364.	8.
Et en recoupettes..............	148. 8.		
Les déchets ne ſe trouvèrent que de........		16.	8.
		1452.	//

	Livres.	Onces.
Il réſulte de ce Tableau, qu'un ſetier de froment d'une bonne qualité, à la meſure de Paris, & peſant 242 livres a rendu, en farines différentes, à la mouture à la groſſe..............................	178.	8.
En iſſues............................	60.	12.
Et n'a éprouvé en déchet que................	2.	12.
	242.	//

		Livres.	Onces.
On ſe rappelle que les ſix ſetiers de blé médiocre ne peſoient enſemble que 1375 livres 12 onces, nous en obtinmes en farine de la première qualité..........		685.	//
En farine de la ſeconde ou en bis-blanc..........		162.	//.
Et en farine biſe........................		150.	//
		997.	//
Le poids des iſſues ſe trouva, pour le gros ſon, de........................	120. 8.		
Pour les recoupes de.............	122. 8.	356.	8.
Et pour les recoupettes de..........	113. 8.		
Les déchets furent de................		22.	4.
		1375.	12.

	Livres	*Onces.*
D'après les produits différens, établis dans ce dernier Tableau, on voit qu'un setier de froment d'une qualité médiocre & du poids, à la mesure de Paris, de 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$, a donné en farines différentes, à la mouture à la grosse........................	166.	2 $\frac{2}{3}$.
En issues................................	59.	6 $\frac{2}{3}$.
Et a perdu par le déchet....................	3.	11 $\frac{1}{3}$.
	229.	4 $\frac{2}{3}$.

Si, en se réglant sur ce que nous avons fait pour les résultats de la mouture économique, on rapproche actuellement les produits par la mouture à la grosse, d'un des six setiers de froment de la première qualité, & de 1781, des produits d'un des six autres d'une qualité médiocre, & de 1782; & si on compare leur poids, on verra que le setier de blé de 1781 qui pesoit 12 livres 11 onces $\frac{1}{3}$ de plus que celui de 1782, a donné aussi plus de farine que ce dernier, comme étant d'une plus grande pesanteur spécifique dûe à sa bonne qualité: nous en avons retiré en effet 178 livres 8 onces, tandis que le setier de blé de 1782 n'a rendu en farine que 166 livres 2 onces $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, 12 livres 5 onces $\frac{1}{3}$ de moins que le setier du beau froment de 1781. On ne sauroit regarder, & nous en avons déjà fait l'observation, ce surplus en farine fourni par le setier de blé de 1781, comme une soustraction faite aux issues de ce même setier, puisqu'elles sont en total du poids de 60 livres 12 onces; que leur quantité approche de celle qui sort communément d'un setier de grains par la mouture économique; que le poids de ces issues n'excède celui du gros & menu son du setier de blé de 1782, que de 1 livre 5 onces $\frac{1}{3}$, & que par conséquent les 12 livres 5 onces $\frac{1}{3}$ de farine dont nous venons de parler, sont réellement un produit de cette qualité qui est dû à un blé plus sain & mieux nourri: il paroît donc encore par ce résultat, que l'opération dont il s'agit ici a été conduite avec la sorte de précision dont la mouture à la grosse étoit susceptible; qu'il n'y a eu aucune confusion

confusion dans les produits du travail sur l'une & l'autre sorte de grains, puisque l'excédant de poids, à mesure égale, du blé de 1781, sur celui de 1782, s'est annoncé par celui des farines dans les deux sortes de mouture, puisqu'il n'a laissé aucun doute sur l'ordre que nous avions établi relativement à la distinction des blés en nature, des produits différens des trois moulins, & de ceux de la bluterie isolée que la mouture à la grosse exigeoit nécessairement.

Nous avons lieu ici de rappeler une observation que nous avons déjà faite, & que nous avons annoncée comme devant recevoir une nouvelle application.

Les 1452 livres de blé de 1781, ont donné par la mouture à la grosse 1071 livres de farine, tandis qu'on n'en a retiré que 997 livres des 1375 livres 12 onces de blé de 1782; la différence d'entre les deux produits en farine, est de 74 livres: cependant l'excédant de poids qu'ont les six setiers de blé de 1781 sur ceux de 1782, n'est que de 76 livres 4 onces, & on ne peut pas avoir tiré 74 livres de farine de cet excédant en grains, qui n'a que 2 livres 4 onces au-delà du poids de ces mêmes farines; aussi n'entre-t-il réellement que 57 livres 3 onces de farine dans les 1071 livres, pour les 76 livres 4 onces de blé; il est vrai qu'il faut ajouter la quantité précise de 16 livres 13 onces pour compléter les 74 livres de farine qu'ont de plus les 1452 livres de blé de 1781, mais il est nécessaire de remarquer que dans la comparaison des six setiers de 1781 avec ceux de 1782, les issues & les déchets des uns & des autres doivent être considérés & faire partie du calcul. Si dans cette opération de la mouture à la grosse, le gros, le menu son & les déchets toujours inévitables, n'eussent formé, comme à l'ordinaire, que le quart de la quantité de blé employée, le total de ces objets n'auroit été pour les 1452 livres du blé de 1781, que de 363 livres, au lieu qu'il s'est trouvé de 381 livres, c'est-à-dire, de 18 livres au-dessus du quart des six setiers de 1781; il n'auroit été pour ceux de 1782 que de 348 livres 15 onces, au lieu

qu'il a monté jusqu'à 378 livres 12 onces, c'est-à-dire, à 34 livres 13 onces au-delà du quart; alors les six setiers de 1781 doivent avoir dans la comparaison un excédant en farine de 16 livres 13 onces, qui est précisément la quantité dont il vient d'être question, pour compléter les 74 livres de farine qu'ont les six setiers de 1781 sur ceux de 1782, & qui est en même temps la quantité qui reste des 34 livres 13 onces, après la soustraction des 18 livres d'excédant au-delà du quart des issues & des déchets qui regardent les six setiers de blé de 1781.

Nous avons cru devoir aller au-devant d'une difficulté qui pourroit d'abord se présenter, quand on feroit attention au poids d'une certaine quantité de farine comme supérieur ou peu inferieur au moins à celui d'une certaine quantité de blé de laquelle cette farine paroîtroit avoir été extraite; les produits rapprochés frapperont au premier coup-d'œil, & feront évanouir la difficulté: c'est dans cette vue que nous mettrons sous les yeux de l'Académie trois tableaux relatifs à toutes les opérations que nous venons d'exposer.

Le premier offrira les produits distincts de la mouture économique sur l'une & l'autre sorte de grains qui ont fait la matière de notre expérience; le second présentera également les produits de la mouture à la grosse sur des quantités égales des deux sortes de grains; & le troisième sera comme un précis de ces deux différentes moutures, en offrant les produits plus faciles à saisir, & tirés avec précision d'un seul setier de froment d'après les produits que nous avons obtenus plus en grand, & en donnant lieu encore de faire sur le champ une comparaison exacte du poids des deux sortes de grains, de celui des farines qui en sont résultées, de la quantité des issues relative à chaque opération, & des déchets plus ou moins considérables qui en ont été la suite.

Les personnes qui se sont occupées des produits en farine de la mouture à la grosse, pour les comparer avec ceux de la mouture économique, seront surprises sans doute que nous en ayons obtenu d'aussi avantageux de cette première

mouture, puiſqu'ils ſe rapprochent beaucoup de ceux qu'on tire communément de la dernière ; & il eſt certain que dans un Mémoire lû à l'Académie en 1783, où l'on avoit pour objet un tarif propre à établir le prix du pain relativement à la valeur du blé & des farines, on a ſuppoſé avec aſſez de fondement que la mouture à la groſſe, telle qu'on la pratique dans les provinces, n'étoit pas auſſi favorable, à beaucoup près, que la mouture économique; mais l'avis demandé à l'Académie par le Parlement, devoit avoir ſpécialement la mouture à la groſſe pour objet ; elle avoit été employée à Rochefort dans l'eſſai qui a fait naître une conteſtation ; nous devions dès-lors nous y rendre très-attentifs, & chercher autant par eſprit d'équité que par le deſir de faire tomber, s'il étoit poſſible, cette conteſtation, à tirer de cette mouture tout l'avantage qu'elle peut procurer; nous n'avons donc rien négligé pour parvenir à ce but, & c'eſt peut-être par l'attention que tant de motifs nous portoient à donner à cette mouture, que nous en avons obtenu des produits un peu plus avantageux que nous ne les eſpérions.

Mais il eſt important de remarquer qu'il ne s'agit pas uniquement dans la mouture des grains, de tendre au plus grand produit ſous un point de vue général, & ſans aucun égard à la qualité des farines, puiſqu'on peut par un travail ſi mal entendu moudre preſque la totalité des grains & confondre les farines avec le ſon atténué; il eſt queſtion au contraire, dans une mouture conduite avec intelligence, d'obtenir les premières farines dans leur plus grande pureté, d'en recueillir le plus qu'il eſt poſſible, & de ne laiſſer dans les dernières que le peu de ſon réduit en poudre impalpable qu'il eſt au-deſſus de l'art d'en bien ſéparer : or, dans ce principe la mouture à la groſſe peut donner, il eſt vrai, une aſſez grande quantité de fleur de farine pure, elle peut fournir des farines d'une ſeconde qualité où il ſe trouvera peu de particules de ſon ; mais il n'en ſera pas de même des farines biſes par leſquelles on terminera l'opération, elles ſeront ſenſiblement piquées, & annonceront par leur rougeur que le ſon y eſt

abondant. Une choſe bien digne d'attention dans cette mouture, c'eſt que pendant que le ſon atténué juſqu'à un certain point, paſſe à travers le bluteau & ſe confond avec la farine, une partie des gruaux, c'eſt-à-dire, la portion la plus précieuſe du grain qui a échappé au broyement de la meule, & qui par ſa groſſeur n'a pas pu ſe faire jour à travers les ſoies trop fines du bluteau, ſort en qualité d'iſſues par la grande ouverture de ce même bluteau, & occupe une place parmi le gros ſon, tandis que parmi les farines la ſienne eſt occupée par le ſon atténué; & on ne doit pas être ſurpris que dans la mouture à la groſſe une partie des gruaux échappe toujours à l'action des meules: on ſait que dans cette eſpèce de mouture il n'y a qu'une ſeule opération au moulin, & que les farines ſont rendues dans l'état brut aux propriétaires des grains; il eſt aiſé de ſentir que le blé ne paſſant qu'une ſeule fois ſous la meule, n'y eſt pas broyé complètement, que des portions de grains s'y maintiennent en petits grumeaux, qu'enveloppées de toutes parts par la farine très-atténuée, elles ſont garanties juſqu'à un certain point de l'action rapide des meules, qu'elles conſervent de la conſiſtance au milieu de la farine & du ſon qui reçoivent immédiatement le choc des meules, & ſortent bientôt de deſſous elles à meſure que de nouveau grain s'y introduit; auſſi remarque-t-on que les gruaux deſtinés, dans la mouture économique, à repaſſer ſous les meules, n'ont pas ſous les doigts la douceur & le moelleux de la farine; il ſemble qu'on touche du ſablon fin ou du grès mis en poudre; ces petites aſpérités particulières aux gruaux annoncent ſans doute que les meules ne les ont pas parfaitement atteints, qu'ils conſervent une certaine groſſeur, & ne peuvent que gliſſer par conſéquent ſur les ſoies du bluteau, à travers deſquelles au contraire la farine légère paſſe facilement; dès-lors on reconnoît que ces portions précieuſes du grain n'étant broyées que très-imparfaitement dans la mouture à la groſſe, & ne repaſſant pas ſous les meules, doivent reſter confondues avec le ſon, & occaſionner par-là une diminution plus ou moins ſenſible ſur le produit en farine qu'on étoit en droit d'eſpérer.

On n'éprouveroit pas cette perte ſans doute, ſi l'on employoit des bluteaux dont les toiles peu ſerrées donnaſſent paſſage à ces gruaux; mais elles le donneroient auſſi non-ſeulement aux petites parties de ſon qui s'y trouveroient adhérentes, mais encore au ſon plus groſſier & dépouillé de farine avec lequel ces gruaux ſeroient confondus; ceux-ci dès ce moment perdroient tout leur prix par ce mélange, & rentreroient dans l'ordre des farines biſes, tandis que les deux premiers produits en gruaux étant repaſſés ſous les meules, ſont au moins auſſi eſtimés que la fleur de farine, ſont mêlés ſouvent avec elle par les boulangers, lui donnent plus de corps qu'elle n'en auroit ſeule, & contribuent ſur-tout à la meilleure qualité du pain.

Nous n'ignorons pas, d'après des expériences particulières que nous avons faites, & auxquelles un motif de curioſité nous avoit conduits, qu'on ne puiſſe par un rapprochement exceſſif des meules & dans une ſeule opération du moulin, atténuer ſi parfaitement une grande partie des gruaux, qu'ils ſoient en état de paſſer à travers les ſoies fines du bluteau & en ſortir avec la fleur de farine; mais ce travail forcé tombe également ſur le ſon confondu avec ces gruaux; une partie de ce ſon réduit en poudre impalpable ſe mêle avec la farine la plus pure, s'introduit dans les gruaux broyés, ôte à ces produits de la première qualité le blanc mât, ou dans certaines circonſtances la teinte légère de jaune qui les caractériſe, occaſionne par-là un déſordre dans les produits de la mouture, qui n'échappe point, ſoit au coup-d'œil, ſoit au tact des gens de l'art, & qui met obſtacle encore au talent des boulangers inſtruits, celui de faire la combinaiſon des farines, & d'avoir ſous la main dans des gruaux ſeuls d'une excellente qualité, le moyen facile d'améliorer des farines médiocres, & de maintenir le pain, par ce mélange, dans la bonne qualité qu'on y a d'abord attachée.

Il eſt vrai que dans cette mouture à la groſſe, où les meules ſont très-rapprochées, on obtient encore une portion des gruaux, mais elle eſt foible, le ſon y eſt remarquable,

& encore de la petite quantité qu'on obtient s'en eſt-il échappé une partie qui reſte confondue avec le gros ſon, & qui demanderoit une nouvelle opération de la meule pour rentrer dans l'ordre des farines à la faveur du bluteau.

Le détail dans lequel nous venons d'entrer paroîtra ſuffiſant ſans doute à l'Académie, pour faire ſentir que la mouture à la groſſe ſur laquelle nous avons été forcés de nous étendre par l'objet même de notre Rapport, a des inconvéniens preſque inévitables; qu'elle n'eſt pas de nature à procurer l'extraction totale de la partie farineuſe des grains; que l'ordre dans les produits, ſi favorable aux boulangers & utile au Public, ne ſauroit y être obſervé avec autant d'exactitude & d'une manière auſſi détaillée que dans la mouture économique. Elle occaſionne d'ailleurs plus de frais que celle-ci n'en demande par les bluteries domeſtiques qu'elle met dans la néceſſité d'établir; au lieu que dans l'autre mouture un ſeul moteur produit des effets différens, & tout eſt conſommé au moulin. Nous ne nous arrêterons point ici ſur cet article d'une augmentation de frais, il en a été queſtion aſſez au long dans le Mémoire dont l'Académie a entendu la lecture, & que nous avons déjà cité.

Nous avons fait obſerver, & on peut voir par les tableaux qui accompagnent notre Rapport, que les produits en farine par la mouture à la groſſe, ne s'éloignent pas conſidérablement de ceux de la même nature & du même blé que la mouture économique a rendus, puiſqu'il ne s'agit que de 42 livres de différence à l'avantage de celle-ci, ſur 2827 livres 12 onces de grains qui ont été ſoumiſes à chacune de ces deux ſortes de mouture; mais il y a une obſervation à faire à cet égard, qui nous rappelle à la balance des déchets que nous avons éprouvés dans nos opérations, & qu'il convient d'établir ici.

Il paroît en général que les déchets dans la moutnre économique, ſont plus conſidérables que dans la mouture à la groſſe, & nous en avons une preuve dans les réſultats de notre travail. Tandis en effet que les 12 ſetiers, tant

du blé de 1781 que de celui de 1782, ont perdu par la mouture économique 71 livres 4 onces; douze autres setiers absolument pareils n'ont eu en déchets dans la mouture à la grosse que 38 livres 12 onces, c'est-à-dire, 32 livres 8 onces de moins que les douze premiers setiers.

On ne sauroit douter que ces déchets plus forts, qu'on observe dans la première de ces moutures, n'aient pour cause principale les opérations multipliées du moulin & de la bluterie qui sont répétées aussi souvent que le blé, d'abord en nature, puis réduit à des gruaux, passe & repasse sous les meules. L'agitation continuelle d'une matière aussi légère que la fleur de farine, le déplacement qu'on est obligé d'en faire, lorsqu'elle est sortie du bluteau, le transport réitéré des gruaux, soit pour les faire passer sous les meules à plusieurs reprises, soit pour les verser dans des sacs en état de farine & dans l'ordre où ils ont été remoulus, la durée du travail qui est de deux heures ou environ pour que l'opération soit complète, sur 240 livres de blé, tout annonce que dans la mouture économique, les déchets tombent principalement sur la partie farineuse du grain ; qu'ils doivent être moins considérables, par proportion, sur son écorce; & que dès-lors la perte qu'on éprouve dans cette mouture tient nécessairement à une nature de produit qu'il seroit essentiel de conserver & sur lequel, si les déchets sont inévitables, ils peuvent au moins, par des précautions assez simples, être réduits beaucoup au-dessous de ceux qu'on remarque communément dans les moulins.

Si l'on suppose donc que dans notre expérience sur la mouture économique on se fût garanti, comme nous sentons qu'on l'auroit pu, à la rigueur, de la perte des 32 liv. 8 onces de farine au-delà du total des déchets observés dans la mouture à la grosse, il en seroit résulté que par la première de ces moutures nous aurions eu un excédant en farine, de 74 livres 8 onces sur les produits en farine de la seconde, & que la supériorité de l'une sur l'autre auroit été bien plus marquée que nous ne venons de l'observer. Il ne faut pas

croire cependant que cet excédant en farine, ne fût-il même ſuppoſé que de 42 livres, comme les Tableaux l'annoncent, ait été pris ſur le menu ſon, & qu'il auroit dû faire partie réelle des iſſues, comme étant de la même nature & d'une baſſe qualité. On ſait que dans la mouture économique, le gros, le menu ſon & les déchets forment communément le quart de la quantité de blé employée, & que les trois autres quarts ſont compoſés de cinq produits différens en farine qu'il eſt ordinaire auſſi de tirer de cette mouture. Les deux premiers de ces produits ſont, il eſt vrai, de la plus belle & de la meilleure qualité, le troiſième en diffère peu; & quoique les deux derniers ne ſoient proprement que des farines biſes, cependant on les vend plus cher quelquefois, toute proportion gardée, que les farines de la première qualité.

Si, d'après la quantité aſſez conſtante de ces produits en farine par la mouture économique, on jette les yeux ſur les Tableaux de nos opérations, on verra que les 1452 livres du blé choiſi de 1781, ont rendu en farine par cette même mouture 1096 livres, c'eſt-à-dire, 7 livres de plus que les trois quarts de la quantité de blé employée, & qu'il ne manque par conſéquent que 7 livres aux iſſues jointes aux déchets pour former le quart de cette même quantité de blé.

On obſervera encore que les 1375 livres 12 onces de grains de 1782, n'ont rendu par cette mouture également que 1014 livre de farine, comme blé d'une qualité médiocre, au lieu de 1031 livres 13 onces qui ſeroient les trois quarts de la quantité de blé miſe en expérience.

On reconnoîtra enfin que ces deux quantités de blé réunies, & peſant enſemble 2827 livres 12 onces, ont donné 2110 livres de farine, c'eſt-à-dire 10 livres 13 onces de moins ſur les trois quarts de la totalité des grains, & que par conſéquent les iſſues jointes aux déchets qui dépendent de ces deux quantités de grains réunies, préſentant un total de 717 livres 12 onces, n'ont que 10 livres 13 onces au-delà du quart de la totalité des grains.

Par l'application du même calcul aux produits moins avantageux

avantageux en farine de la mouture à la grosse, on verra que les 2827 livres 12 onces des deux sortes de blé, n'ont rendu que 2068 livres de farine, au lieu de 2120 livres 13 onces qu'auroient dû produire, sur le pied des trois quarts, les grains soumis à cette mouture ; & que les 52 livres 13 onces de farine qu'on observe de moins dans cette opération, se retrouvent dans le total des issues & des déchets qui sont résultés de cette mouture, puisque ce total est de 759 livres 12 onces, tandis qu'il n'auroit dû monter qu'à 706 livres 15 onces pour former le quart de la totalité des grains.

Dans l'emploi que nous avons fait de douze setiers de froment de la meilleure qualité, & recueilli dans une année favorable aux grains, telle qu'étoit 1781, & dans l'emploi en même temps de douze autres setiers de froment d'une qualité inférieure & de la récolte de 1782, nous avons eu pour objet, non-seulement de partir des mêmes bases pour comparer les deux moutures & de les appliquer chacune aux deux sortes de blé, mais encore de donner dans les résultats de la mouture des six setiers du plus beau froment & des six autres setiers du blé médiocre, la facilité de tirer un produit moyen qui pût représenter celui d'un *blé marchand*, qu'on regarde dans le commerce des grains comme au-dessous de la *tête des blés*, & au-dessus de ceux qui sont peu recherchés : le prix de ce *blé marchand* paroît être celui qui doit servir de règle pour asseoir la taxe du pain, puisqu'un boulanger n'achète ordinairement & assez cher des grains ou des farines d'une excellente qualité, que pour les marier avec d'autres dont il connoît la qualité inférieure, & qu'il n'a payé aussi qu'à proportion des défauts qu'il y a reconnus.

Les opérations même des boulangers mettent donc sur la voie pour trouver la base de la taxe du pain ; c'est, à ce qu'il semble, la valeur *du blé marchand*, soutenue pendant quelque temps dans des marchés bien garnis, & qui tient à peu-près le milieu entre le prix du plus beau grain & celui des blés qui au premier coup-d'œil n'annoncent qu'un foible produit en farine, & auxquels ne s'attachent pas les

boulangers inſtruits, quoiqu'on les leur offre à un prix aſſez bas.

Si on ſuppoſoit avec aſſez de fondement, que ſix des ſetiers de blé de 1781, mêlés avec ſix autres de 1782, & formant un total en poids de 2827 livres 12 onces, pourroient être regardés comme repréſentant *le blé marchand* dont il vient d'être queſtion, alors on auroit vu par le réſultat de nos expériences, que les trois quarts ou à très-peu-près de cette quantité de blé dont on ſuppoſe ici le mélange, ont été convertis en farine par la mouture économique; mais on auroit remarqué en même temps, que le produit en farine n'a pas été auſſi avantageux dans la mouture à la groſſe, quoiqu'appliquée également à une quantité pareille de blé, par la raiſon bien ſenſible, que les iſſues qu'elle a données, ont recélé une partie des gruaux, par un vice ſur lequel nous nous ſommes déjà expliqués, & qui eſt inhérent à cette opération. Nous aurons lieu de revenir ſur cet objet eſſentiel, comme étant une des baſes ſur leſquelles doit porter le travail dont nous ſommes chargés, lorſque nous aurons expoſé les opérations de la boulangerie, & rendu compte de la quantité de pain de différentes qualités, qu'ont produit les farines que nous avons employées.

SECONDE PARTIE.

L'OPÉRATION de convertir en pain une partie des farines que nous avions obtenues, exigea de notre part la même attention que nous avions donnée à la mouture des grains, & nous nous fimes un devoir de la ſuivre juſque dans le plus ſimple détail pendant tout le temps qu'elle demanda. La mouture à la groſſe étant principalement celle dont nous devions nous occuper pour remplir les intentions du Parlement, nous crumes devoir employer par préférence les farines que nous avions tirées de cette mouture, & en faire uſage pour les convertir en pain dans les trois qualités de farine qui en étoient réſultées: nous nous tranſportames en conſéquence, le 15 Décembre de cette année, à Scipion,

maiſon dépendante de l'Hôpital général, où toutes nos farines étoient en dépôt, & diſtinguées par des étiquettes qui déſignoient leur poids, leur qualité, & les blés deſquels ces farines provenoient.

Après avoir reconnu que le cachet que nous avions appliqué ſur la ligature de ces ſacs à Corbeil, étoit ſain & entier, nous fimes ouvrir un de ceux qui contenoient la moitié ou environ de la farine de la première qualité que nous avions obtenue par la mouture à la groſſe, du blé de 1781, & nous en tirames 310 livres qui furent miſes dans un autre ſac ſéparément, lequel fut lié, cacheté de nouveau & étiqueté; nous tirames encore 130 livres de farine de la ſeconde qualité, fournies auſſi par le blé de 1781, & provenant également de la mouture à la groſſe, du ſac qui la contenoit, & dont il ne reſta que 6 livres 8 onces pour échantillon: ces 130 livres de farine furent miſes dans un autre ſac qui fut fermé avec les mêmes précautions qu'on avoit priſes pour le premier: enfin nous tirames 220 livres de farine de la troiſième qualité, ſorties toujours du blé de 1781, & obtenues par la mouture à la groſſe, du ſac où étoit enfermée cette farine biſe, & dont il ne reſta que 13 livres pour échantillon; les précautions dont on avoit uſé à l'égard des deux premiers ſacs, furent les mêmes pour celui dans lequel on mit ces 220 livres de farine, & ce premier ordre une fois établi, nous ne nous occupames plus que du ſoin de faire tranſporter ces farines dans l'endroit où nous pourrions jouir d'une certaine aiſance, & ſur-tout de la tranquillité que notre expérience demandoit: le travail continuel des boulangers de Paris ne nous offroit que peu de reſſources de ce côté; nous jetames donc les yeux ſur l'école de boulangerie, comme plus favorable que tout autre endroit pour l'exactitude de l'opération dont nous étions chargés; d'ailleurs, nous comptions ſur le zèle & les lumières de M. Brocq qui eſt à la tête de cette école de boulangerie, & nous ne nous trompions pas: nos trois ſacs de farine furent tranſportés en conſéquence à cette boulangerie, le même

jour 15 Décembre, & dès le soir nous y commençames notre opération. Il y a deux fours dans cette École, qui sont assez continuellement occupés, tant pour le pain des Prisons & celui du Dépôt de Saint-Denys, que pour celui de l'École-militaire; tout le travail relatif à ces trois endroits fut fait dans la journée du 15 Décembre, & nous eumes la liberté pendant la nuit de disposer des ouvriers attachés à cette boulangerie, pour les opérations multipliées que notre expérience demandoit.

Nous nous proposâmes de faire trois fournées de pain dans l'emploi des farines que nous avions enlevées de Scipion, & nous comptâmes, d'après des épreuves connues, sur 288 livres de pain ou environ par chaque fournée.

On a vu plus haut que le premier des trois sacs que nous avions fait transporter à l'école de boulangerie, contenoit 310 livres de farine de la première qualité; que le second contenoit 130 livres de farine de la seconde qualité, nommée *bis-blanc*, & qu'il y avoit 220 livres de farine bise dans le troisième sac; le total de ces farines étoit de 660 livres, dont le tiers de 220 livres, converti en pâte, étoit destiné pour chacune des trois fournées.

Comme les 310 livres de farine étoient de la même qualité, elles furent traitées dans un pétrin séparé; les 130 livres de bis-blanc eurent aussi un pétrin à part; & les farines bises furent également travaillées en particulier: ce ne fut qu'au moment de faire usage du four qu'une partie de la pâte produite par les 310 livres de farine de la première qualité, fut réservée pour former une certaine quantité de pain, & être jointe en cet état, pour une fournée, à ceux que devroient donner les 130 livres de bis-blanc: quant aux 220 livres de farine bise, elles suffisoient seules, étant converties en pâte, pour occuper le four, & ne le garnir qu'autant que nous l'avions jugé convenable. Nous aurions desiré de faire une fournée entière de bis-blanc, comme elle a eu lieu pour les deux autres sortes de farine, mais nous n'avions que 130 livres de bis-blanc ou environ, & il étoit plus essentiel de faire

une fournée entière dans laquelle ce bis-blanc fût compris, avec la précaution de le bien distinguer, que de l'exposer séparément en petite quantité à toute la chaleur d'un four assez grand: 90 livres de farine de la première qualité qu'avoient en excédant les 310 livres dont il vient d'être question, & qui donnèrent 118 livres de pain, complétèrent la fournée trop foible du bis-blanc, & les rendirent toutes les trois égales, comme ayant reçu chacune le produit en pâte de 220 livres de farine.

L'exposé que nous venons de faire nous a paru indispensable pour la clarté de notre opération, & afin que rien n'arrêtât dans les détails qui nous restent à exposer.

Le même jour 15 Décembre, à 10 heures $\frac{1}{2}$ du soir, on commença à préparer le *levain de première* [farine], qui étoit destiné pour les 310 livres de farine de la première qualité; on prit pour cet effet 10 livres de levain dans celui qui appartenoit à l'école de boulangerie; on les délaya dans huit pintes d'eau de puits un peu chaude, on les mêla ensuite avec 30 livres de farine tirées du sac qui contenoit les 310 livres de la première qualité, & on en forma une pâte ferme & élastique qu'on entretint dans une douce chaleur, afin qu'elle prît plus tôt son apprêt: on referma le sac de farine que ce levain regardoit, & on en cacheta la ligature.

A 2 heures 42 minutes du matin on procéda au levain de *deuxième;* on délaya le levain de *première* dans 12 pintes d'eau tiède, on les mêla avec 48 livres de farine tirées du sac dont nous venons de parler, & on en forma une masse de pâte qui avoit toute la consistance de la première; on la mit dans une corbeille d'osier qui fut recouverte par une toile grossière, & qu'on entretint dans une douce chaleur sur le cul du four: à 6 heures 55 minutes du matin, ce levain de *deuxième* avoit tellement reçu son apprêt, que la pâte se gonfloit de toutes parts, & commençoit à se répandre hors de la corbeille; on le délaya sur le champ dans 22 pintes d'eau, on le mêla parfaitement avec 77 livres de farine de première qualité, & lorsque le levain *de tout point*, c'est-à-

dire le troisième & dernier, eut été converti en pâte solide & bien liée, on lui fit prendre son apprêt dans deux corbeilles qui furent placées bien recouvertes sur le cul du four.

A 9 heures 40 minutes du matin, ce levain *de tout point* ayant éprouvé la fermentation qui étoit nécessaire pour qu'on le mêlât de nouveau avec une quantité de farine proportionnée à sa masse, on le mit dans un pétrin; on y mit en même-temps les 155 livres de farine qui restoient des 310 livres destinées pour le pain de la première qualité, & on délaya ce levain *de tout point* avec 51 pintes d'eau: lorsque le mélange de la farine & du levain fut complet, & qu'on en eut formé une masse de pâte parfaitement homogène & bien liée, on la mit par parties dans le tour, qui est une sorte de pétrin plus petit & moins profond que le premier; cette pâte y fermenta encore, & y prit un nouvel apprêt, en attendant qu'elle fût divisée en autant de portions qu'on voudroit former de pains.

Quoique les heures auxquelles on a formé les trois levains destinés pour chaque sorte de farine, se soient ou suivies d'assez près, ou trouvées entre-mêlées, de manière qu'on préparoit un levain pour une sorte de farine, pendant qu'un autre levain formé plus tôt, recevoit son apprêt; cependant nous avons cru devoir, pour un plus grand ordre, suivre sans interruption la marche des trois levains & de leur emploi pour chaque sorte de farine, & les présenter sous un même coup-d'œil, en remontant pour chacun d'eux, aux heures où il a été préparé.

A 10^h $50'$ du soir, on disposa le levain de *première* pour la farine de la seconde qualité, nommée *bis-blanc:* à 3 livres de levain de *chef*, prises dans la pâte de l'école de boulangerie, on joignit 9 livres de farine de bis-blanc; on délaya ce levain dans trois pintes d'eau chaude, & après avoir formé du tout une pâte ferme & bien liée, comme celle dont nous venons de parler, on lui laissa prendre son apprêt en la maintenant dans une douce chaleur. A 3 heures du matin, ce même levain fut repris; on le délaya dans 6 pintes d'eau,

& on le pétrit avec 23 livres de farine de bis-blanc : la pâte bien travaillée qui en résulta, devint le levain de *seconde*, & passa pendant quelques heures à la fermentation : on le reprit à 7 heures $\frac{3}{4}$ pour composer le levain de *tout point ;* il fut délayé dans 9 pintes d'eau & mêlé avec 33 livres de farine de bis-blanc. Ce troisième levain eut bientôt acquis la consistance de la pâte; mis ensuite dans une corbeille, il y éprouva une nouvelle fermentation, & à 10 heures $\frac{1}{4}$ du matin il fut tiré de la corbeille, mis dans le pétrin, délayé dans 23 pintes d'eau, & mêlé avec les 65 livres de farine de bis-blanc qui étoient restées; lorsque le total de la masse eut été bien pétri, on mit la pâte dans le tour où elle fermenta de nouveau en attendant la subdivision qu'on en feroit pour en former des pains.

On vient de voir que les six premiers levains ont été préparés assez près les uns des autres, parce que nous avions la liberté d'employer deux fours en même temps, & qu'il falloit que les pains en pâte & sur *couche* fussent prêts en même temps pour chacun des fours; mais nous n'avions pas la même précaution à prendre pour les levains relatifs à la farine bise, puisque la cuisson des pains qu'elle devoit nous fournir ne pouvoit avoir lieu qu'après celle des pains de la première qualité, & lorsqu'on auroit eu donné à l'un des deux fours toute la chaleur qu'il avoit perdue : aussi ne commençames-nous à préparer le levain de *première* pour la farine bise, qu'à 3 heures $\frac{1}{4}$ du matin; nous primes, comme nous avions déjà fait, dans de la pâte levée de l'école de boulangerie, les 5 livres de levain de *chef* dont nous avions besoin, on les délaya dans 4 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, & on les mêla avec 15 livres de farine bise : on laissa à la pâte qui en résulta tout le temps de bien fermenter, & ce ne fut qu'à 8 heures $\frac{1}{4}$ que ce levain de *première* fut repris, qu'on le délaya dans 12 pintes d'eau, qu'on le pétrit avec 40 livres de la même farine bise, & qu'après avoir obtenu une pâte bien liée, on lui fit éprouver la fermentation; elle se trouva portée au degré convenable à 10 heures $\frac{3}{4}$; alors, on délaya

ce ſecond levain dans 17 pintes ½ d'eau, & on le pétrit avec 55 livres de farine biſe. Devenu levain *de tout point* par cette troiſième opération; il fut mis dans des corbeilles, & y reçut ſon apprêt juſqu'à 1 heure 10 minutes de l'après-midi, qu'on le délaya parfaitement dans 40 pintes d'eau, & que, pétri avec 110 livres de farine biſe, on en compoſa une maſſe de pâte fortement travaillée, qui fut miſe enfin dans le tour pour y rentrer dans l'état de fermentation que les pétriſſages ſucceſſifs avoient interrompue: l'effet avantageux de cette fermentation s'annonce quelquefois dans le tour même, mais plus ſouvent ſur les levains par les gerſures qu'on remarque à la ſurface de la pâte, & dont il eſt aiſé de ſentir la raiſon; cette ſurface ſe deſſèche un peu, & prend une certaine conſiſtance, tandis que la maſſe de la pâte conſerve en-deſſous ſon humidité, & ne perd rien de ſa molleſſe; cependant le mouvement inteſtin qu'excite la fermentation dans cette maſſe bien liée & élaſtique, l'oblige de ſe ſoulever; elle ſe dilate peu-à-peu, ſe tuméfie, réſiſte doucement à la main qui la preſſe, & oblige enfin la ſurface, trop sèche, de ſe gercer de toutes parts pour ſe prèter à la forme convexe que prend la pâte en ſe ſoulevant.

L'Académie a remarqué ſans doute, que dans la formation des trois levains relatifs à chacune des ſortes de farine, nous avons employé ſucceſſivement, & toujours en augmentant, une quantité déterminée de ces farines, de manière que lorſqu'il a été queſtion de faire uſage du troiſième levain, ou levain de *tout point*, nous avions converti en pâte la moitié juſte de chaque ſorte de farine; que l'autre moitié fut mêlée enſuite avec ce même levain de *tout point*, & que par-là chaque ſorte de farine convertie en pâte, donna ſéparément la quantité de pain qu'elle devoit fournir: cette méthode que ſuivent les boulangers intelligens, eſt ſagement établie; on ſe contentoit autrefois de mèler une quantité médiocre de levain, avec une maſſe conſidérable de farine, & on laiſſoit enſuite la pâte dans le repos pour y prendre l'*apprêt* dont elle étoit ſuſceptible, juſqu'au moment où les pains

pains feroient tournés & mis au four; mais on fent combien il étoit difficile que la fermentation s'établît parfaitement dans une quantité confidérable de pâte, à la faveur d'un peu de levain, fur-tout en ne lui donnant que quelques heures pour produire tout fon effet; au lieu qu'en fuivant la méthode que nous avons employée, on fait paffer d'abord à l'état de levain une petite portion de la farine qu'on fe propofe d'employer; bientôt après une portion plus forte de la même farine fe convertit en levain à l'aide du premier: une autre portion de farine plus confidérable que les premières, & qui complète la moitié de toute celle qu'on doit employer, paffe à l'état de levain par fon mélange avec la pâte précédente qui a déjà fermenté; enfin, l'autre moitié de farine qu'on avoit réfervée, eft pétrie avec celle qui a fubi la fermentation, & ne tarde pas elle-même à l'éprouver par le fecours puiffant qu'elle trouve dans une grande quantité de levain: on juge par-là combien cette pratique des boulangers inftruits eft favorable pour rapprocher fur le champ une molécule de farine qui a fermenté, d'une autre qui n'a pas encore paffé par cet état; pour établir en peu de temps un mouvement inteftin dans toute la pâte, & quelque confidérable qu'en foit la maffe, pour l'obtenir bien levée avec beaucoup d'égalité.

On a vu plus haut que les 310 livres de farine de la première qualité, ayant été converties en pâte difpofée à bien fermenter, à la faveur de trois levains qu'on y avoit introduits fucceffivement, fut mife dans le tour pour y prendre un nouvel apprêt: lorfque le moment de l'employer fut venu on commença par en tirer les pains qui devoient compofer la première fournée; ils étoient au nombre de 72, & pefoient chacun 4 livres, & en outre 10 onces d'excédant de pâte, pour fuppléer à la perte que devoit occafionner la cuiffon. Le *bon* de poids que l'on met ordinairement à Paris fur les pains encore en nature de pâte, eft de 2 onces fur un pain d'une demi-livre, de 3 onces fur celui d'une livre, de 6 onces fur celui de 2 livres, de 10 onces fur

celui de 4 livres, de 14 onces ſur celui de 6 livres, de 1 livre 4 onces ſur celui de 8 livres, & enfin de 1 livre 8 onces ſur le pain rond de 12 livres; cet excédant de pâte ſur les différens pains, eſt un peu plus fort dans quelques villes de Provinces, & notamment à Rochefort. Après la peſée de ces 72 pains auxquels on ne donna en les tournant qu'une longueur médiocre, celle des pains de pâte ferme ſi fort en uſage à Paris, afin qu'ils éprouvaſſent moins de déchets au four, on les mit chacun dans un panneton, on les rangea enſuite dans des tiroirs où ils prirent leur dernier apprêt en attendant que le four eût été garni de bois parfaitement deſſéché, & que le feu, mis ſans trop de précipitation, y eût établi une chaleur égale.

Le reſte de la pâte dépendante des 310 livres de farine de la première qualité fut ſubdiviſé en 40 pains d'une livre, en 18 de 2 livres, en trois couronnes de 2 livres chacune, & en 16 pains ronds de 3 livres; ces pains plus petits que les premiers devoient faire partie de la ſeconde fournée & y être diſtingués; ils commencèrent à prendre leur apprêt, ou ſur *couche*, ou dans des pannetons, pendant qu'on préparoit ceux que fourniſſoit la pâte de bis-blanc, & qui devoient compléter la fournée. On prit ſur cette dernière pâte, comme plus ferme que la première, la quantité qu'il falloit pour former 2 pains de 12 livres chacun, 2 autres de 8 livres, 3 couronnes de 2 livres, & le reſte de la pâte fut converti en pains ronds de 3 livres chacun.

Ces pains de bis-blanc éprouvèrent de leur côté une légère fermentation dans les pannetons où ils furent placés, & ſe trouvèrent prêts pour être aſſociés aux autres en même temps dans le ſecond four qui leur étoit deſtiné.

Les 72 pains de 4 livres ayant été préparés à deſſein un peu plus tôt que les autres, afin que les opérations en ſe ſuccédant ne donnaſſent lieu à aucune confuſion, on mit vers midi le feu au premier four, & cinq quarts d'heure après ou environ il fut en état de recevoir les 72 pains; ils y reſtèrent à peu-près une heure, & cette fournée fut

faite; le second four auquel on avoit mis le feu pendant que le pain cuisoit dans le premier, se trouva prêt lorsque la première opération eut été terminée & que les 72 pains, mis dans un grand panier eurent été placés à l'écart.

On ne tarda donc pas à s'occuper de la seconde fournée, en mettant quelqu'ordre dans la manière de placer les pains dans le four: les pains de bis-blanc, & sur-tout ceux de 8 & de 12 livres en occupèrent le fond, comme beaucoup plus forts que ceux qui devoient les accompagner; les pains tirés de la farine de la première qualités furent placés à l'entrée du four, de manière cependant que ceux du poids de trois livres qui sortoient de cette même farine, étoient les plus voisins de ceux de bis-blanc, & que les petits pains comme plus prompts à cuire, formoient le premier rang vers la bouche du four. Il nous fut facile, par cette disposition, de séparer au sortir du four les pains de différentes qualités qu'il avoit contenus, & de conserver jusqu'à la fin de notre expérience l'ordre que nous y avions d'abord établi.

Le retard que nous mimes, à dessein, dans la formation des levains qui regardoient la farine bise, nous donna tout le temps nécessaire pour terminer tranquillement les deux premières opérations, & pour attendre que la pâte en laquelle toute cette farine avoit été convertie, eût pris son apprêt dans le tour: lorsqu'on jugea qu'elle y avoit suffisamment fermenté, on la subdivisa en pains ronds de différente pesanteur, on en fit cent un d'une livre & demie chacun, & trente de trois livres, comme destinés pour les prisons ou le dépôt des Mendians, & le reste de la pâte fut employé à faire deux pains de douze livres chacun, & quatre autres de six livres: pendant qu'ils prenoient tous l'apprêt ordinaire dans des pannetons, on se disposa à chauffer le premier des deux fours, & lorsqu'il eut acquis la chaleur convenable, on y mit ces cent trente-sept pains, en observant de placer au fond ceux qui, comme les plus forts, demandoient à y séjourner un peu plus long-temps: lorsque ces pains parurent cuits

ſuffiſamment aux boulangers qui aſſiſtoient à nos expériences, on les tira du four, on les mit dans des paniers ſéparés des autres, & vers les ſix heures du ſoir tout le travail de la boulangerie fut terminé: nous attendimes juſqu'au lendemain pour conſtater le poids de tous les pains; nous ſentimes bien qu'il en réſulteroit quelque déchet, mais il n'eſt point d'uſage de livrer le pain au ſortir du four, & il convenoit de n'en déterminer la peſanteur que dans l'état où il ſe trouve quand on l'expoſe en vente.

Lors donc que nous eumes reconnu le lendemain que nous avions la totalité des différens pains qui avoient compoſé les trois fournées, nous n'eumes plus qu'à conſtater leur poids: l'inégalité de peſanteur qu'il y a conſtamment dans les pains au ſortir d'un même four, comme on l'a prouvé par expérience dans un Mémoire publié à ce ſujet, quoique ces pains en nature de pâte euſſent été d'un poids abſolument pareil, cette inégalité ordinaire dans la peſanteur des pains, quoique ſemblables tous en apparence, ne nous permit pas de nous régler ſur le poids d'un pain de quatre livres, par exemple, pour en conclure que d'autres qui avoient été faits ſur ce pied-là, euſſent tous réellement ce même poids, ou ne s'en écartaſſent pas ſenſiblement; nous primes donc le parti le plus ſimple & qui nous conduiſit à l'exactitude, ce fut de peſer les pains par maſſes dans de grandes balances, d'employer les paniers d'oſier, après en avoir fait la tare, pour les petits pains difficiles à entaſſer ſur le plateau des balances, & de mettre dans les différentes peſées que nous fimes, toute la préciſion dont elles étoient ſuſceptibles: il en réſulta que les 310 livres de farine de la première qualité avoient donné 399 livres en pains de forme & de poids différens; que les 130 livres de farine de bis-blanc en avoient donné 171 livres; que nous avions tiré des 220 livres de farine biſe, 291 livres de pain; & que le total des trois fournées étoit de 861 livres. Il eſt néceſſaire cependant d'obſerver que nous avions employé pour les levains de *chef* dont nous avions beſoin, 18 livres de pâte qui étoient étrangères à

notre opération, & que les pains qui en ſont réſultés ont produit une augmentation ſur la totalité de ceux que nous avons obtenus de nos propres farines: ces 18 livres de pâte contenoient 11 livres $\frac{1}{4}$ de farine & 6 livres $\frac{3}{4}$ d'eau; converties en pains avec la maſſe entière, elles en ont dû produire 14 livres $\frac{3}{4}$ dont il faut tenir compte dans le produit total que nous venons d'annoncer.

On regarde une opération en boulangerie comme bien faite, lorſqu'en employant 320 livres de farine d'une bonne qualité, en préparant la pâte avec ſoin, en ne la diviſant qu'en pains de quatre livres, ou ronds ou d'une médiocre longueur, & en veillant ſur-tout à la conduite du four, on retire de cette quantité de farine 420 livres de pain. Les réſultats de notre expérience ſe ſont trouvés un peu au-deſſous de cette proportion, tant à cauſe d'un aſſez grand nombre de pains d'une à deux livres, qui faiſoient partie des fournées, que par la raiſon du ſéjour des pains de 4 livres dans la première, qui fut un peu plus long qu'il ne falloit. Si en effet la totalité de nos pains n'euſſent perdu au four que la quantité d'eau convenable, les 660 livres de farine que nous avons employées auroient rendu, dans la proportion dont nous venons de parler, 866 livres $\frac{1}{4}$ de pain, & en y ajoutant les 14 livres $\frac{3}{4}$, produits par les 18 livres de levain, nous aurions eu en total 881 livres de pain; mais comme nous n'en avons obtenu réellement que 861, on voit que ce produit eſt de 20 livres au-deſſous, proportion gardée, de celui de 420 livres de pain donné par un ſac de farine qui eſt établi à Paris ſur le pied de 320 livres; cette diminution de poids a été remarquable ſur les pains de 4 livres qui compoſoient la première fournée, comme ayant une aſſez grande ſurface, quoique d'une longueur médiocre; mais elle a été encore plus marquée dans les pains d'une & de deux livres qui avoient fait partie de la deuxième fournée, & qui ſortoient des 310 livres de farine de la première qualité; ces derniers petits pains, en effet, au nombre de 61, qui auroient dû

peser ensemble 82 livres ou à-peu-près, d'après le poids qu'on leur avoit donné en nature de pâte, ne se trouvèrent plus en total que du poids de 73 livres $\frac{1}{2}$, & avoient perdu par conséquent 8 livres $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire un dixième du poids qu'ils auroient pu conserver comme pains plus forts & réduits à une moindre qualité.

On a dû remarquer que nous avons employé 208 pintes ou 416 livres d'eau, pour convertir en pâte toutes nos farines, & que d'ailleurs les 18 livres de levain en contenoient 6 livres $\frac{3}{4}$: les trois sortes de ces farines n'ont point absorbé, toute proportion gardée, une égale quantité d'eau; pendant que les 310 livres de farine de la première qualité n'en ont reçu que 186 livres, les 130 livres de bis-blanc en ont exigé 82 livres, c'est-à-dire 4 livres de plus que n'en auroient demandé 130 livres de la première de ces farines; & d'un autre côté il est entré 148 livres d'eau dans les 220 livres de farine bise, tandis qu'il n'en auroit fallu pour une quantité égale de farine de la première qualité que 132 livres, & lorsque d'un autre côté 138 livres $\frac{5}{6}$ ou à-peu-près auroient été suffisantes pour 220 livres également de farine de bis-blanc. Comme le pain tiré de cetre dernière farine & celui que nous avons obtenu de la farine bise ont beaucoup moins perdu au four que les pains composés de la farine de la première qualité, il paroît que les farines qui, à quantités égales, absorbent le plus d'eau en passant à l'état de pâte, en retiennent davantage & avec plus de ténacité lorsqu'elles ont été converties en pains; il est vraisemblable aussi que cette propriété qu'ont certaines farines d'éprouver une moindre perte dans le four, tient dans la farine de bis-blanc, par exemple, à la grande quantité de gruaux qui s'y trouvent mêlés; qu'elle tient aussi dans la farine bise sortie de la mouture à la grosse, non-seulement à une portion de ces mêmes gruaux qui y sont confondus, mais encore au son plus ou moins atténué que ces farines contiennent.

Nous avons employé dans notre expérience 671 livres $\frac{1}{4}$ de farine, en y comprenant celle qui appartenoit aux levains

de *chef*, & nous en avons retiré 861 livres de pain; il étoit entré 422 livres $\frac{3}{4}$ d'eau dans la formation de la pâte qui a produit cette quantité de pain; il s'étoit donc fait une combinaiſon de 189 livres $\frac{3}{4}$ d'eau avec la totalité des farines, & il s'en étoit évaporé dans le four 233 livres. Il paroît dès-lors que ſi nos pains n'euſſent pas éprouvé une perte de 20 livres au-delà de celle qu'on remarque dans une opération de boulangerie bien conduite, ſur-tout à l'égard du four, il ſeroit reſté en combinaiſon dans ces mêmes pains 209 livres $\frac{3}{4}$ d'eau : c'eſt-à-dire la moitié ou à peu-près de toute celle que nous avions employée. Si à la rigueur, la moitié de l'eau que nous avons introduite dans nos farines y fût reſtée, après leur converſion en pains, elle auroit fait les cinq ſeizièmes de ces farines; & peut-être, ſuivant la proportion dont nous avons parlé plus haut, d'après même des expériences journalières, eſt-ce le point le plus avantageux auquel on pourroit s'arrêter afin que le pain eût toute la ſaveur qui lui eſt propre ſix à ſept heures après qu'il eſt ſorti du four, pour qu'il ſe maintînt le lendemain dans une certaine fraîcheur, & ne perdît pas en paſſant trop tôt à un état de ſécchereſſe le goût agréable qu'on y avoit d'abord trouvé.

On ſent bien qu'il ne s'agit ici que de pains compoſés des farines de la première qualité, qui, ou ronds ou d'une longueur médiocre, ne préſentent pas trop de ſurface, & qui ſoient tous du poids de 3 à 4 livres. On eſpéreroit en vain l'avantage dont nous parlons d'une fournée où il ne ſeroit entré que des pains d'une à deux livres, ſur-tout ſi la pâte étoit légère & bien battue; on perdroit bientôt au four beaucoup plus de la moitié de l'eau qu'on auroit employée; ces pains, ſur-tout ceux d'une livre, ne ſeroient frais que le premier jour, ils n'auroient que peu de ſaveur le lendemain & ſe trouveroient inſipides le troiſième jour.

Quant aux farines biſes, on a vu qu'en état de pâte elles conſervoient mieux l'eau, par leur nature, que les farines blanches, puiſque la fournée pour laquelle on a fait uſage de

ces farines bises, n'étoit composée, en très-grande partie, que de pains d'une livre & demie, & qu'il ne s'y est évaporé cependant que la moitié ou à peu-près de l'eau qui étoit entrée dans la pâte ; au surplus les 20 livres de déchets qu'on a remarquées sur la totalité de nos pains, se réduisent à une perte peu considérable sur chaque livre prise l'une dans l'autre : elles n'y opèrent pas à la rigueur une diminution de trois gros, & il seroit à souhaiter que dans le commerce immense de la boulangerie, dans les variations sur le poids du pain que la chaleur inégale du four peut occasionner, la diminution à l'égard du poids prescrit, n'allât pas en général au-delà de celle qui s'est trouvée dans notre expérience, & que les pains de pâte légère sur tout, à laquelle on auroit donné l'excédant de poids ordinaire, ne se trouvassent trop foibles, que de 3 gros par livre au sortir du four.

Quoique l'expérience sur la conversion d'une quantité déterminée de farine en pains de différentes qualités, dont nous venons d'exposer les détails, & les observations que nous y avons jointes eussent pu suffire, à plusieurs égards, pour les conséquences que nous avons à tirer relativement à l'objet de notre travail, cependant nous avons cru devoir faire un nouvel essai, en matière de boulangerie, soit pour confirmer les faits que nous avions d'abord reconnus, soit pour parvenir à une plus grande précision dans les résultats.

Cette seconde épreuve a roulé sur les farines différentes tirées des six setiers de froment médiocre de 1782, & obtenues par la mouture à la grosse.

Nous nous sommes bornés, comme dans la première expérience, à 660 livres de farine en total, & cette quantité étoit composée de 350 livres de fleur de farine, de 160 de bis-blanc & de 150 de farine bise. Nous commençames cette opération le 26 Janvier à huit heures & demie du soir; nous la continuames pendant toute la nuit pour la formation successive des levains relatifs à chaque sorte de farine, & en laissant les intervalles de temps nécessaires pour que la pâte renouvelée à quatre reprises reçût parfaitement son apprêt. Le

compte

compte exact que nous avons rendu de la première expérience, nous dispense d'en rendre un nouveau de celle-ci: quant aux précautions qu'il étoit nécessaire de prendre avant que le pain fût mis au four, elles ont été les mêmes pour cette deuxième opération que celles dont nous avons parlé en exposant la première; & il nous suffira de dire ici que les 350 livres de fleur de farine absorbèrent, à quatre reprises, 209 livres $\frac{1}{2}$ d'eau; qu'il en fallut 100 livres pour les 160 de bis-blanc & 99 livres pour les 150 livres de farine bise; & que par conséquent la totalité de l'eau pour les 660 livres de farines différentes fut de 408 livres 8 onces; il faut même ajouter à ce total 7 livres 2 onces d'eau que contenoient les 20 livres de levain de *chef* que nous primes à l'école de boulangerie pour commencer notre travail. La masse de pâte qui étoit résultée des 350 livres de fleur de farine, avoit reçu tout son apprêt vers les neuf heures du matin; on en tira d'abord 74 pains longs, du poids de 4 livres, qui furent destinés pour la première fournée; le surplus de cette pâte fut subdivisé en 132 pains d'une livre, en 20 autres de deux livres chacun, & enfin du peu qui resta de cette même pâte on fit 3 petits pains en forme de couronne, lesquels pesoient ensemble 5 livres $\frac{1}{2}$.

On s'occupa ensuite de la pâte de bis-blanc, dont l'apprêt ne tarda pas à s'annoncer dès que ce premier travail eut été fini; il fut tiré de cette pâte, un peu plus ferme que la première, soixante-trois pains, dont deux étoient chacun de 12 livres, trois étoient de 8 livres, six pesoient chacun 4 livres, cinquante autres étoient chacun du poids de 3 livres, & deux autres, en forme de couronne, ne pesoient ensemble que 2 livres $\frac{1}{2}$.

Tous ces pains de bis-blanc & les petits pains que la pâte de fleur de farine avoit fournis, composèrent la deuxième fournée; on réserva pour la troisième tout le produit de la farine bise; il consista en cinquante-six pains, dont deux étoient chacun de 12 livres, trois de 8 livres, six de 4 livres, & quarante-cinq de 3 livres.

Nous veillames attentivement à la chaleur du four, sur-tout vers la fin de l'opération; on en tira même alors quelques pains pour bien juger de leur état, & ce ne fut que lorsqu'on regarda la totalité comme parvenue au degré de cuisson convenable, qu'on tira tous les pains du four, en commençant par les plus petits, comme plus exposés à souffrir du déchet par le moindre délai, que ceux de 4, de 8 & de 12 livres.

Les produits des trois fournées furent mis par ordre dans de vastes paniers d'osier, & y refroidirent lentement dans la boulangerie jusqu'au lendemain matin, où nous nous occupames du soin de les peser, en distinguant les pains de différentes qualités; tous ceux qui dépendoient de la première fournée se trouvèrent du poids de 292 livres.

Les pains d'une & de 2 livres, qui faisoient partie de la deuxième fournée, pesoient ensemble 163 livres 12 onces.

Et les pains de bis-blanc, qu'on avoit joints à ceux-là dans le même four, pesoient ensemble 222 livres 4 onces.

Enfin, les pains bis qui avoient été cuits séparément comme exigeant un séjour assez long au four, pesoient en total 203 livres.

Ces quatre quantités réunies formèrent celle de 881 livres.

On a vu que nous avons employé 660 livres de farine pour cette expérience, tant en fleur de farine, qu'en bis-blanc & en farine bise: il faut ajouter à cette quantité celle de 12 livres 14 onces de farine, ou à peu-près, que contenoient les 20 livres de levain de chef qui nous avoient été nécessaires pour commencer à établir la fermentation dans la pâte des trois sortes de farine que nous avions à convertir en pains.

Ces 672 livres 14 onces de farine auroient donné 883 livres 2 onces de pain dans la proportion favorable de 420 livres de pain tirées de 320 livres de farine: le total de nos produits en pain n'a donc été au-dessous de celui-là que de 2 livres 2 onces, & nous nous sommes peu écartés de cette proportion avantageuse que nous desirions de saisir.

Mais on doit faire attention que la première fournée

étoit composée, en très-grande partie, de pains longs de 4 livres, qui présentant plus de surface que les pains ronds du même poids, avoient donné lieu à une évaporation plus considérable de l'humidité de la pâte : il est encore plus essentiel d'observer qu'il y avoit dans la seconde fournée cent trente-deux pains d'une livre, vingt de 2 livres, & trois autres pains en forme de couronne, du poids chacun d'une livre 9 onces ou environ, & que cette multiplicité de pains a occasionné beaucoup de déchet au four; il s'est trouvé tel, qu'il a fallu que les pains ronds de bis-blanc & ceux de farine bise, dont plusieurs étoient de 12, de 8 & de 4 livres, ayant eu un excédant de poids au-delà de la proportion de 420 livres de pain tirées de 320 livres de farine, pour faire disparoître presque totalement le déchet que les pains longs de 4 livres & sur-tout les petits pains avoient éprouvé; cet excédant étoit de 11 livres 10 onces, tandis que le déchet alloit à 13 livres 12 onces; & comme la perte sur ces derniers pains étoit plus forte de 2 livres 2 onces que l'augmentation de poids sur les pains de bis-blanc & de farine bise, il est résulté que dans notre expérience nous n'avons pas obtenu tout-à-fait le produit favorable qu'indique la proportion de 320 livres de farine pour 420 livres de pain.

La quantité d'eau que nous avons employée pour cette seconde expérience, montoit à 415 livres 10 onces, en y comprenant 7 livres 2 onces que les 20 livres de levain de chef avoient absorbées: la moitié de cette quantité d'eau est de 207 livres 13 onces; le total des farines dont nous avons fait usage, y compris 12 livres 14 onces contenues dans les 20 livres de levain de chef, alloit à 672 livres 14 onces, lesquelles ont produit 881 livres de pain, c'est-à-dire, 208 livres 2 onces au-delà du poids total des farines; cet excédant du produit en pain est, à cinq onces près, la moitié de l'eau qui est entrée dans toute la pâte: cette partie considérable d'eau, mêlée d'abord avec la farine, & combinée ensuite avec elle au four, lorsque celle-ci s'est convertie en pain, a passé au même état; elle le conserve toujours; &

ſi après un certain temps elle a plus éprouvé de diminution que les molécules propres de la farine, elle ſe ſoutient en très-grande partie dans l'état de combinaiſon auquel on l'a fait paſſer; & cette eau qui alors paroît avoir perdu ſon caractère diſtinctif, ne ſe diſſipe enfin que par le dépériſſement total du pain.

Si, comme nous l'avons inſinué dans le détail de la première expérience de boulangerie, il y a un point à ſaiſir dans la cuiſſon du pain, celui de ne lui laiſſer perdre au four que la moitié de l'eau que la pâte contenoit, nous aurons preſque atteint à ce but dans la ſeconde expérience; mais nous n'y ſerons parvenus qu'après avoir été avertis par la première opération, des ménagemens qu'exige la conduite du four, & après y avoir éprouvé un déchet de 20 livres de pain, par un ſéjour trop long de quelques minutes que le pain fit dans le four, ſur-tout à la première fournée où il y eut plus du double de perte ſur les ſoixante-douze pains longs de quatre livres, que ſur tous ceux des deux autres fournées.

Lorſque nous diſons que la cuiſſon du pain eſt à un degré convenable quand elle ne lui a fait perdre que la moitié de l'eau ou environ que la pâte contenoit, nous ſuppoſons qu'on a employé des farines sèches, d'une bonne qualité, qui boivent l'eau promptement, & qui ne tardent pas à prendre de la conſiſtance dès que la pâte devenue égale, a été battue par parties, & raſſemblée enſuite en une ſeule maſſe: il ſeroit difficile en effet d'adopter cette règle pour les farines qui auroient contracté de l'humidité & ſeroient imparfaites à d'autres égards; elles pourroient même, par ces défauts, ſe rapprocher en quelque ſorte de l'état des farines biſes qui, à cauſe d'une portion de ſon qui s'y trouve toujours mêlée, retiennent l'eau avec aſſez de ténacité lorſqu'elles ſont converties en pâte, & demandent à reſter aſſez long-temps dans le four pour y parvenir au degré de cuiſſon qu'exige le pain bis.

Après avoir rendu compte à l'Académie, dans la première

partie de ce Mémoire, de nos expériences sur la mouture des grains; après lui avoir exposé, dans la seconde, les détails relatifs aux opérations de la boulangerie, il ne nous reste, dans la troisième partie, qu'à établir le prix du pain, sans y comprendre d'abord les frais qu'il exige; à le fixer sur la valeur du blé & des produits de différentes qualités que nous avons obtenus; à y attacher ensuite ce qui est dû au boulanger, tant pour la dépense à laquelle il est tenu, que pour le bénéfice qu'il doit raisonnablement espérer; à rapprocher la valeur totale du pain, de celle qu'il a actuellement à Rochefort, en considérant le prix des grains que l'on consomme dans cette Ville, la mesure d'après laquelle on s'y règle, la valeur des farines qu'on est dans l'usage d'y vendre, la quantité de livres de pain qu'on y retire d'une quantité déterminée de farine, la taxe qui s'y trouve établie, la base du tarif qu'on paroît y suivre; & en faisant enfin quelques observations, tant sur le tarif particulier de la Rochelle, dont les boulangers de Rochefort demandent l'exécution, que sur celui de cette dernière ville, fait en 1709, contre lequel réclament ces mêmes boulangers.

TROISIÈME PARTIE.

On a vu que les six setiers de beau froment de 1781, ont produit par la mouture à la grosse 1071 livres de farine de différentes qualités; on se rappelle que de cette quantité de farine nous en avons pris 660 livres pour la première opération de boulangerie, c'est-à-dire, 310 livres de fleur de farine, 130 livres de bis-lanc, & 220 livres de farine bise; elles n'ont rendu en total que 861 livres de pain, malgré l'excédant qu'on auroit dû y remarquer par l'addition des levains; d'après ces produits, les 1071 livres de farine, si nous les eussions employées entièrement, en y ajoutant une quantité de levain proportionnée à celle que les 660 livres de farine ont reçue, n'auroient donné que 1397 livres 3 onces de pain ou environ; mais afin de nous moins éloigner

du produit plus avantageux que nous avons tiré, toute proportion gardée, de la seconde opération en boulangerie, on peut porter celui-ci à 1400 livres de pain, & on verra bientôt quelle est la raison qui nous engage, dans ce moment-ci, à nous arrêter à cette quantité précise de pain que nous supposons tirée des 1071 livres de farine.

Il seroit résulté de l'emploi total de ces farines que nous aurions obtenu

des 701 livres 8 onces de fleur de farine..	916 $\frac{1064}{1071}$ de pain.
des 136.... 8.... de bis-blanc......	178 $\frac{462}{1071}$.
des 233.... //.... de farine bise.....	304 $\frac{616}{1071}$.
1071.... //	1400.

Le froment de 1781, qui a fait la matière d'une de nos expériences, a été acheté à Essonne, bourg situé près Corbeil, & à six lieues de distance de Paris; nous l'avons payé sur les lieux 24^{l} 5^{s} par setier pesant 242 livres; nous nous contenterons de supposer que le setier de ce blé, rendu à Paris, ne seroit revenu qu'à 24^{l} 10^{s}, parce qu'il est à présumer qu'un boulanger de Paris qui auroit fait l'achat de ce même blé pour son commerce, l'auroit obtenu à un prix un peu au-dessous de celui que nous en avons donné, & auroit trouvé dans les 24^{l} 10^{s} par setier, le montant des frais de transport auxquels il auroit été tenu.

Dès-lors les six setiers de froment de la première qualité, qui ont donné 1071 livres de farine, ont coûté en total 147^{l}, & les 1400 livres de pain que nous en avons retirées sont revenues chacune à 2^{s} 1^{d} $\frac{1}{5}$, sans y comprendre encore les frais de main-d'œuvre & le bénéfice du boulanger, de manière que sans avoir égard pour ce moment-ci à ces frais & à la qualité du pain,

Les 917 livres de pain blanc ont coûté..	96^{l} 5^{s} 8^{d} $\frac{2}{5}$.
Les 178.... de bis-blanc..........	18. 13. 9 $\frac{3}{5}$.
Et les 305.... de pain bis............	32. // 6.
1400.	147. // //

Les boulangers de Rochefort achettent communément leurs blés à Marans, ville qui en eſt éloignée de huit à neuf lieues, & où il ſe fait un commerce conſidérable en grains & en farines. Le prix du froment, ſuivant les certificats en forme qui ont été tirés de Marans, eſt aujourd'hui de 5^{l} par boiſſeau de cette même ville; il contient en froment d'une bonne qualité, 51 à 53 livres; nous ſuppoſerons qu'il en contient 51 livres $\frac{7}{8}$, & dans ce cas, nous verrons que 28 boiſſeaux de Marans répondent à 6 ſetiers de Paris.

La charge de farine nommée *fin minot*, & qui eſt compoſée de deux ſacs du poids chacun de 230 livres, vaut à Marans, ſuivant les mêmes certificats, 38 à 39^{l}, & par un prix moyen, $38^{l}\ 10^{ſ}$.

Les boulangers de Rochefort aſſurent qu'il leur en coûte $1^{l}\ 13^{ſ}$, tant pour quelques frais indiſpenſables que pour le tranſport d'une charge de farine de Marans à Rochefort, ce qui fait monter le prix de ces 260 livres de farine, avant que d'être employées, à $40^{l}\ 3^{ſ}$.

Il y a également des frais proportionnels à faire pour le tranſport des blés qu'ils achettent à Marans; ces frais, en les ſuppoſant de $5^{ſ}$ par boiſſeau, iroient à 7^{l} pour les 28 boiſſeaux, & ſeroient à peu-près pareils à ceux qu'occaſionne le tranſport de quatre charges un huitième ou environ de farine, leſquelles répondent en total au produit en farine qu'on peut tirer de 28 boiſſeaux de froment.

Ces 28 boiſſeaux de froment, d'une bonne qualité, valant chacun $5^{l}\ 5^{ſ}$, y compris les frais de tranſport, auront donc coûté, rendus à Rochefort, 147^{l}; ils produiront 1071 livres de farine, dont on tirera, en corrigeant le Tarif de 1700, 1400 livres de pain, comme des 6 ſetiers de Paris, & la livre de pain coûtera intrinſéquement $2^{ſ}\ 1^{d}\ \frac{1}{5}$.

Quatre charges de farine priſes à Marans, & auxquelles on ajoutera 31 livres de farine de la même qualité, pour établir une comparaiſon exacte, coûteront, ſur le pied de $40^{l}\ 3^{ſ}$ la charge, la ſomme de $165^{l}\ 7^{ſ}\ 7^{d}$: elles contiendront, comme les 6 ſetiers de Paris & les 28 boiſſeaux de Marans,

1071 livres de farine, & donneront 1400 livres de pain, si on abandonne sur ce point particulier le Tarif de 1700. Mais la livre de pain sortie de ces farines de *fin minot*, sera intrinséquement plus chère que celle dont on vient de déterminer le prix, comme sortie des farines blanches & bises: cette livre de pain tirée indistinctement du *fin minot*, ira à 28 deniers $\frac{1}{3}$.

Il est essentiel d'observer que le prix de la livre de pain tirée du *fin minot*, ayant été une fois fixé, ce prix sera toujours le même pour toutes les livres de pain que fournira le *fin minot*, comme farine de la première qualité, & absolument égale dans le produit en pain que rendra la totalité de deux ou de plusieurs sacs.

Mais il n'en sera pas ainsi du prix de la livre de pain qu'on établira d'après la valeur du froment en nature, & duquel il sort des farines de différentes qualités.

Nous avons commencé d'abord, il est vrai, par fixer le prix de la livre de pain, relativement à une quantité déterminée de farine, & en la regardant pour un moment comme parfaitement égale en qualité, & donnant une certaine quantité de livres de pain de la même valeur.

Mais nous la considérerons bientôt comme pouvant être partagée en trois classes pour la qualité, & comme propre par là à fournir trois sortes de pain d'un prix inégal. On verra par cette distribution de la valeur du pain, la quantité de deniers par livre dont on décharge le pain de la seconde qualité, & celui qu'on nomme *bis*, pour rejeter sur le pain blanc l'excédant de valeur qu'avoient les deux autres, & que les gens aisés ne seront pas surpris de supporter, au soulagement du bas peuple, sur la valeur plus forte, mais toujours juste, du pain plus délicat qu'ils consommeront.

C'est cette valeur plus forte qui se trouve attachée à tout le pain tiré de la farine de *fin minot*, & qu'on vient de voir portée à 2s 4d $\frac{1}{3}$ par livre de pain, sans y comprendre encore les frais de manutention.

Nous avons dit qu'il y avoit un point particulier sur lequel

il

il paroiſſoit convenable de s'écarter du tarif de la Rochelle fait en 1700, & de celui de 1703, établi ſur le même principe à Rochefort: voici ſur quoi porte notre obſervation. Le tarif de 1700 ſuppoſe qu'on ne tire des 260 livres de farine contenues dans la charge ou les deux ſacs, que 320 livres de pain, & accorde aux boulangers pour leurs frais 6^l par charge de farine de *fin minot*, & même de *gros minot*, c'eſt-à-dire $4^d \frac{1}{2}$ par livre de pain, quel que ſoit le prix des deux ſacs de farine; on voit en effet à l'article de ce tarif qui concerne le *fin minot*, que lorſque les deux ſacs de cette farine de la première qualité ne coûteront que 10^l, & qu'on aura joint à cette ſomme celle de 6^l pour les frais de cuiſſon, la livre de pain ſera fixée à 1^f, & qu'elle ſera réglée ſur le pied de 3^f lorſque le prix des deux ſacs ſera monté à 48^l, y compris les 6^l pour les frais de main-d'œuvre: il eſt évident que 320^f ſont équivalens aux 10^l, prix des deux ſacs de farine, jointes aux 6^l pour frais & bénéfice, comme trois cents vingt fois trois ſous repréſentent les 48^l dont il vient d'être queſtion.

Et comme d'un autre côté 6 livres contiennent 1440^d, il en réſulte que cette dernière quantité diviſée par 320 livres de pain, donne aux boulangers quatre deniers & demi par livre de pain: cette explication devenoit néceſſaire pour développer le tarif de 1700, & ſéparer, dans la valeur d'une ſeule livre de pain, ce qui dépend du prix de la farine d'avec ce qui appartient uniquement aux frais de manipulation.

On tireroit aujourd'hui, d'après le travail courant des boulangers, 340 livres de pain des deux ſacs de minot peſant 260 livres, tandis que 320 livres de pain ſeulement, comme tirées auſſi de 260 livres de farine, forment, ainſi qu'on l'a vu, une des baſes principales du tarif de 1700, & y ſervent de point fixe d'où partent tous les calculs: mais on pourroit préſumer que ceux qui ont préſidé à la confection de ce tarif n'ont compté, en connoiſſance de cauſe, que ſur le débit de 320 livres de pain, en veillant au poids de

ce même pain, & en laiſſant une once de plus ſur chaque livre, afin que le peuple n'eût pas lieu de ſe plaindre à l'égard du poids, & que les boulangers n'euſſent aucun prétexte pour ne pas tenir le pain dans le poids preſcrit: on voit effectivement que 320 onces compoſent les 20 livres de plus ſur leſquelles les boulangers de Paris compteroient, ou à peu-près. On ne ſauroit aſſurer que les auteurs du tarif de 1700 aient eu les vues que nous leur ſuppoſons ici, mais il eſt aſſez ſingulier que l'excédant dont nous parlons, établiſſe une répartition juſte d'une once ſur chaque livre de pain; s'il s'agiſſoit de la mouture des blés, nous ne ſerions pas ſurpris que les produits en farine euſſent été, en 1700, inférieurs à ceux qu'on retire aujourd'hui, & qu'on obtient en mettant dans cette opération une intelligence dont il paroît qu'on ne ſe piquoit pas autrefois; mais il eſt queſtion de l'emploi des farines de la première qualité, ſur lequel il ne doit y avoir que peu de variation, encore dépend-elle moins de la quantité d'eau introduite dans la pâte, & dont le pain doit retenir les $\frac{5}{21}$, que de la conduite du four & de la cuiſſon de ce même pain.

Si, comme nous ſommes fondés à le croire, les boulangers de Rochefort tirent aujourd'hui 340 livres de pain des 260 livres de farine, tant de fin que de gros minot, alors, d'après le tarif de 1700 qui leur accorde ſix livres de frais de main-d'œuvre pour l'emploi de cette quantité de farine, ils n'auroient que quatre deniers $\frac{4}{17}$ pour chaque livre de pain, au lieu de quatre deniers $\frac{1}{2}$, puiſque les ſix livres ou quatorze cents quarante deniers ſeroient répartis ſur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres.

Nous n'avons inſiſté ſur le tarif de la Rochelle, fait en 1700, lequel cadre avec celui de Rochefort adopté en 1703, & auquel on a dérogé en 1709 dans cette dernière ville, que parce qu'il en eſt queſtion particulièrement dans la conteſtation ſoumiſe à la déciſion du Parlement; parce qu'il eſt comme le pivot ſur lequel roule la difficulté; &

aussi par la raison essentielle que ce tarif présente une base fixe pour asseoir la taxe du pain.

On jugera même de l'utilité dont il étoit de le bien connoître & de s'en écarter sur un des points essentiels, en voyant que d'après ce tarif nous n'aurions compté que sur 1318 livres $\frac{2}{13}$ de pain, pour les 1071 livres de farine que les 1452 de blé ont rendues, au lieu de 1400 livres de pain que nous admettons comme sorties de cette même quantité de farine, & donnant par conséquent 81 livres $\frac{11}{13}$ de pain au-delà de la quantité qui auroit été indiquée par ce tarif, suivant la proportion de 260 livres de farine pour 320 livres de pain : & on sent d'ailleurs que par cette augmentation sur le produit en pain, la valeur intrinsèque de chaque livre ne se trouve que de deux sous un denier $\frac{1}{5}$, tandis qu'elle seroit de près de vingt-sept deniers s'il ne falloit compter pour 1071 livres de farine, que sur 1318 de pain.

Nous avons dit que la valeur intrinsèque des 1400 livres de pain étoit de	147^{l} $''^{f}$ $''^{d}$
Si on ajoute à cette somme le montant entier des frais sur le pied de $4^{d}\frac{1}{4}$ par livre, il sera de	24. 15. 10.
& on aura pour le total de la valeur du pain. .	171. 15. 10.

Chaque livre de pain considérée sans aucune distinction pour la qualité, reviendra donc à 2^{f} 5^{d} $\frac{9}{20}$.

Mais il faut avoir égard actuellement aux trois sortes de pain qui doivent résulter des farines de trois qualités différentes que nous avons obtenues des six setiers de froment, mesure de Paris, ou qu'on peut retirer de 28 boisseaux de blé pareil, à la mesure de Marans.

On peut se rappeler que des 1400 livres de pain tirées des 1071 livres de farine, il y en avoit 917 livres de la première qualité, 178 livres de la seconde, que nous avons désignées sous le nom de *bis-blanc*, & 305 livres qui sont de la dernière qualité, connue sous le nom de *pain bis*. Suivant

les affiches publiques de Rochefort que nous avons ſous les yeux, & où la livre des trois ſortes de pain qu'on eſt dans l'uſage d'y débiter, ſe trouve taxée régulièrement, on y voit qu'elle roule ſur les trois prix que voici : la livre de pain de la première qualité ou de *fin minot* eſt portée à $2^{s}\,7^{d}$; celle de la ſeconde qualité ou de *froment à ſa fleur* eſt fixée à $2^{s}\,2^{d}$, & enfin celle de pain bis ou de *meture* n'eſt miſe qu'à $1^{s}\,5^{d}$. La conteſtation qui s'eſt élevée à Rochefort étant principalement l'objet de notre travail, nous conſerverons, dans la détermination du prix de la livre des trois ſortes de pain, la taxe qui s'y trouve établie dans ce moment-ci pour le prix du pain des deux dernières qualités, ſauf à rejeter ſur la valeur du pain de la première ce qui ſera retranché ſur celle du pain des deux qualités inférieures.

Les 305 livres de pain bis qui font partie des 1400 livres, & dont nous venons de parler, avoient été conſidérées dans le premier moment & par un calcul fait ſans aucune diſtinction pour la qualité du pain, comme valant chacune $2^{s}\,5^{d}\,\frac{9}{20}$: mais il faut actuellement que chaque livre de ce pain bis ſoit réduite à $1^{s}\,5^{d}$, & déchargée en conſéquence de $1^{s}\,\frac{9}{20}$; dès-lors les 305 livres de pain bis ne vaudront plus en total que .... $21^{l}\ 12^{s}\ 1^{d}$

Les 178 livres de bis-blanc portées d'abord comme toutes les autres à $2^{s}\,5^{d}\,\frac{9}{20}$ chacune, étant réduites à $2^{s}\,2^{d}$, ſe trouveront déchargées chacune par conſéquent de $3^{d}\,\frac{9}{20}$, & leur prix total ne ſera plus que de.... . 19. 5. 8.

Le prix entier de 1400 livres de pain, en y comprenant les frais de main-d'œuvre, a été porté, comme on a vu, à $171^{l}\,15^{s}\,10^{d}$; il faut donc que les 917 livres de pain de la première qualité, qui n'avoient été eſtimées d'abord que ſur le pied de $2^{s}\,5^{d}\,\frac{9}{20}$, le ſoient ſur le pied de $2^{s}\,10^{d}\,\frac{1}{4}$ ou environ, pour couvrir les diminutions qui ont été faites ſur le pain des deux qualités inférieures, 40. 17. 9.

ci-contre	40^{l}	17^{f}	9^{d}
& vaillent en total	130.	18.	1.
	171^{l}	15^{f}	10^{d}

Nous aurons lieu de revenir ſur ce prix de 2^{f} 10$^{d}\frac{1}{4}$ pour la livre de pain de la première qualité, qui ſe trouve ainſi déterminée par l'augmentation qu'elle ſupporte en conſéquence du plus ou moins de diminution que l'on fait ſur la valeur du pain d'une qualité inférieure.

Les 673 livres de farines différentes, y compris celle des levains que nous avons employées dans le ſecond eſſai en boulangerie, ont donné, comme on a vu, 881 livres de pain : d'après ce produit aſſez avantageux, nous en aurions obtenu 1305 livres ſi nous euſſions fait uſage des 997 livres de farines différentes qui ſont ſorties des 6 ſetiers de blé de 1782 par la mouture à la groſſe, & que nous avons diſtinguées par leur qualité :

Les 685 livres de fleur de farine auroient donné en effet	897 livres de pain.
Les 162 . . . . de bis-blanc en auroient rendu	212.
Et des 150 . . . . de farine biſe, on en auroit tiré	196.
997.	1305.

La valeur de ces 6 ſetiers de blé rendus à Paris, ſeroit de 135^{l}, ſur le pied de 22^{l} 10^{f} le ſetier, & le prix de chaque livre de pain, non compris les frais de main-d'œuvre, iroit à 24$^{d}\frac{4}{5}$, ou environ : ſi on joint 23^{l} 2^{f} 2^{d}, qui forment la totalité des frais de cuiſſon pour ces 1305 livres de pain, au prix des ſix ſetiers de froment, la ſomme de 135^{l} ſe trouvera portée à 158^{l} 2^{f} 2^{d}, & le prix de la livre de pain, ſans diſtinction de qualité, montera à 2^{f} 5$^{d}\frac{1}{20}$, & un peu plus : le calcul que nous faiſons ici peut être appliqué ſur le champ à 28 boiſſeaux de froment médiocre, tel que celui de 1782 qu'on auroit pris à Marans, ſur le pied de 4^{l} 11^{f} 5$^{d}\frac{1}{7}$ le boiſſeau, & qu'on feroit tranſporter à Rochefort, en payant pour ces frais 5^{f} par boiſſeau; alors ces 28 boiſſeaux reviendroient à 135^{l} comme les 6 ſetiers de Paris, &

coûteroient 12^{l} de moins sur la totalité, que 28 autres boisseaux de froment d'une bonne qualité, comme les 6 setiers de froment médiocre, ont coûté 12^{l} de moins que 6 autres setiers de beau froment, tel que celui de 1781 ; ainsi ce qui nous reste de calculs à exposer pour la taxe des 1305 livres de pain obtenues des 6 setiers de blé médiocre, sera entièrement applicable aux 28 boisseaux de blé pareil pris à Marans, & conduira à un résultat commun.

On a vu plus haut que dans ces 1305 livres de pain, il y en avoit 897 livres qui provenoient de la fleur de farine, 212 livres de la farine de bis-blanc, & 196 livres de la farine bise : on a observé encore que chacune de ces livres de pain prise en général & sans aucun égard à sa qualité, valoit $2^{s}\ 5^{d}\ \frac{1}{20}$. Il n'est donc plus question que de suivre la marche que nous avons déjà tenue, de décharger les deux dernières sortes de pain de l'excédant de valeur qu'on y remarque, pour le faire retomber sur la totalité des pains de la première qualité, de réduire la livre de bis-blanc à $2^{s}\ 2^{d}$, & celle de pain bis à $1^{s}\ 5^{d}$; alors les 212 livres de bis-blanc à $2^{s}\ 2^{d}$,

ne vaudront plus que	$22^{l}\ 19^{s}\ 4^{d}$
& les 196 livres de pain bis à $1^{s}\ 5^{d}$, ne vaudront plus que	13. 17. 8.
	36. 17. //
Si du prix du blé joint aux frais de main-d'œuvre, lequel monte à $158^{l}\ 2^{s}\ 2^{d}$, on déduit ces $36^{l}\ 17^{s}$, il restera	121. 5. 2.
	158. 2. 2.

Et on verra que les 897 livres de pain de la première qualité vaudront réellement cette somme de $121^{l}\ 5^{s}\ 2^{d}$, sur le pied de $2^{s}\ 8^{d}\ \frac{9}{20}$, ou à très-peu de chose près, la livre. La quantité de deniers en effet dont on aura déchargé le prix des pains des deux dernières qualités, est de $3008^{d}\ \frac{8}{20}$, cette quantité de deniers étant repartie sur les 897 livres de

pain de la première qualité, forme une augmentation sur chacune d'elles, de 3 deniers $\frac{8}{20}$ ou environ, & fait monter par conséquent, comme nous venons de le dire, le prix de la livre du plus beau pain, tous frais faits, à $2^{f}\ 8^{d}\ \frac{9}{20}$.

On peut se rappeler que dans le compte que nous avons rendu de la première expérience en boulangerie, pour asseoir la taxe du pain, nous avons dit que quatre charges de farine de *fin minot*, auxquelles on ajouteroit 31 livres de farine de la même qualité, qui seroient achetées à Marans & transportées à Rochefort, reviendroient au prix de $165^{l}\ 7^{f}\ 7^{d}$; que leur poids total seroit de 1071 livres, & qu'elles donneroient 1400 livres de pain, toutes de la première qualité, dont le prix intrinsèque, pour chaque livre seroit de $28^{d}\ \frac{1}{3}$; si on ajoute actuellement $4^{d}\ \frac{1}{4}$ pour les frais de main-d'œuvre à ce prix de la livre de pain tirée du *fin minot*, elle montera à $32^{d}\ \frac{7}{12}$, c'est-à-dire qu'elle se trouvera au même prix à peu-près que la livre de pain de la première qualité que nous venons de voir portée à $32^{d}\ \frac{9}{20}$, comme sortie des 897 livres de pain dont le prix a reçu une augmentation par un rejet de $3^{d}\ \frac{8}{20}$ sur chacune de ces 897 livres; augmentation qui n'a eu lieu, comme on l'a observé, que parce qu'on a réduit le pain bis-blanc à $2^{f}\ 2^{d}$ la livre, & le pain bis à $1^{f}\ 5^{d}$.

On voit donc ici que la livre de pain que nous avons tirée des plus belles farines du blé de 1782, par le moyen de la mouture à la grosse, & qui se trouve portée à un prix assez haut à la décharge des deux sortes de pain d'une qualité inférieure, on voit qu'elle peut être assimilée, & pour le prix & pour la qualité, à une autre livre de pain tirée de la farine de *fin minot*, telle qu'on l'achette en sacs à Marans; qu'on n'a pas besoin, à la rigueur, de prendre pour base de la taxe du pain, comme on fait à Rochefort, la valeur de cette farine de *fin minot*; qu'il ne s'agit, comme dans nos expériences, que de connoître le prix du blé, la quantité de livres qu'en contient la mesure dont on se sert, le produit en farines différentes qu'on obtient

de ce blé, la quantité de pain qu'elles rendent, les frais de main-d'œuvre que les lieux & la vente plus ou moins conſidérable peuvent exiger, les ſortes de pain dont le débit eſt en uſage ; qu'il n'eſt queſtion enfin, avec ces connoiſſances préliminaires, que de régler le prix du pain avec toute l'équité qu'exigent les avances du boulanger & le bénéfice honnête qui lui eſt dû, en faiſant retomber ſur le pain le plus délicat ce qu'on retranche au prix de celui que le peuple conſomme.

Qu'on ſuppoſe, par exemple, que le boiſſeau de quelque ville de Province contienne 40 livres de froment d'une bonne qualité, & vaille $4^{l}\ 3^{s}\ 4^{d}$; ſi on fait un eſſai ſur 14 de ces boiſſeaux qui peſeront en total 560 livres, & auront coûté $58^{l}\ 6^{s}\ 8^{d}$, on pourra en tirer, par une mouture bien conduite, 420 livres de farines différentes, & 551 livres de pain ou environ, par une opération de boulangerie où aucun des ſoins qu'elle demande n'aura été négligé.

Dans cette quantité de pain il y en aura d'abord 420 livres de la première qualité, & 131 livres de la ſeconde, ſi on ſe borne à ne faire du pain que de deux ſortes, afin que celui-ci qui ſera bien inférieur au premier, ſoit au moins meilleur que le pain bis ; ou ſi l'uſage du pays eſt de faire du pain de trois qualités différentes, on aura toujours les 420 livres de pain blanc, on pourra en ſuppoſer 61 livres de bis-blanc & 70 livres en bis proprement dit.

Le montant des frais de main-d'œuvre pour ces 551 livres de pain ira, ſur le pied de $4^{d}\frac{1}{4}$, à $9^{l}\ 15^{s}\ 2^{d}$, cette ſomme jointe à celle de $58^{l}\ 6^{s}\ 8^{d}$, qui eſt le prix des 14 boiſſeaux de blé, donnera un total de $68^{l}\ 1^{s}\ 10^{d}$, & chacune des 551^{l} de pain eſtimée ſans aucun égard à ſa qualité, reviendra à $2^{s}\ 5^{d}\ \frac{363}{551}$.

Mais il faut faire rentrer les parties différentes de cette quantité de pain dans les prix qui leur conviennent, & décharger les unes de l'excédant de valeur qui s'y trouvoit attaché par un premier calcul, pour l'appliquer à une autre partie qui étoit au-deſſous de ſon juſte prix.

Nous

Nous commencerons par ſuppoſer qu'on tirera trois ſortes de pain des 420 livres de farine obtenues des 14 boiſſeaux de blé; qu'il y en aura 61 livres en pain nommé *bis-blanc*, 70 livres en pain bis, & le reſte en pain de la première qualité: les 61 livres miſes à 2ſ 2d la livre, comme nous l'avons déjà fait pour du pain de cette même qualité, vaudront en total & en y comprenant les frais, 6l 12ſ 2d

vaudront en total & en y comprenant les frais,	6l	12ſ	2d
Et les 70 livres de pain bis réglées ſur le pied de 1ſ 6d la livre, vaudront..............	5.	5.	//
	11.	17.	2.
Il faudra donc que les 420 livres de pain blanc dont il reſte à établir le prix, vaillent,	56.	4	8.
Pour compléter le total du prix du blé & des frais de main-d'œuvre montant à.....	68.	1.	10.

Et on verra qu'en portant chacune des 420 livres de pain blanc à 2ſ 8d $\frac{1}{8}$, ou à très-peu-près, on compoſera cette ſomme de 56l 4ſ 8d; on aura fixé pour les trois ſortes de pain des valeurs convenables & proportionnées, autant qu'il eſt poſſible, à la qualité des farines qu'on aura employées.

Dans le cas où l'on ſe borneroit à ne tirer de ces 420 livres de farine que deux ſortes de pain, alors les 131 livres tant de pain bis-blanc que de pain bis, n'en compoſeroient, en même quantité, que d'une ſeule ſorte; & chaque livre de ce pain, qui, pour la qualité, tiendroit le milieu entre le bis-blanc & le bis proprement dit, vaudroit 1ſ 9d $\frac{3}{4}$.

On a obſervé ſans doute que par le calcul que nous venons de préſenter, nous avons ſouſtrait du prix de chacune des 61 livres de pain bis-blanc 3d $\frac{363}{551}$, & 11d $\frac{363}{551}$ des 70l de pain bis; d'où il eſt réſulté un total de 1040 deniers ou à peu-près, qui, repartis ſur les 420 livres de pain blanc, ont produit ſur chacune d'elles une augmentation de 2d $\frac{1}{2}$ ou environ.

C'eſt ainſi qu'après avoir établi la valeur totale d'une

quantité déterminée de livres de pain, après en avoir fait ſur chaque livre une répartition exacte, on réduit enſuite à un prix très-juſte & favorable au peuple, le pain dont il ſe nourrit, & on réſerve toujours la totalité du pain le plus délicat pour y accumuler juſqu'à un certain point, & ſuivant les circonſtances, l'excédant de valeur dont les deux ſortes de pain d'une qualité inférieure ont été déchargées, & l'ont été par une eſtimation bien exacte du prix des farines, ou au moins par des vues louables auxquelles un citoyen dans l'aiſance, & ſenſible aux beſoins du peuple, ne refuſera jamais de ſe prêter.

Il ſemble qu'en ſuivant une pareille marche pour aſſeoir la taxe du pain, il ſeroit poſſible de la régler d'une manière aſſez conſtante, d'écarter tout arbitraire dans cette opération eſſentielle, & d'en rendre les principes ſi évidens, que ni le public qui ſe plaint quelquefois parce qu'il n'eſt pas aſſez inſtruit à ce ſujet, ni les boulangers toujours inſtruits, mais toujours enclins à demander quelque augmentation, ne pourroient pas ignorer les baſes ſur leſquelles on auroit établi la taxe, & ne réclameroient tout au plus que contre quelqu'une de ces baſes, telle, par exemple, que la valeur du blé pour le moment, mais qui bientôt, à l'inſpection du prix des grains inſcrit avec ſoin les jours de marchés, ou ſeroient écoutés favorablement dans leurs repréſentations, ou verroient avec évidence qu'ils les ont faites ſans fondement.

On a ſans doute remarqué dans le détail de la première expérience en boulangerie, que chacune des 917 livres de pain de la première qualité, qui faiſoient partie des 1400 livres relatives à cette même expérience, revenoit, tous frais faits, à . . . . 2ſ 10d $\frac{4}{20}$.

Pendant que chacune des 897 livres de pain d'une qualité pareille, & qui faiſoient partie auſſi des 1305 livres relatives à la ſeconde expérience, ne valoit que . . . . 2. 8. $\frac{9}{10}$,

& que par conſéquent il ſe trouvoit une différence de 1d $\frac{15}{20}$ dans le prix de ces deux livres de pain, quoique pareille pour la qualité. . . . // 1. $\frac{15}{20}$.

Mais il faut faire attention d'abord que le produit en pain, dans la première expérience, a été moins avantageux, toute proportion gardée, par un peu trop de cuiſſon, que dans la ſeconde.

Il faut ſe rappeler enſuite que le prix intrinsèque de chacune des 1400 livres de pain de différente qualité, relatives à la première expérience, eſt monté à.......... $2^{ſ}\ 1^{d}\ \frac{4}{20}$,
au lieu que la valeur intrinsèque de chacune des livres de pain qui ſortoient des 1305 livres obtenues dans la deuxième expérience, n'a été qu'à 2. // $\frac{16}{20}$,

c'eſt-à-dire, à $\frac{8}{20}$ de denier de moins....... // // $\frac{8}{20}$.

Il eſt encore néceſſaire d'obſerver qu'il y a eu plus de pain bis, toute proportion gardée, dans les 1400 livres relatives à la première expérience, qu'il ne s'en eſt trouvé dans les 1305 livres du ſecond eſſai; que cette plus grande quantité de pain inférieur, & réduit à un bas prix, a occaſionné un rejet ſur le pain blanc de la première expérience de $1^{d}\ \frac{7}{20}$ plus fort par livre qu'il ne l'a été ſur le pain blanc du ſecond eſſai, & que cet excédant de $1^{d}\ \frac{7}{20}$, joint aux $\frac{8}{20}$ établis plus haut, ont formé les $1^{d}\ \frac{15}{20}$ dont la livre de pain blanc de la première expérience ſe trouve plus chargée que celle du pain abſolument pareil que nous avons obtenue dans le ſecond eſſai : cette explication nous a paru d'autant plus néceſſaire qu'on ne ſaiſit pas d'abord la raiſon d'une différence ſur le prix du pain blanc ſorti de nos eſſais, qui eſt le même abſolument quant à la qualité qui appartient aux farines du même ordre, & auquel il ſembleroit dès-lors qu'on auroit dû attacher une valeur égale.

Il réſulte de tous les détails que nous venons d'expoſer, 1.° que les 6 ſetiers de beau froment de 1781, peſant enſemble 1452 livres, ont donné en toutes farines par la mouture économique, 1096 livres, c'eſt-à-dire 7 livres au-delà des trois quarts de la quantité de blé employée; les trois quarts, en effet, n'auroient été qu'à 1089 livres; chaque

ſetier a donc rendu $1^{l}\frac{1}{6}$ de plus en farine qu'il n'y en auroit eu ſur le pied des trois quarts.

Il réſulte en ſecond lieu que les ſix ſetiers de blé médiocre de 1782, peſant enſemble 1375 livres 12 onces, n'ont donné par la même mouture que 1014 livres de farine, c'eſt-à-dire 17 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit tiré, ſur le pied des trois quarts du blé employé, puiſque ces trois quarts de produit en toutes farines auroient été à 1031 livres 13 onces.

Troiſièmement, que par la mouture à la groſſe, ſix autres ſetiers du même blé de 1781, peſant également 1452 livres, n'ont donné en toutes farines que 1071 livres, c'eſt-à-dire 18 livres de moins qu'on n'en auroit retiré ſur le pied des trois quarts de la quantité de blé employée, puiſqu'on vient de voir que ces trois quarts alloient à 1089 livres.

Quatrièmement, que ſix ſetiers de blé médiocre de 1782, peſant enſemble 1375 livres 12 onces, n'ont rendu par la même mouture à la groſſe que 997 livres en toutes farines, c'eſt-à-dire 34 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit retiré, ſur le pied des trois quarts de la quantité de blé employée, puiſque ces trois quarts auroient été, comme on a vu plus haut, de 1031 livres 13 onces.

Dès-lors on remarque d'abord que la mouture économique a un avantage ſenſible & ſoutenu ſur la mouture à la groſſe, tant pour le produit en farines, que pour la diſtinction de leurs qualités différentes, & une ſéparation plus exacte du ſon, dans la fleur de farine & dans le premier gruau; & cet avantage auroit été plus marqué ſans doute, ſi nous n'euſſions pas été attentifs à tirer de la mouture à la groſſe tout le parti qu'il eſt poſſible d'en eſpérer, en conſervant toujours aux trois ſortes de farine qu'elle peut donner, leurs qualités particulières & le degré de blancheur qui les diſtingue.

On voit enſuite qu'une quantité déterminée de livres de blé médiocre & imparfait à quelques égards, n'offre pas la même reſſource pour le produit en farine, qu'une quantité pareille de livres de blé d'élite & bien nourri, tel que celui

de 1781 que nous avons employé: on a obſervé en effet, que les 1375 livres 12 onces de blé médiocre de 1782, n'ont donné, en toutes farines, par la mouture économique, que 1014 livres, tandis qu'une même quantité de blé d'une bonne qualité, tel que celui de 1781, en auroit rendu par la même mouture, & ſur le pied des trois quarts en farine, la quantité de 1031 livres 13 onces, & même cinq ou ſix livres au-delà, par proportion à la quantité de 1096 livres de farine que nous avons obtenues par la même mouture économique, des 1452 livres de blé choiſi de 1781.

L'obſervation que nous venons de faire a lieu encore ſur les produits de la mouture à la groſſe; il eſt vrai que par cette mouture les 1452 livres de beau blé n'ont rendu que 1071 livres de farine, c'eſt-à-dire 18 livres de moins qu'elles n'en auroient rendu ſur le pied des trois quarts en farine de cette quantité de blé; mais les 1375 livres 12 onces de blé médiocre n'ont donné par cette même mouture, que 997 livres de farine, c'eſt-à-dire 34 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit tiré ſur le pied également des trois quarts en farine, de la quantité des grains employés.

On voit par cette obſervation à laquelle les deux méthodes de moudre les grains ont donné lieu, que le moins de peſanteur qu'on remarque dans une meſure quelconque de blé, tombe plutôt ſur les parties farineuſes du grain que ſur ſon écorce qui peut ſe trouver à peu-près la même dans du froment médiocre que dans d'autre de la meilleure qualité; qui doit même être plus multipliée, à raiſon d'une plus grande quantité de grains dans 240 livres du premier, par exemple, que dans 240 livres du ſecond; tandis qu'il eſt certain que celui-ci, le blé de la meilleure qualité, tire ſon augmentation de poids d'une plus grande abondance en parties farineuſes, & ſemble devoir rendre moins de ſon dans la mouture que celui où la farine eſt en moindre quantité; & cela prouve par des faits, comme nous l'avons déjà dit, qu'en général dans l'achat des grains, ceux qui ſont de la meilleure qualité, & par conſéquent plus chers,

dédommagent communément, par leur produit en belles farines, du prix plus fort qu'on en a donné, & procurent plus de bénéfice par la qualité du pain & sa quantité, qu'il n'en seroit résulté de grains médiocres & achetés moins cher.

Si on veut avoir le produit réuni, tant des six setiers du blé de 1781, que des six autres de 1782, on verra que ces deux quantités montent ensemble à 2827 livres 12 onces de blé d'une qualité moyenne; qu'elles n'ont donné que 2110 livres de farine par la mouture économique, c'est-à-dire, 10 livres 13 onces au-dessous des trois quarts de la quantité de blé employée. On observera encore que d'une même quantité de blé pareil, il n'est résulté, par la mouture à la grosse, que 2068 livres de farine, c'est-à-dire, 52 livres 13 onces de moins qu'il n'y en auroit eu par le produit des trois quarts du blé mis en expérience.

On remarquera en même-temps que si on eût converti en pain les 2110 livres de farine obtenues par la mouture économique, & que l'augmentation de poids se fût trouvée au sortir du four qu'on auroit bien conduit, de $\frac{5}{16}$ au-delà de la quantité de farine, on auroit eu 2769 livres 6 onces de pain; au lieu que les 2068 livres de farine sortie de la mouture à la grosse, n'auroient donné en pain, d'après nos deux expériences, que 2705 livres; c'est-à-dire, 9 livres 4 onces au-dessous de la quantité qu'on en auroit tirée sur le pied de l'augmentation de $\frac{5}{16}$ sur la farine employée.

Tous ces détails nous ont paru nécessaires pour juger à peu-près des produits auxquels on doit s'attendre dans un travail courant, soit relativement à la qualité des blés qu'on emploie, à la méthode de moudre les grains qu'on adopte, & à la quantité de farines différentes qu'on en retire; soit à l'égard du produit en pain qu'on peut espérer de l'emploi de ces farines, des variations qu'on remarque dans ce produit, par des causes qu'il est difficile d'écarter; soit enfin à l'égard du prix qu'on doit assigner au pain, en considérant tous ces points réunis, & en adoptant une base pour la taxe qui ne soit prise, ni dans des opérations parfaites dans les

deux arts de la Meunerie & de la Boulangerie, ni dans des opérations défectueuses jusqu'à un certain point, & qui s'éloignent un peu trop du degré de perfection dont ces deux Arts sont susceptibles.

L'application du résultat de nos expériences, & des observations qui en sont la suite, devant être faite au fond de la contestation qui s'est élevée à Rochefort sur la taxe du pain, & notamment sur l'essai qu'on y a fait en vertu d'un arrêt du Parlement, il convient que nous rapellions ici les tarifs connus depuis long-temps dans cette Ville, & que nous rapprochions les produits de nos expériences, de ceux qu'on a obtenus dans l'essai que le Parlement avoit ordonné.

Nous avons déjà eu occasion de parler du tarif de la Rochelle établi en 1700, qui, sur deux sacs de farine de fin ou gros minot, accorde 6^{l} aux boulangers pour les frais de main-d'œuvre, c'est-à-dire, 4 deniers $\frac{1}{2}$ par livre de pain, parce qu'il est supposé par ce tarif, qu'on ne tire des 260 livres de farine que 320 livres de pain, au lieu de 340 livres qu'il est possible d'en obtenir; c'est ce tarif dont les boulangers de Rochefort demandent l'exécution, & à laquelle paroissent se refuser les Officiers de Police de cette Ville.

Le tarif de 1703, adopté à Rochefort est au fond le même que celui de 1700, établi à la Rochelle, & ne demande aucune observation essentielle qui ne soit commune à tous les deux.

Mais il n'en est pas ainsi du tarif du 5 Avril 1709, qui fut réformé à Rochefort, & qui le fut par le Lieutenant général de Police même qui l'avoit rédigé en 1703.

La sentence de Police où est la clause qui déroge au tarif de 1703, avoit pour objet d'arrêter les abus que commettoient les boulangers dans un temps de disette, soit relativement aux farines d'une mauvaise qualité dont ils faisoient usage, soit à l'égard du poids du pain & de la forme inusitée qu'ils lui donnoient: ce n'est qu'à la suite de ce premier

motif de la ſentence qu'il eſt queſtion de la réforme du tarif du 18 Avril 1703, & que le Magiſtrat qui l'a rendue, s'exprime dans les termes que voici :

« Et ſur les remontrances qui nous ont été faites que le » tarif pour la livre de pain de chaque eſpèce, relativement » à celui des farines, étoit trop fort, nous en avons fait faire » un calcul nouveau en notre préſence, & calculé nous-mêmes » à combien elle doit revenir, par lequel on nous a fait re- » marquer, & nous avons reconnu par nous-mêmes qu'il y avoit » eu de l'erreur de deux deniers par chaque livre qui ont » été fixées à trop haut prix, la peine, la dépenſe & la façon » du boulanger préalablement déduites & précomptées ; ainſi » en rendant à chacun la juſtice qui lui eſt dûe, & pour l'intérêt » public, corrigeant ledit tarif du 18 Avril 1703, Nous » ordonnons que la livre de pain de chaque eſpèce demeurera » réduite & modérée à deux deniers au-deſſous de ce qui eſt » porté par ledit tarif: faiſons défenſes aux boulangers & pan- » netiers de la vendre au-delà de la préſente réduction, ſous les mêmes peines, &c. »

Nous aurions deſiré que le Lieutenant général de Police de Rochefort, qui ſe crut obligé de réformer, en 1709, ſon travail de 1703, eût dit un mot ſur ce qui avoit occaſionné ſon erreur, & l'avoit conduit à un faux calcul; l'aveu ſimple qu'il s'étoit trompé en 1703, quoiqu'il eût donné alors des baſes fixes, paroiſſoit demander qu'il revînt ſur ces baſes mêmes, & montrât en quoi elles ſe trouvoient mal établies: il ſemble, s'il eſt permis d'interpréter ici la manière dont ce Magiſtrat s'exprime, qu'il revient plutôt, dans ſa ſentence de 1709, ſur le prix des farines que ſur les frais de main-d'œuvre accordés aux boulangers par le tarif de 1703 ; il n'eſt pas à préſumer en effet que par une diminution de 2 deniers par livre de pain, il eût voulu enlever à ces boulangers les $\frac{4}{9}$ des frais de cuiſſon fixés par ce dernier tarif; & il y a toute apparence que ce retranchement tomboit ſur la valeur intrinsèque du pain qu'il regardoit comme portée trop haut par proportion à celle des grains; mais dans ce

cas-là

caſ-là même le tarif de 1703 qu'il abandonnoit ſans y faire aſſez d'attention, pouvoit lui ſervir de baſe pour aſſeoir avec équité la taxe du pain, puiſque le prix des deux ſacs de farine peſant enſemble 260 livres, s'y trouve établi depuis 10^{l} juſqu'à 42^{l}, & la valeur de la livre de pain depuis $1^{ſ}$ juſqu'à $3^{ſ}$; puiſqu'il lui étoit facile, dans la circonſtance où il ſe trouvoit, d'appliquer un des différens prix des farines portés dans ce tarif, à la valeur courante de ces mêmes farines; de donner par-là un appui certain à ſon règlement ſur cet objet de police, quels que fuſſent les changemens momentanés dont ce règlement pouvoit devenir ſuſceptible par la variation du prix des grains; puiſqu'enfin il avoit dans ſa main une règle fondée évidemment ſur l'équité, & faite autant pour éclairer le public ſur la juſte valeur du pain, que pour prévenir ou au moins arrêter bientôt, par la plus légère diſcuſſion, les plaintes des boulangers.

Quel que ſoit le motif qui ait déterminé le Magiſtrat de Rochefort à inſérer dans ſa ſentence du 15 Avril 1709, la diſpoſition par laquelle il affoiblit le tarif raiſonné de 1703, il nous paroît naturel de conclure, d'après ſes expreſſions, qu'en eſtimant les farines ſur le pied courant qu'elles ont, & en conſervant aux boulangers le prix des frais qu'on a jugé convenable, on peut fixer avec équité la valeur du pain, & rentrer dans les principes même du tarif auquel ce Magiſtrat avoit dérogé.

La conteſtation qui s'eſt élevée à Rochefort au ſujet de l'eſſai que les Juges d'Angoulême ont fait, en vertu d'un arrêt du Parlement, ſur le produit tant en farine qu'en pain d'une quantité déterminée de blé, cette conteſtation a donné lieu à la publication de pluſieurs Mémoires, où la matière eſt diſcutée amplement & miſe à peu-près dans tout ſon jour. Sur la requête que les Officiers de Police de Rochefort ont préſentée pour que l'eſſai dont il s'agit fût homologué au Parlement, les boulangers de cette Ville y ont formé une oppoſition ; les réſultats tirés de cet eſſai ont été vivement attaqués de leur part ; toute l'opération a

été analyſée, rapprochée même de celles qui, dans ce genre, ſont regardées par les gens de l'Art comme faites avec ſoin, & donnant tous les avantages auxquels il convient qu'on ſe borne pour ne pas augmenter les produits aux dépens de leur qualité.

L'Académie nous diſpenſera ſans doute de remettre ſous ſes yeux des détails qui pouvoient être néceſſaires dans le cours de ce procès, à la déciſion duquel on eſt attentif dans les Provinces, mais qui deviennent ſuperflus aujourd'hui après les éclairciſſemens qui ſont ſortis du choc de la diſcuſſion, qu'on a multipliés à meſure qu'on a produit de part & d'autre des moyens de défenſe, & qui ſe ſont étendus juſqu'aux erreurs de calcul, leſquelles, il eſt vrai, ont pu échapper aux intentions les plus droites, mais que les circonſtances & le fond même de la conteſtation, obligeoient de relever.

Nous nous bornerons donc à rappeler ici la quantité de froment qu'on a employée à Rochefort dans l'eſſai que le Parlement avoit ordonné qu'il y fût fait par les Juges d'Angoulême; la quantité de farine de différentes qualités qu'on a tirée de ce froment, celle du ſon qui eſt reſtée après l'opération de la bluterie, celle des déchets que la mouture des grains a occaſionnée, la quantité enfin de livres de pain de qualités différentes qu'on a obtenues de cette expérience, & qui en forment le réſultat eſſentiel.

On comprend ſous le nom *de pochée*, tant à la Rochelle qu'à Rochefort, trois boiſſeaux de blé, meſure de Marans: il a été employé pour l'eſſai dont il s'agit, neuf pochées de froment ou 27 boiſſeaux; ſavoir, 13 boiſſeaux & demi de blé de 1780, leſquels peſoient enſemble 709 livres 4 onces; & le même nombre de meſures en blé de 1781, dont le poids total étoit de 702 livres; ainſi l'expérience a roulé ſur 1411 livres 4 onces de froment d'une très-bonne qualité, puiſque le boiſſeau de Marans qui ne contient ordinairement que 50 à 51 livres de blé, s'eſt trouvé, dans

cette circonſtance-ci, en contenir 52 livres 4 onces 2 gros 26 grains.

Les 13 boiſſeaux $\frac{1}{2}$ du blé de 1780, ont donné, par la mouture à la groſſe, 603 livres 14 onces 4 gros de farines de différentes qualités,

	livres.	onces.	gros.
ci.	603.	14.	4.
Et les 13 boiſſeaux $\frac{1}{2}$ de 1781 ont rendu, par la même mouture,	598.	//	//
	1201.	14.	4.
La quantité de ſon que le blé de 1780 a produite, étoit de 94 liv. 3 onc. celle du ſon tiré du blé de 1781, étoit de 95. 10.	189.	13.	//
Les déchets n'ont été en total que de	19.	8.	4.
	1411.	4.	//

Les 1201 livres 14 onces 4 gros de farine ont produit en pain,

	livres.	onces.	gros.
de la première qualité	845.	12.	4.
de la ſeconde	441.	10.	//
de la troiſième	350.	13.	4.
	1638.	4.	//

On eſt étonné ſans doute d'un produit ſi conſidérable, tant en farines qu'en pain, & on ſent tout d'un coup qu'il n'a pu être obtenu, quant aux farines, que parce qu'on y a laiſſé introduire une grande quantité de menu ſon; & il paroît, quant au pain, qu'on ne lui a pas laiſſé prendre au four le degré de cuiſſon néceſſaire, ou que le ſon qu'il contenoit en abondance, & qui, par ſa nature, retient l'eau avec ténacité, a été la cauſe de l'augmentation de poids ſur le pain.

Le travail ordinaire des meilleurs meuniers de Paris, des environs, & même de tout le Royaume; le résultat de nos expériences, soit par la mouture économique, soit par la mouture à la grosse, doivent rendre encore plus frappant le produit qu'on a tiré à Rochefort de 1411 livres 4 onces de froment, quelque supérieur à tout autre en qualité qu'on le suppose, & quoiqu'il n'ait éprouvé qu'une perte médiocre dans l'opération du moulin & dans celle de la bluterie.

On n'auroit tiré à Paris de ces 1411 livres 4 onces de froment, par la mouture économique qui est la plus avantageuse,

	liv.	onc.	gros.
en farines de différentes qualités, que.	1058.	7.	4.
on auroit eu en gros & menu son...	322.	2.	4.
& en déchet, d'après ceux de notre expérience..........................	30.	10.	"
	1411.	4.	"
Si de la quantité de farine obtenue à Rochefort, & qui est de.........	1201.	14.	4.
on déduit les....................	1058.	7.	4.
de farines que la mouture économique auroit donnée à Paris, on aura en excédant de farine, ou plutôt de menu son qu'on y a confondu...........	143.	7.	"
Aussi pendant qu'à Paris on auroit eu en gros & menu son, la quantité de..	322.	2.	4.
on n'en a trouvé à Rochefort que....	189.	13.	"
c'est-à-dire la quantité en moins de...	132.	5.	4.

On vient de voir que les déchets par la mouture économique, sur les 1411 livres 4 onces de froment, auroient été à Paris de 30 livres 10 onces, pendant qu'ils n'ont été à Rochefort, comme on l'a observé précédemment, que de 19 livres 8 onces 4 gros: si à la quantité

Ci-contre	132$^{liv.}$	5$^{onc.}$	4^{gros}
de 132 livres 5 onces 4 gros qu'on auroit eue à Paris, en excédant de son, on ajoute les	11.	1.	4.
qu'on a eues de moins à Rochefort sur les déchets par comparaison avec ceux qu'on auroit éprouvés à Paris, lesquelles 11 livres 1 once 4 gros ont passé en nature de menu son dans les 1201 livres 14 onces 4 gros portées plus haut,			
alors on aura les	143.	7.	"

d'excédant en farine qui résultent de l'essai fait à Rochefort, & on reconnoîtra que ce surcroît de produit si éloigné de celui que tireroient, en pareille circonstance, des meuniers intelligens, auroit dû rester dans la classe des issues, loin d'entrer dans l'ordre des dernières farines qu'il n'a pu rendre plus abondantes qu'en altérant leur qualité.

De ce premier vice qui a eu son origine dans la bluterie; il en est résulté nécessairement un second, celui d'une augmentation sur le produit en pain, qui s'est trouvée telle que non-seulement ce produit a été fort au-delà du poids de la quantité de froment qu'on a employée dans l'essai, mais même que ce produit a été beaucoup plus loin que celui sur lequel les boulangers les plus attentifs pourroient tout au plus compter en convertissant en pain les 1201 livres 14 onces 4 gros de farine qu'on a obtenues à Rochefort.

On y a tiré des 1201 livres 14 onces 4 gros de farines, produites par les 1411 livres 4 onces de froment, la quantité de .... 1638$^{liv.}$ 4$^{onc.}$ de pain.

Les 1058 livres 7 onces 4 gros de farine seulement qu'on auroit obtenues à Paris de ces mêmes 1411 livres 4 onces de froment, n'auroient donné en pain sur le pied le plus favorable, qui est une augmentation des $\frac{5}{16}$ par l'addition de l'eau, que la

De l'autre part. . . . . 1638 livres 4 onces

quantité de . . . . 1389. 4.

la différence eſt donc de. . . . . 249. //

En ſuppoſant qu'on eût obtenu à Paris des 1411 livres 4 onces de froment, la quantité conſidérable de farine que préſente l'eſſai de Rochefort, on n'en auroit tiré en pain, ſur le pied également des $\frac{5}{16}$ d'augmentation, fourni par la combinaiſon de l'eau avec la farine, au lieu de. . . . . 1638. 4.

que . . . . 1577. 8.

Voilà donc au-delà de ces $\frac{5}{16}$ de plus qu'on doit regarder comme le point de perfection pour les boulangers, un ſurcroît de produit en pain obtenu à Rochefort, qui ſe trouve de 60. 12.

On aura une nouvelle preuve de ce dernier excédant de produit en pain comme porté au-delà du terme le plus avantageux en fait de boulangerie, lorſqu'on reviendra ſur les 143 livres 7 onces de menu ſon que nous avons dit être paſſées dans les farines de Rochefort, & qui ont été converties en pain. Ces 143 livres 7 onces de farine groſſière & très-biſe, n'auroient dû produire une augmentation ſur la maſſe totale du pain & ſur le pied des $\frac{5}{16}$ au-delà du poids de la farine, que. . . . . 188. 4.

Cependant on a remarqué qu'il y a une différence de 249 livres entre le produit plus fort en pain obtenu à Rochefort, & celui qu'on auroit tiré à Paris de la même quantité de froment; il faut donc qu'on ait porté, dans l'eſſai fait à Rochefort, la quantité de pain à. . . . . 60. 12.

249. //.

au-delà des $\frac{5}{16}$ d'augmentation ſur la maſſe totale de la farine, puiſque les 1201 livres 14 onces 4 gros adoptées pour un moment comme propres à être totalement converties en pain, n'auroient donné, ainſi que nous l'avons dit, ſur le même pied & à la rigueur que 1577 livres 8 onces, c'eſt-à-dire 60 livres 12 onces de moins qu'on n'en a obtenu à Rochefort.

Quelque frappé que l'on ſoit de la quantité de farine & de pain que préſente l'eſſai de Rochefort, & de la comparaiſon que nous en avons faite avec la quantité de produits du même ordre qu'on obtient communément par la mouture économique, on ſera encore un peu plus étonné de l'abondance des produits qui ſont réſultés de l'opération de Rochefort, lorſqu'on ſe remettra ſous les yeux celle de nos expériences pour laquelle nous avons eu recours à la mouture à la groſſe, comme cette mouture a eu lieu pour l'eſſai fait à Rochefort; & lorſqu'on verra que s'il a été employé par les Juges d'Angoulême du froment de la meilleure qualité, nous avons eu la même attention, puiſque le blé de 1781 qui a ſervi pour cette expérience avoit été choiſi daus ce deſſein, & peſoit 242 livres par ſetier de Paris.

On ſe rappelle ſans doute que les 6 ſetiers de froment de 1781, que nous employames, en les ſoumettant à la mouture à la groſſe, peſoient enſemble 1452 livres, & ont donné 1071 livres en farines de trois qualités différentes : nous n'avons porté qu'à 1400 livres le produit en pain ſur lequel on pouvoit compter couramment dans l'emploi de ces 1071 livres de farine, & nous nous ſommes bornés à ce produit, à cauſe des variations qu'il y a dans la cuiſſon du pain, & de la difficulté qu'on éprouve à régler parfaitement la chaleur du four; mais on peut ſuppoſer ici que les 1071 livres de farine ont rendu 1405 livres 11 onces de pain ſur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation dûe à l'eau qui s'y eſt combinée.

D'après cette expérience par la mouture à la groſſe, ſur du blé de la meilleure qualité, mouture qu'on a employée à Rochefort, 1411 livres 4 onces de froment, quantité miſe en expérience dans l'eſſai qu'on y a fait, n'auroient produit

en farines de trois qualités différentes que 1041 livres, ou à peu-près, & n'auroient rendu en pain ſur le pied le plus favorable, que 1366 livres 5 onces.

Voilà donc, d'après les réſultats bien précis de nos propres expériences, ce qu'auroient produit ſous nos yeux 1411 livres 4 onces de froment par la mouture à la groſſe employée auſſi à Rochefort; 1041 livres de farine, au lieu de 1201 livres 14 onces 4 gros; & 1366 livres 5 onces de pain, au lieu de 1638 livres 4 onces : voilà donc un excédant de poids ſur la farine de 160 liv. 14 onces 4 gros dans l'eſſai fait à Rochefort; & ſur la quantité de pain qu'on y a obtenue, un excédant de poids encore plus ſurprenant, celui de 271 livres 15 onces.

Les Officiers de Police de Rochefort deſirant de nous mettre à portée de bien connoître les trois ſortes de pain que les boulangers de cette ville ſont dans l'uſage d'y faire, la forme de ces pains, leur poids & leur qualité différente, ces Officiers ont fait prendre d'une manière légale & authentique, tant à la halle que dans la boutique de deux boulangers, une certaine quantité de ces différens pains, & nous les ont envoyés renfermés dans une caiſſe par la voiture publique, après nous avoir prévenus ſur cet envoi, & nous avoir adreſſé le procès-verbal fait à ce ſujet par M. Goulard, Conſeiller du Roi, & Commiſſaire de Police à Rochefort.

Ces pains ſont ou d'une livre, ou de 6 livres, ou de 12, ou de 20.

Ceux qui ne pèſent qu'une livre ou 6 livres, & qui ont une forme médiocrement longue, ſont de la première qualité, & connus ſous le nom de pain de *fin minot;* ceux dont le poids eſt de 12 livres, ſont de la ſeconde qualité, d'une forme ronde, & portent le nom de *pain de froment ;* on donne enfin à ceux qui pèſent 20 livres & qui ſont ronds également, le nom de *pain de méture*, c'eſt celui qu'on regarde, à juſte titre, comme du pain de la dernière qualité.

Nous ſommes obligés de convenir que ces trois ſortes de pain ſont très-inférieures à celles qu'on fait, nous ne diſons pas à Paris, mais dans pluſieurs endroits du Royaume. Le pain

pain de fin minot n'a ni la blancheur, ni la légèreté à laquelle on devroit s'attendre en le supposant tiré des farines de la première qualité. Le pain de la seconde & du poids de 12 livres, n'a pas également la nuance de blancheur que des farines du second ordre auroient dû lui laisser; & il est aisé de voir, au premier coup-d'œil, qu'il est passé beaucoup de menu son dans la farine dont il est composé. Quant au pain de *méture*, il est visiblement d'une mauvaise qualité, le son y est très-apparent, & il y a lieu de présumer que ce n'est qu'à la faveur du sel qui entre toujours dans le pain à Rochefort, que les différentes sortes de pain qu'on y fait ont une saveur qui supplée à ce qui leur manque d'un autre côté, & que le peuple y est moins attentif à la blancheur du pain, qu'il ne le seroit dans tout autre endroit où cette denrée de première nécessité n'auroit que sa saveur naturelle.

On sera moins étonné sans doute, que les Commissaires chargés par le Parlement de veiller à l'essai fait à Rochefort, aient laissé introduire une si grande quantité de menu son dans les farines qui ont été blutées sous leurs yeux, lorsqu'ils ont vu la qualité médiocre du pain de fine fleur de minot, comme nous en avons jugé nous-mêmes; lorsqu'ils ont considéré l'imperfection de celui qui est désigné sous le nom de *pain de froment;* lorsqu'ils ont été frappés sur-tout de l'état grossier du pain de *méture* dont le poids est de 20 livres, où le son domine, qui contient beaucoup de mie, & qui, par ces deux raisons, retient l'eau avec tant de ténacité, malgré un séjour assez long au four, qu'il reste dans un état pâteux & se moisit assez promptement. On peut donc présumer que ces Commissaires, à l'inspection de ces trois sortes de pain, & principalement de celle qu'on tire des farines les plus bises, ont cru pouvoir suivre une route qui leur étoit indiquée par l'état de la boulangerie à Rochefort, & ont été plus attentifs à l'abondance des produits qu'à leur qualité qui n'entroit pas, à proprement parler, dans l'objet de leur commission.

Mais combien ne devenoit-il pas essentiel cependant que les trois sortes de farines destinées dans leur essai à être

converties en pain, fuſſent d'une qualité convenable à leur deſtination ? & qu'en même temps qu'on auroit réſervé la fleur de froment pour le pain le plus délicat, & la farine un peu inférieure pour celui qu'on connoît à Paris ſous la dénomination de *bis-blanc*, ou ailleurs ſous le nom de *pain bourgeois*, on ne réduiſît pas celui de la troiſième qualité à n'être qu'un mélange d'un peu de farine avec beaucoup de menu ſon, & à ne devenir par-là qu'une nourriture auſſi groſſière que mal-ſaine pour le peuple qui, par une économie forcée, eſt ſouvent contraint de s'y borner.

On ne ſauroit trop s'occuper, nous en convenons, du ſoin de maintenir au prix le plus modique le pain que mangent le bas peuple, l'ouvrier chargé de famille, l'homme dénué de ſecours; mais ſi on ne tend à ce but qu'en les réduiſant à vivre de pain qui n'en a proprement que le nom, & dont la valeur eſt réglée ſur ſa mauvaiſe qualité, alors l'homme indigent achette le pain fort cher, quelque bas qu'en ſoit le prix; il le paye aux dépens de ſa ſanté, des forces dont il a beſoin, & en conſomme davantage, ſans y trouver un véritable aliment. A quelque prix que puiſſent monter les grains, il ſeroit à ſouhaiter que le pain de la troiſième qualité, dont les pauvres ſubſiſtent, fût auſſi bon en lui-même qu'il eſt poſſible de l'obtenir d'une mouture bien conduite, & d'une bluterie qui ne rend en toute farine que les trois quarts ou environ de la quantité de blé employée; que ce pain fût maintenu dans un prix modique, dans quelques circonſtances que ce fût, ſauf à faire ſupporter à l'homme qui vit dans l'aiſance, l'augmentation de prix que le pain du peuple auroit dû éprouver, dans la proportion exacte de la valeur des farines.

Lorſque nous diſons qu'en écartant des farines biſes, la trop grande quantité de menu ſon qu'une bluterie mal montée peut y laiſſer introduire, on a l'avantage d'en compoſer un pain aſſez ſubſtantiel, & qu'on mange quelquefois par goût; nous en avons la preuve dans les réſultats de nos expériences en fait de boulangerie : les farines de la première

qualité que nous avons obtenues par la mouture à la grosse, nous ont donné un pain excellent; celui que nous avons tiré des farines de bis-blanc, quoiqu'inférieur au premier pour la blancheur & la légèreté, avoit un peu plus de saveur, comme plus ferme & composé en partie de gruaux blancs; celui enfin, que nous avoient rendu les farines bises, étoit d'une bonne qualité, & telle qu'on pouvoit l'attendre d'un pain de cette espèce: sa couleur n'étoit pas trop bise, le son n'y dominoit pas, & il étoit absolument semblable à celui qu'on fait tous les jours à l'école de boulangerie, tant pour les prisonniers, que pour les pauvres mendians renfermés à Saint-Denys : ce dernier pain est composé de farines de la troisième & quatrième qualités qu'on obtient par la mouture économique, & auxquelles on joint une certaine quantité de farines blanches lorsque celles-là sont un peu trop bises, & feroient perdre au pain qui en résulteroit le ton de couleur, la nuance de bis qu'on a déterminée pour le pain des prisonniers : aussi celui que nous tirames de nos farines bises fut-il envoyé aux pauvres de Saint-Denys, & reçu dans ce dépôt comme aussi bon que celui qu'on est dans l'usage d'y distribuer.

En considérant les trois sortes de pain que nos expériences nous ont données, en les rapprochant de celles qui nous ont été envoyées de Rochefort pour nous faire juger de l'état de la boulangerie dans cette ville, combien ne sent-on pas la nécessité d'une mouture bien conduite, & d'une bluterie dans l'emploi de laquelle on soit plus occupé de la qualité des farines, & sur-tout des dernières qui sont la ressource du peuple, que de l'abondance des produits? Combien n'est-il pas évident que cette réserve dans l'usage de la bluterie, se trouve indiquée & prescrite, en quelque sorte par *les rougeurs* foncées des derniers produits? qu'elle tient, nous osons le dire, à un principe d'humanité, & ne tire presque à aucune conséquence pour le prix du pain le plus délicat que consomme la classe des gens aisés; tandis au contraire, que le soin de veiller à la bonne qualité des farines bises, dont le pain du peuple est composé, devient très-essentiel pour lui, & plus important

encore, que l'attention de maintenir à un bas prix l'aliment qui lui eſt deſtiné?

On ne ſauroit trop louer ſans doute le zèle des Officiers de Police qui veillent avec un eſprit d'équité à la taxe du pain, & qui ſavent ménager les intérêts du peuple ſans bleſſer ceux des boulangers; mais nous l'avouons, quand on a vu le pain qui ſe fait à Rochefort, on ſent vivement que cette vigilance doit s'étendre plus loin, & que la mauvaiſe qualité du pain, de celui ſur-tout dont le peuple ſubſiſte, doit autant exciter le zèle d'un Magiſtrat, que le prix trop haut auquel on tenteroit de porter le pain. L'homme opulent, le citoyen à ſon aiſe qui conſomment le pain blanc, peuvent s'en plaindre quelquefois; mais ils ont toujours la reſſource, en le payant un peu plus cher, d'exiger qu'il ſoit meilleur: au lieu que le bas peuple forcé de prendre celui auquel il ſe trouve réduit par état, l'achette tel qu'il eſt; s'en plaint auſſi quelquefois; mais faute d'une nourriture plus ſaine, il le conſomme, aux dépens peut-être de ſa ſanté dont il eſt peu occupé pour l'ordinaire, parce qu'il l'eſt trop de ſes beſoins.

C'eſt donc ſur le pain deſtiné à cette claſſe d'hommes livrée au travail, & dont la vigueur fait la ſeule richeſſe, que doivent tomber les regards des Officiers de police; la plus belle de leurs fonctions eſt de concourir à la conſervation des hommes qui portent le fardeau le plus peſant de la ſociété: en rempliſſant un devoir ſi honorable, ils auront droit & à la reconnoiſſance du peuple dont ils auront pris les intérêts, & à l'eſtime des citoyens dans l'aiſance, qui ſauront qu'en payant leur pain un peu plus cher, ils ont contribué à rendre meilleur celui du peuple, ſans que ce pain d'une meilleure qualité ait reçu la moindre augmentation ſur le prix modique qu'on y avoit d'abord attaché.

Après tous les details dans leſquels nous a obligés de deſcendre l'importance de la matière dont nous ſommes ici occupés, & le deſir de répondre par un compte fidèle de notre travail, à la confiance dont le Parlement honore l'Académie, il ne nous reſte plus qu'à rappeler, dans un expoſé

ſommaire, les produits en farine que nous avons obtenus des blés mis en expérience, & traités tant par la mouture économique que par la mouture à la groſſe; qu'à remettre auſſi ſous les yeux les produits en pain que nous avons tirés des farines ſorties de cette même mouture à la groſſe: qu'à ſuppoſer un mélange du beau blé de 1781 avec celui de 1782 qui étoit d'une qualité inférieure, afin d'en faire réſulter un produit commun, & tel qu'on pourroit l'obtenir de 12 ou de 24 ſetiers de blé médiocre, ou qui au moins ne ſeroit pas regardé comme appartenant à *la tête des blés;* qu'à établir la valeur du pain de différentes qualités, d'après la quantité de livres qu'en rend pour l'ordinaire une quantité déterminée de blé; à rapprocher enfin les tarifs dont il a été déjà queſtion, des valeurs que nous aurons établies comme propres à conduire à une baſe de taxe qui n'aura rien d'arbitraire, dans laquelle le prix intrinsèque des grains ſera diſtingué de celui de la main-d'œuvre, & où la valeur de la livre du pain de trois qualités différentes ſera toujours annoncée par celle des farines tirées des endroits dans leſquels ce commerce utile eſt établi, ou par celle des grains vendus dans les marchés publics.

Nous avons dit qu'on tire communément par la mouture économique, d'une quantité déterminée de livres de blé, les trois quarts ou à peu-près en farines de différentes qualités; mais qu'on n'obtient pas tout-à-fait le même avantage par la mouture à la groſſe, quand on deſire avoir des farines bien diſtinctes pour leurs qualités, & de ne pas ſurcharger les dernières par une trop grande quantité de menu ſon.

Nous avons fait obſerver également que le point de perfection reconnu juſqu'ici dans l'art de la Boulangerie, étoit d'obtenir en pain blanc de 4 livres ou environ, les cinq ſeizièmes au-delà de la quantité de farine employée; car on s'attendroit en vain à cette augmentation ſur une fournée de pains d'une ou de deux livres, à moins que l'excédant de pâte toujours néceſſaire & relatif, tant à la forme qu'au poids du pain qu'on veut faire, n'eût été proportionné à la grande

perte que des pains de deux & ſur-tout d'une livre éprouvent conſtamment au four.

Les 6 ſetiers de blé de 1781, que nous avons employés dans nos expériences, comme étant de la meilleure qualité, peſoient enſemble 1452 livres, & ont rendu par la mouture économique 1096 livres de farines différentes, c'eſt-à-dire 7 livres au-delà des trois quarts de la quantité de blé ſoumiſe à cette mouture.

Les ſix ſetiers de blé médiocre de 1782, peſant enſemble 1375 livres 12 onces, traités par la même mouture, n'ont produit en farines différentes que 1014 livres, c'eſt-à-dire 17 livres 13 onces au-deſſous des trois quarts du poids de ces ſix ſetiers de blé inférieur.

Les produits n'ont plus été les mêmes dans la mouture à la groſſe, quoique ſortis de blés pareils, & d'un poids égal; 1452 livres de blé de 1781, n'ont rendu en farines que 1071 livres, & par conſéquent 25 livres de moins que nous n'en avons tiré d'une quantité égale de blé pareil, à la faveur de la mouture économique, & par conſéquent encore 18 livres au-deſſous des trois quarts de cette même quantité.

Nous n'avons obtenu par cette même mouture, des 1375 livres 12 onces de blé médiocre, que 997 livres de farine, c'eſt-à-dire 34 livres 13 onces au-deſſous des $\frac{3}{4}$ de cette dernière quantité de blé, & 17 livres de moins que 1375 livres 12 onces, également de blé médiocre, n'en ont rendues par la mouture économique.

Il eſt bien conſtant d'abord, d'après cet expoſé, que la mouture économique a des avantages ſur la mouture à la groſſe : ils auroient été plus ſenſibles, ſi nous n'euſſions pas tâché dans nos expériences de tirer le parti le plus utile de cette dernière mouture, & de la rapprocher de la première, en conſervant aux farines biſes la meilleure qualité qu'elles puiſſent avoir.

L'emploi que nous avons fait d'une grande partie des 1071 livres de farines ſorties des 1452 livres du blé de 1781, & les produits en pain que nous en avons obtenus,

nous ont conduits à établir des résultats proportionnels, en admettant l'emploi de toutes ces farines : nous avons vu, en conséquence, que prises en total, elles auroient donné 1400 livres de pain ou environ, en supposant néanmoins que la chaleur du four auroit été mieux ménagée qu'elle ne l'a été dans la première expérience; qu'on auroit saisi à peu-près le degré de cuisson qui convient au pain, comme on l'a fait dans la seconde expérience : & encore avec une telle attention n'auroit-on pas eu dans cette dernière quantité de pain toute celle qu'on auroit pu espérer, puisque ces 1071 livres de farine auroient donné jusqu'à 1405 livres 11 onces de pain, sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation.

L'emploi que nous avons fait également d'une grande partie des 1014 livres de farine, tirées des 1375 livres 12 onces du blé médiocre de 1782, nous fait juger aussi par une comparaison exacte de la quantité de pain que la totalité de ces farines auroit donnée ; cette quantité n'auroit pas été loin du produit le plus avantageux ; elle auroit été de 1305 livres de pain, c'est-à-dire, de 3 livres 9 onces seulement au-dessous du produit de ces farines, sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation.

Si on veut supposer le mélange des six setiers de blé de la meilleure qualité, avec les six autres d'une qualité inférieure, pour avoir les produits d'un blé moyen, alors le poids des douze setiers sera de 2827 livres 12 onces, ils rendront suivant nos expériences par la mouture économique, 2110 livres de farines différentes, & pourront donner sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation 2769 livres 6 onces de pain, tandis que d'après ces mêmes expériences & par la mouture à la grosse 12 setiers de blé d'un poids égal & d'une qualité pareille, ne rendront que 2068 livres de farine & 2705 livres de pain, c'est-à-dire 64 livres 6 onces de moins en pain qu'il n'en auroit été obtenu par la mouture économique des 2827 livres 12 onces de blé moyen.

La différence auroit été encore plus marquée, si, par l'avantage attaché à la mouture économique, on eût tiré, comme on le fait communément, les trois quarts en farine

de cette quantité de blé moyen, ils auroient été à 2120 livres 13 onces, & il en feroit forti, par une opération bien faite de boulangerie 2783 livres 9 onces de pain; au lieu que dans la mouture à la groffe, nous n'avons annoncé le produit en pain que de 2705 livres, & qu'il n'auroit été tout au plus que de 2714 livres 4 onces par une opération de boulangerie faite avec foin également, & dans laquelle on eût obtenu le plus grand produit qu'il eft poffible d'efpérer.

De l'expofé fidèle de toutes nos opérations dont il convenoit que la chaîne ne fût pas interompue, ou ne le fût que par les obfervations que la circonftance pouvoit exiger, nous nous trouvons conduits à l'application des faits principaux que nous avions à conftater, que nous avons reconnus, & qui doivent nous fervir de règle pour bien déterminer la valeur du pain en la faifant fortir, & de celle du blé ou des farines, & de celle des frais de main-d'œuvre confidérés féparément.

Il eft conftant d'abord, par le réfultat de nos expériences qui cadre avec tout ce qui eft connu fur les opérations de la meunerie, que la mouture économique a un avantage réel fur la mouture à la groffe pour la quantité du produit en farines de différentes qualités; qu'elle en a un également pour la diftinction plus exacte de ces farines, & la meilleure qualité des dernières; que d'une quantité déterminée de blé on tire plus de parties farineufes par la première de ces moutures, & qu'on les obtient mieux féparées du fon, qu'on ne le fait par la feconde; & que dans la fuppofition où d'une certaine quantité de froment on obtiendroit par l'une & l'autre moutures un produit égal en poids, l'égalité ne régneroit pas dans les farines pour la qualité; de manière que le fon refté de la mouture à la groffe receleroit plus de parties farineufes & vraiment nutritives, que celui qui auroit été retiré de la mouture économique; & que le produit en farine de la première de ces moutures ne deviendroit égal en poids à celui de la deuxième, qu'à la faveur du fon atténué

qui

qui s'y ſeroit introduit, en laiſſant dans les iſſues plus groſſières, les parties farineuſes, les portions de gruaux blancs que ce menu ſon repréſenteroit, pour le poids, dans la maſſe de farine que le blé auroit rendue.

On a déjà obſervé dans le courant de ce Mémoire, que le produit en farine ſur lequel les meuniers comptent pour l'ordinaire, & qui eſt aſſez conſtant dans la mouture économique, va aux $\frac{3}{4}$ ou à peu-près du poids du blé mis en expérience; mais que ce produit eſt plus foible (toutes choſes égales d'ailleurs) & plus ſujet à varier dans la mouture à la groſſe.

Il eſt certain, en ſecond lieu, qu'il y a beaucoup de précautions à prendre dans les opérations de boulangerie, pour que le pain ſoit fait d'une manière convenable à celui qui l'achette, & utile en même-temps à celui qui le débite; que le plus grand produit à cet égard, & en ſuppoſant le boulanger fidèle, dépend de pluſieurs choſes dont la pratique ſeule peut bien inſtruire, & ſur leſquelles l'ouvrier le plus intelligent ſe trouve quelquefois en défaut; que ce produit plus ou moins abondant tient à la nature des farines, à l'état plus ou moins ſec dans lequel on les emploie, à la propriété qu'elles ont d'abſorber plus ou moins d'eau, aux farines de la première qualité qui donnent le pain le plus délicat, & borné communément à un poids aſſez foible; qu'il tient encore à l'état des farines plus ou moins biſes, à la forme des pains, à leur poids, au degré de cuiſſon que chaque ſorte exige, à la perte qu'il font conſtamment au four, & qui eſt inégale, malgré tout ce qu'on peut faire en ſubdiviſant avec exactitude une maſſe de pâte bien préparée, pour obtenir l'égalité dans le poids d'une certaine quantité de pain; ce produit tient enfin, on l'a remarqué dans une de nos expériences, au ſéjour du pain dans le four, de quelques minutes trop long; & c'eſt ſans doute ici le point le plus délicat pour un boulanger qui peut perdre, nous le ſavons, par une diſtraction légère 15 ou 20 livres de pain ſur une fournée de 300 livres ou environ, à laquelle il s'attendoit: cette perte ne ſe trouve déterminée que d'une manière relative,

c'eſt-à-dire, qu'après avoir reconnu par l'expérience & par une ſuite d'opérations bien faites, qu'une certaine quantité de farine d'une bonne qualité, convertie en pâte & ſubdiviſée en pains de 4 livres qui portent un excédant de pâte que l'uſage a fixé, après avoir vu, diſons-nous, qu'on tiroit en pains de cette quantité de farine les $\frac{5}{16}$ au-delà de ſon poids, on a regardé cette augmentation de produit comme un point de perfection dans le travail auquel un boulanger intelligent pouvoit atteindre, ou dont au moins il devoit peu s'écarter.

Si on rapproche actuellement les réſultats de l'eſſai qu'on a fait à Rochefort, de ceux ſur leſquels ſeulement on peut compter, en adoptant les baſes que nous venons d'établir, combien ne différeront-ils pas de nos produits ordinaires, & ne feront-ils pas ſentir les abus qui naîtroient du mélange d'une grande quantité de menu ſon dans les dernières farines, & l'inconvénient qu'il y auroit à tirer de ces farines le pain du bas peuple qui l'achetteroit toujours trop cher, quelque modique qu'en fût le prix? On ſe rappelle ſans doute ce qui a été dit plus haut ſur les réſultats de l'eſſai de Rochefort: on y a obtenu de 1411 livres 4 onces de blé, par la mouture à la groſſe, 160 livres 14 onces 4 gros de farine de plus que nous n'en aurions tiré par la même mouture, & 271 livres 15 onces de pain au-delà de la quantité que nous en aurions retirée, ſur le pied le plus favorable, de 1411 livres 4 onces également de blé choiſi comme l'avoit été celui de Rochefort.

On voit donc, au premier coup-d'œil, qu'un eſſai où l'on s'éloigne autant des produits connus, ne ſauroit ſervir de règle pour aſſeoir la taxe du pain, & qu'il faut en chercher la baſe dans des réſultats de mouture & de boulangerie ſur leſquels on eſt par-tout aſſez d'accord. Le tarif de la Rochelle établi en 1700, & celui de 1703 adopté à Rochefort, préſentent cette baſe, ils peuvent être remis en vigueur avec quelque changement qu'exige la mouture perfectionnée; & ſortis il y a plus de quatre-vingts ans de ces deux villes, ils peuvent encore y ſervir de règle aujourd'hui, & aplanir les difficultés qui s'y ſont élevées.

Si la mouture économique ne faisoit pas autant de progrès qu'on le remarque tous les jours, & ne donnoit pas lieu de présumer qu'elle s'étendra bientôt par-tout, peut-être seroit-il nécessaire d'avoir égard, dans la confection d'un tarif, au moindre produit que donne la mouture à la grosse, & à l'augmentation légère qui en résulte sur le prix du pain; mais cette dernière mouture, on le sait, ne donne pas des produits en farine aussi constans qu'ils le sont dans la mouture économique, & cependant il s'agit d'établir une règle qui doit être fixe, au moins pendant long-temps, à laquelle il est presque toujours dangereux de porter atteinte, & qui demande la plus grande réserve, dans la nécessité même d'y faire quelque changement. Nous croyons donc qu'il convient de prévoir des résultats meilleurs & plus constans dans la mouture, que ceux qu'on obtient dans plusieurs provinces; de supposer avec fondement qu'on parviendra dans la suite avec des attentions & par le moyen de bluteries bien montées, à tirer en farines les $\frac{3}{4}$ du poids du blé qu'on aura fait moudre: nous y sommes parvenus nous-mêmes dans un essai sur une petite quantité de froment qui n'a été soumise qu'à une seule opération du moulin, mais pour laquelle les meules ont été rapprochées & mises au point que l'exige la manière de moudre les grains, qui est connue des gens de l'Art, sous le nom de *mouture en boulange :* il est vrai que le degré de blancheur des trois sortes de farines n'y étoit pas tranché aussi-bien qu'on l'auroit remarqué dans des farines sorties de la mouture économique; mais il s'agissoit plus dans cette expérience de la quantité des produits dans de certaines bornes, que d'une distinction bien exacte pour la qualité de chacun de ces produits.

Il y a lieu de présumer encore qu'un tarif, dans lequel on supposera le produit en farines dont nous parlons, rendra les boulangers plus vigilans sur le poids & la qualité des farines qui leur seront rendues par les meuniers, & que l'industrie qui fera desirer l'établissement de la mouture économique, réveillée de deux côtés, justifiera bientôt le tarif sur le produit à cet égard d'une quantité de froment d'un poids déterminé.

D'ailleurs nous pouvons assurer que dans un essai fait depuis peu à Rochefort, sur 3 pochées de froment ou 9 boisseaux, mesure d'Aligre, essai dont on nous a envoyé le détail, & dans lequel on auroit pu avoir quelque intérêt à nous déguiser la vérité en diminuant les produits, on annonce pour celui des farines les $\frac{3}{4}$ ou environ, du froment employé, & pour le produit en pain, les $\frac{5}{16}$ ou à peu-près, au-delà du poids de ces farines.

Il paroît donc que nous pouvons proposer comme bases principales d'un tarif, les produits tant en farines qu'en pain que nous venons de déterminer, & sur lesquels les boulangers de Paris se trouvent d'accord : il est une autre base indépendante des deux premières qu'il faut établir en la considérant à part & sans aucune relation au prix des grains, c'est celle qui concerne le prix de la main-d'œuvre & le juste bénéfice que le boulanger doit recueillir : il lui est accordé 6^{l} par le tarif de la Rochelle, pour la conversion en pain de 260 livres de farine achetées à la halle en cet état, ou tirées du blé que ce boulanger aura fait moudre, & dont la farine brute aura été blutée chez lui.

Ce même tarif suppose qu'on ne retire de ces 260 livres de farine que 320 livres de pain, puisqu'il en fixe le prix à 2^{f}, par exemple, & tous frais faits, quand cette quantité de farine vaut 32^{l}.

Mais nous avons fait observer qu'elle peut donner 340 livres de pain; les $\frac{5}{16}$ d'augmentation sur le poids de la farine porteront même, dans la rigueur, le produit en pain à 341 livres $\frac{1}{4}$: on peut se borner à la première de ces quantités sur laquelle même on ne pourroit pas compter, si on convertissoit une grande partie de la farine en petits pains : les 6^{l} accordées aux boulangers par le tarif de 1700, pour l'emploi de 260 livres de farine, étant réparties sur les 340 livres de pain, établiront les frais de main-d'œuvre pour chaque livre de pain sur le pied de $4^{d}\,\frac{4}{17}$, ou à très-peu-près de $4^{d}\,\frac{1}{4}$.

La charge de farine nommée *fin minot*, vaut, dans le moment où nous rédigeons ce rapport, à la halle de Marans

où les boulangers de Rochefort sont dans l'usage de faire leur provision, 40^{l} 3^{f}, en y comprenant quelques frais auxquels ils sont tenus avant que leurs farines soient rendues à Rochefort; cette charge de farine est composée de deux sacs qui en contiennent chacun 130 livres.

Qu'on suppose actuellement qu'un boulanger de cette Ville veuille employer 4 charges & $\frac{1}{6}$ de fin minot, ou à peu-près 1084 livres de farine, elles lui coûteront en total 167^{l} 5^{f} 10^{d}, sur le pied de 40^{l} 3^{f} la charge; il en tirera 1417 livres de pain, dans le rapport de 260 livres de farine à 340 de pain: la valeur intrinsèque de chaque livre de pain de la première qualité, sera d'abord par conséquent de 2^{f} 4^{d} $\frac{4}{12}$, & quand on y aura joint 4^{d} $\frac{3}{12}$ pour les frais de main-d'œuvre, elle montera à 2^{f} 8^{d} $\frac{7}{12}$; voilà le prix de la livre de pain tirée des farines de la première qualité, prix égal pour chaque livre, comme sorties toutes de fin minot; tandis que celles dont nous allons parler sortiront des produits différens de la mouture, & auront une valeur proportionnée à leur qualité.

28 boisseaux, mesure de Marans, & pris dans cette Ville, contiendront 1452 livres de beau blé, sur le pied de 51 livres $\frac{7}{8}$ le boisseau, & coûteront 147^{l}, en les supposant chacun du prix de 5^{l} 5^{f}, avec les menus frais qu'exige le transport; on pourroit en tirer, à la rigueur & sur le pied des $\frac{3}{4}$ du poids du blé 1089 livres de farine; mais on bornera ici ce produit à 1084 livres, pour le faire marcher de pair, quant au poids, avec celui de 4 charges $\frac{1}{6}$ de fin minot dont il vient d'être question: cette quantité de farine donnera également, dans le rapport de 260 à 340 livres, 1417 livres de pain, dont la valeur intrinsèque pour chaque livre sera de 2^{f} $\frac{10}{12}$, & montera à 2^{f} 5^{d} $\frac{1}{12}$, en y réunissant les 4^{d} $\frac{3}{12}$ dont on est convenu pour les frais de main-d'œuvre; mais ce prix de la livre de pain, qui est trop fort pour une partie d'elles, ne l'est pas assez pour une partie d'autres; il faut donc, en conservant la valeur totale du pain, retrancher d'un côté, dans des vues de justice & d'intérêt pour le peuple, ce qui doit être porté en augmentation sur un autre, par des

vues également justes, & auxquelles ceux qui consomment le pain le plus délicat ne sauroient se refuser.

Dans les 1417 livres de pain dont il s'agit ici, on peut, par une estimation générale seulement, & qu'il seroit difficile de faire avec quelque précision pour les produits que donne la mouture à la grosse, on peut supposer 945 livres de pain comme tirées des farines de la première qualité, 272 livres comme obtenues de celles de la seconde, & 200 livres dans lesquelles il n'est entré que des farines bises.

Suivant un grand nombre d'ordonnances de police pour la taxe du pain, qu'on a rendues depuis quelque temps à Rochefort, & dont plusieurs sont sous nos yeux, la livre de pain de la seconde qualité, qu'on y nomme *pain de froment à sa fleur*, est taxée à $2^{s}\ 2^{d}$; & celui de la troisième, connu sous le nom de *pain de meture*, y est fixé à un sou 5^{d} la livre: nous conserverons ces deux prix pour le pain de la seconde & sur-tout de la troisième qualité, dans le calcul qui va suivre, afin de nous écarter le moins qu'il sera possible des principes de la taxe favorable au peuple, qu'on adopte à Rochefort.

On a vu que chacune des 1417 livres de pain dont nous venons de parler, revenoit, tous frais faits & sans aucune distinction pour la qualité, à $2^{s}\ 5^{d}\ \frac{1}{12}$; dès-lors il faut que les 272 livres de pain de la seconde qualité, qui font partie des 1417 livres, descendent chacune au prix de $2^{s}\ 2^{d}$, & perdent $3^{d}\ \frac{1}{12}$; & que chacune des 200 livres de la troisième qualité soit déchargée d'un sou $\frac{1}{12}$: la totalité des deniers qu'on aura ainsi soustraite de la valeur des pains de la seconde & de la troisième qualité, ira à 3255 deniers, lesquels, répartis sur les 945 livres de pain de la première qualité, dont le prix primitif étoit de $2^{s}\ 5^{d}\ \frac{1}{12}$ par livre, y produiront une augmentation de $3^{d}\ \frac{6}{12}$ ou à peu-près, & feront monter la valeur de cette livre de pain de la première qualité à $2^{s}\ 8^{d}\ \frac{7}{12}$.

Ce dernier prix est pareil, comme on le voit, à celui de toutes les livres de pain obtenues plus haut des charges de

ſarine de fin minot, par la raiſon que les 945 livres de pain dont il s'agit dans ce moment ſortent de farines de la première qualité, & doivent avoir chacune un prix égal à celui de la livre de pain tirée des farines de la plus belle qualité, & déſignées à Rochefort, ſous le nom de *fin minot.*

Le tarif de la Rochelle établi en 1700, & pris à la lettre, feroit monter la livre de pain de la première qualité à $1^{d}\ \frac{1}{2}$ de plus que nous ne venons de la fixer; ſur le pied en effet du prix de 40^{l} pour 260 livres de fin minot, auquel on doit ajouter 6 livres pour les frais de main-d'œuvre; on voit dans ce tarif que la livre de pain iroit à $2^{f}\ 10^{d}$, elle devroit même aller à $2^{f}\ 10^{d}\ \frac{1}{2}$ juſtes, d'après les baſes de ce tarif, ſi on n'y eût pas négligé la fraction; & alors on remarquera que le prix plus haut de la livre de pain que nous avons déterminé, eſt plus foible de deux deniers que celui qui réſulteroit ſtrictement des principes de ce tarif.

Tels ſont les réſultats qui, conformes à ceux qu'on a obtenus juſqu'ici, naiſſent de nos expériences particulières & des obſervations dont elles ſont accompagnées: ces réſultats s'éloignent peu de ceux qu'on tireroit d'après le tarif de 1700 que les boulangers de Rochefort deſireroient qu'on adoptât, mais que leur Art, ainſi que celui du meunier, mieux conduits aujourd'hui qu'ils ne l'étoient à la naiſſance de ce tarif, nous ont donné lieu d'interpréter avec raiſon ſur le produit en pain qui s'y trouve déterminé: ils s'éloignent peu auſſi, en général, de la règle que les Officiers de police ont ſuivie juſqu'ici à Rochefort, pour la taxe du pain, ſans qu'on voie qu'ils aient déduit cette règle des principes fixes d'un tarif, de la valeur intrinsèque du pain, & de celle des frais de main-d'œuvre priſe ſéparément & toujours conſtante, quelles que ſoient les variations de la valeur des grains.

Si le travail que nous venons d'expoſer, ſi l'uſage ſur-tout que nous y faiſons avec modération du tarif de la Rochelle, méritent que le Parlement y ait égard, & qu'il ordonne,

en conſéquence, l'exécution de ce tarif, dont les baſes trop favorables peut-être aux boulangers dans le temps où il a été fait, ne paroiſſent aujourd'hui que bien établies par l'augmentation de prix que tout a éprouvé depuis plus de quatre-vingts ans, cette déciſion produira ſans doute quelques avantages, celui en premier lieu d'aplanir les difficultés qui ſe ſont élevées à Rochefort au ſujet de la taxe du pain, & y ſubſiſtent au milieu de trois tarifs, dont il ſemble qu'il ne s'agiſſoit que d'appliquer les diſpoſitions aux circonſtances où l'on ſe trouvoit : l'utilité qui pourra réſulter en ſecond lieu, de la déciſion du Parlement, ſera l'établiſſement d'une baſe pour la taxe du pain, qui n'aura rien d'arbitraire, ſur-tout à l'égard des frais de main-d'œuvre, ſi ſuſceptibles de diſcuſſion, mais qui réglés une fois avec équité n'exigeront pas ſitôt de changement; & diſtingués avec ſoin dans ce tarif, ils ſeront toujours un objet iſolé dans la taxe du pain.

Dans la plupart des conteſtations qui naiſſent en Province au ſujet du prix de la livre de pain, & qui deviennent plus générales dans ce moment-ci à l'occaſion de celle qui a éclaté à Rochefort, on ne s'accorde point ſur le produit en farine qu'on peut obtenir d'une quantité déterminée de blé, ſur celui qu'on peut tirer en pain d'une quantité fixe de farine, & encore moins, tant ſur la dépenſe à laquelle un boulanger eſt tenu, que ſur le bénéfice convenable qu'il eſt en droit d'attendre de ſon travail.

On a remarqué dans les calculs établis plus haut, qu'on pouvoit compter à peu-près ſur 1084 livres de farine, comme tirées de 1452 livres de blé, & ſur 1417 livres de pain, comme produites par cette quantité de farine. Nous ne parlons point ici de meſures quelles qu'elles puiſſent être, & qui, conſtantes en elles-mêmes, offrent des variations fréquentes pour le poids du blé qu'elles contiennent, relativement à la qualité dont il eſt; nos calculs partent toujours du poids déterminé d'une certaine quantité de grains; & quoiqu'il ſoit poſſible que 100 livres d'une ſorte de blé donnent

donnent un peu plus de farine qu'une autre ſorte de blé d'un poids pareil n'en rendroit; cependant il convient, dans un calcul général, de prendre pour point fixe le poids du grain, parce que les différences légères diſparoiſſent dans des opérations de la nature de celle-ci, où les produits ne ſont jamais rigoureux. Ainſi, en ſuppoſant qu'on peut obtenir une certaine quantité de farine d'une quantité déterminée de blé, on ſe trouve conduit à admettre avec aſſez de fondement le même produit d'une quantité de blé parfaitement égale, & il n'y a point d'erreur eſſentielle à craindre dans les conſéquences qu'on peut tirer à cet égard.

Il n'en eſt pas de même abſolument du produit en pain qu'il eſt poſſible d'obtenir d'une certaine quantité de farine; il tient à l'état de ſéchereſſe ou d'humidité des farines avant qu'on les emploie, & à l'attention du boulanger dans la conduite du four; mais en ſuppoſant, comme nous l'avons fait, que 260 livres de farine donnent 340 livres de pain de 4 livres, & que c'eſt une des baſes du tarif, nous ſuppoſons auſſi un boulanger attentif, ou, pour ſes propres intérêts, nous l'obligeons à le devenir.

Les boulangers de Rochefort repréſenteront peut-être qu'ils ſont dans l'uſage de faire une grande quantité de pains d'une livre & de la première qualité; que la pâte ainſi ſubdiviſée & plus légère que celle des pains inférieurs, perd beaucoup de ſon poids au four; qu'elle y diminue en raiſon des ſurfaces multipliées qu'elle y préſente, & qu'alors il ne leur eſt pas poſſible de retirer de 260 livres de farine la quantité de livres de pain que nous annonçons.

Mais on peut leur répondre, que s'il leur eſt onéreux de faire des pains d'une livre, ils ont l'avantage d'en pouvoir débiter qui pèſent 6 livres & qui ſortent des farines de la première qualité; qu'ils emploient en pains de 12 livres les farines d'une qualité inférieure; qu'ils réſervent les farines biſes pour des pains de 20 livres; & que par-là il ſe fait une ſorte de compenſation dans le poids des différens pains, ſi même il n'y a pas moins de perte ſur le pain de la première qualité,

qu'il n'y a d'excédant de poids ſur celui de la ſeconde, ou au moins ſur le pain bis de 20 livres, comme plus compacte que les deux autres, & plus capable de ſe maintenir dans une certaine humidité après avoir ſouffert toute la chaleur du four.

Dans la diſtinction des trois ſortes de farines que nous avons conſidérées comme ſorties des 1452 livres de blé, nous n'avons porté qu'aux deux tiers de 1084 livres, total de ces farines, celles de la première qualité; & en partageant l'autre tiers en deux parties, nous avons établi le poids de l'une qui regardoit les farines de la ſeconde qualité, comme devant être plus fort que celui de l'autre partie du tiers qui regardoit les farines biſes ou de la troiſième qualité.

Si nous nous fuſſions réglés pour ce partage ſur les produits de la mouture économique, nous aurions porté juſqu'aux trois quarts du total des farines, & même un peu au-delà, celles qu'on auroit pu ranger dans l'ordre des farines de la première qualité; le quart qui ſeroit reſté en farines inférieures, auroit été diviſé auſſi en deux parties, & l'auroit été de manière que le poids de l'une, relative aux farines qu'on déſigne ſous le nom de *bis-blanc*, ſe ſeroit trouvé auſſi un peu plus fort que celui de la dernière partie compoſée également des ſeules farines biſes. Suivant ce dernier partage des farines, où celles de la première qualité ſont plus abondantes qu'on ne les a vues d'abord, mais auquel ne ſe prête point la mouture à la groſſe, le prix de la livre de pain blanc auroit été inférieur à celui qui eſt réſulté de nos calculs; dans ce dernier cas en effet, il ſe ſeroit trouvé moins de pain de la deuxième & ſur-tout de la troiſième qualité; il y auroit eu moins de deniers à rejeter ſur le prix du pain le plus délicat, & la quantité que nous en avons eu à répartir ſur 945 livres du pain le plus cher, l'auroit été ſur 1063 livres de pain de la même qualité.

Il ne faut pas croire cependant que ce produit plus conſidérable en farines de la première qualité, qui ſeroit dû à la mouture économique, n'auroit lieu abſolument qu'aux

dépens, pour ainſi dire, des farines inférieures, & parce qu'on auroit enlevé à celles-ci les portions les plus précieuſes de gruaux blancs, dont le produit aſſez fort en belles farines ſe ſeroit encore enrichi. Si la mouture économique donne des produits un peu plus abondans qu'on ne les obtient de la mouture à la groſſe, c'eſt en parties vraiment farineuſes qu'elle les donne, en farines mieux dépouillées de ſon; & dès-lors il peut ſe trouver une augmentation ſur celles de la première qualité, ſans que les farines qui ſont au-deſſous aient beaucoup perdu du degré de blancheur qui ſert à les caractériſer, à les ranger par ordre, & qui préſente un moyen naturel d'en régler le prix.

Déterminer la quantité de farines différentes qu'on peut tirer d'une quantité fixe de livres de blé; établir ce réſultat, d'après la mouture à la groſſe, pour ſe conformer aux intentions du Parlement; mais rapprocher en même temps de cette mouture les opérations mieux entendues, de la mouture économique, pour donner lieu à leur comparaiſon; expoſer le travail des boulangers pour faire juger de la vigilance qu'il exige, & des variations dans les produits en pain, comme dans le poids de ces mêmes pains auxquels il eſt ſujet; annoncer à peu-près la quantité de pains qu'il eſt ordinaire de tirer d'une certaine quantité de farine; diſtinguer le prix intrinsèque de la livre de pain, quelle qu'en ſoit la qualité, de celui des frais de main-d'œuvre, & fixer, en les réuniſſant, la valeur totale de la livre de pain, d'après celle du blé dont on aura fait l'emploi; du prix général d'une certaine quantité de livres de pain, de ce prix établi d'abord avec égalité pour chacune d'elles, faire ſortir celui qu'il faut leur aſſigner en particulier & relativement à la qualité du pain; comparer les réſultats de nos expériences & des opérations en grand du même genre qui ſe font continuellement à Paris, avec ceux qui ont été obtenus de l'eſſai fait à Rochefort; examiner ſi dans le tarif ancien de cette ville, adopté en 1703, & ſur-tout dans celui de la Rochelle, qui lui avoit ſervi de modèle en 1700,

on ne trouveroit pas une baſe convenable pour aſſeoir la taxe du pain ; tirer ainſi du pays même où la conteſtation s'eſt élevée, un des principaux moyens de l'y faire ceſſer ; rendre applicables enfin au commerce de boulangerie, dans tout autre pays, les principes vrais en eux-mêmes que nous aurions établis, ſauf la différence pour le prix de la main-d'œuvre que les lieux différens pourroient demander, mais au ſujet duquel il y auroit une règle eſſentielle à ſuivre, celle d'avoir plus d'égard, en fixant ce prix, aux boulangers qui ne ſubſiſtent que par un travail médiocre, qu'à ceux qui ont beaucoup de débit ; tels ſont les objets que nous avons eu en vue dans notre travail pour répondre à la confiance dont le Parlement a honoré l'Académie, & pour remplir nous-mêmes, avec toute l'exactitude dont nous ſerions capables, la commiſſion importante dont la Compagnie nous a chargés. Quelque application qu'ait demandé de nous ce travail ſoumis aux lumières de l'Académie, nous ſerons bien dédommagés des ſoins que nous nous ſommes fait un devoir d'y apporter, ſi le Parlement y trouve les baſes principales ſur leſquelles le prix du pain doit porter ; les moyens d'aplanir les difficultés qui ſe ſont élevées à Rochefort, & qui ſont les mêmes à la Rochelle dans ce moment-ci ; d'écarter celles qui ſont à la veille de naître, nous le ſavons, dans pluſieurs villes du Royaume ; d'établir en un mot la tranquillité ſur un point de Police moins délicat peut-être à régler pour le fond, qu'il ne l'eſt quelquefois à l'égard des circonſtances & des mouvemens dangereux dont il peut devenir l'occaſion.

RÉSUMÉ.

APRÈS les détails dans leſquels nous venons d'entrer, & qu'exigeoit l'expoſé fidèle de nos expériences ; après les obſervations que nous avons cru qu'il nous ſeroit permis d'y joindre, afin qu'il fût plus facile de tirer quelque avantage de notre travail, nous allons réduire à trois articles principaux, conformément au prononcé de l'arrêt du Parlement du 6 Septembre 1783, le réſultat de nos opérations différentes, &

les conséquences qui paroissent en naître pour l'objet de discussion dont l'Académie nous a chargés de nous occuper.

ARTICLE PREMIER.

Un boulanger peut retirer d'une quantité déterminée de farine, quelle qu'en soit la qualité, de 240 livres, par exemple, 315 livres de pain, c'est-à-dire, les $\frac{5}{16}$ au-delà du poids de la farine employée; il en retirera un peu plus si la farine est bise & a été convertie en pains de 6, de 8 ou de 12 livres, comme d'un autre côté il en obtiendra moins, si les pains ne sont que d'une & de 2 livres; il faut supposer d'ailleurs une grande vigilance de la part du boulanger dans la conduite du four, où une chaleur trop forte peut faire perdre au pain une partie de son poids, où le même inconvénient peut naître d'un séjour trop long du pain dans le four: le boulanger, en tâchant d'éviter cette perte, doit cependant donner au pain le degré de cuisson convenable, & la régler suivant la qualité & le poids dont est le pain. Ce sont ces précautions indispensables dans l'Art du boulanger, ces variétés dans le poids & la qualité du pain, qui arrêteront toujours pour la détermination précise de la quantité de livres de pain qu'on peut tirer d'une certaine quantité de farine; mais nous croyons qu'on peut compter en général sur le produit de 315 livres de pain, comme sorti de 240 livres de farine, & en supposant encore que ces pains ne seront pas au-dessous de 4 livres, sur-tout ceux de la première qualité, puisqu'il est constaté par nos propres expériences qu'il est assez difficile d'obtenir l'avantage des $\frac{5}{16}$ d'augmentation sur une quantité de farine d'un poids déterminé.

On retire à Paris de 560 livres de froment, 420 livres de pain de la première qualité, & 131 livres, dont la moitié peut être en pain un peu inférieur, nommé *bis-blanc*, & l'autre moitié en pain proprement bis.

La mouture à la grosse ne donne pas le même avantage, tant pour la quantité des farines que pour leurs qualités bien distinguées; on peut compter sur les $\frac{2}{3}$ ou environ de la

farine qu'on retire de cette mouture pour le pain de *fine fleur* ou *minot ;* sur $\frac{1}{6}$ de cette farine pour le pain de la seconde qualité ou de *froment à sa fleur ;* & sur $\frac{1}{6}$ également pour le pain bis ou de *meture,* c'est-à-dire, qu'en supposant qu'on ne tirât par la mouture à la grosse, de 560 livres de froment que 534 livres de pain, il y en auroit 356 livres de la première qualité, 89 de la seconde, & une quantité égale de la troisième. Nous ne pouvons donner sur le partage des farines, pour les convertir en pains de différentes qualités, qu'une idée générale, parce qu'il y a des provinces où les boulangers ne font qu'une quantité médiocre de pain blanc, où une grande partie des plus belles farines passe dans le pain de la seconde qualité, tandis que les farines bises qu'on en a séparées entrent dans le pain à bas prix que le peuple consomme.

I I.

DANS les discussions qui s'élèvent tous les jours entre les Officiers de Police & les boulangers d'une ville, au sujet de la taxe du pain, il n'y a presque jamais d'accord sur les dépenses auxquelles les boulangers sont tenus par état & relativement au prix des denrées dans le pays où ils font leur commerce : pendant en effet que le zèle des Magistrats les porte à limiter ces dépenses le mieux qu'ils peuvent pour parvenir à la valeur exacte du pain, les boulangers sont enclins de leur côté à étendre ces dépenses, & il est rare qu'ils en fournissent des états où il n'y ait pas quelques articles à réformer. Il paroît donc plus simple, suivant l'usage établi dans plusieurs villes du Royaume, d'accorder une somme fixe aux boulangers par quantité déterminée de farine ou de pain, de ne point entrer avec eux dans le détail des frais de mouture, de boulangerie, &c. & après avoir réglé la valeur intrinsèque de la livre de pain sur celle du blé, à mesure qu'elle varie, d'y ajouter le prix constant de main-d'œuvre qu'on aura fixé. Nous supposerons ici, pour présenter un exemple, que le setier d'une ville de province contient 200 livres de froment bien net & d'une bonne qualité ; 2 setiers & $\frac{4}{5}$ de cette mesure

contiendront les 560 livres de grains dont il a été question dans le premier article; on en retirera par une mouture bien entendue 420 livres de farines différentes & 551 livres de pain. Nous supposerons en second lieu que chaque setier de froment a coûté 21^{l} 10^{f}, & par conséquent que les 2 setiers $\frac{4}{5}$ ont été payés 60^{l} 4^{f}; dès-lors le prix intrinsèque de chaque livre de pain, indépendamment de sa qualité, sera de 2^{f} 2^{d} $\frac{1}{4}$; mais il faut y réunir les frais constans de main-d'œuvre, & en repartir le prix sur chaque livre de pain; nous supposerons donc encore qu'on ajoutera 3^{l} 5^{f} 7^{d} $\frac{2}{14}$ à la valeur de chaque setier de blé du poids de 200 livres, ou 7^{l} par sac de farine du poids de 320 livres, ou 4^{d} par livre de pain, tant pour les dépenses auxquelles les boulangers sont astreints, que pour le bénéfice qu'il convient de leur accorder: chaque livre de pain, sans distinction de qualité, ira donc d'abord, tous frais faits, à 2^{f} 6^{d} $\frac{1}{4}$. Mais il restera une dernière opération à faire, celle de décharger la livre de pain, inférieure en qualité, de l'excédant de prix qu'elle a reçu par un premier calcul, & de le faire retomber sur la livre de pain d'une meilleure qualité: s'il est d'usage dans cette même ville de faire une petite quantité de pain blanc, un peu moins encore de pain bis, mais une quantité considérable de pain de la seconde qualité dans lequel entre la plus grande partie des plus belles farines, alors on pourra supposer que dans les 551 livres de pain tirées des 2 setiers $\frac{4}{5}$, il y en a 88 de pain blanc qu'on portera à 2^{f} 9^{d} la livre, 420 livres de la seconde qualité qu'on laissera à 2^{f} 6^{d}, & 43 livres de pain bis, dont chaque livre ne vaudra que 2^{f}; la totalité du pain, à ces différens prix, montera, tous frais faits, à 68^{l} 18^{f}; elle auroit été à 69^{l} 7^{f} 8^{d}, si on n'eût pas négligé la fraction de $\frac{1}{4}$ de denier ou environ qu'exigeoit chacune des 551 livres de pain pour représenter l'une dans l'autre, sur le pied de 2^{f} 6^{d} $\frac{1}{4}$ la livre, le prix du blé de 60^{l} 4^{f}, avec celui de 9^{l} 3^{f} 8^{d} pour les frais de main-d'œuvre.

Si on suppose au contraire que les plus belles farines sont employées à composer le pain blanc, & qu'on en tire 420

livres ſur le pied de $2^{ſ}\ 9^{d}$ chacune, alors le total de leur prix ſera de $57^{l}\ 15^{ſ}$; on aura encore 88 livres de pain de la ſeconde qualité, qui, ſur le pied chacune de $1^{ſ}\ 11^{d}$, vaudront en total $8^{l}\ 8^{ſ}\ 8^{d}$; on aura enfin 43 livres de pain bis, dont le prix total, ſur le pied d'un ſou 6^{d} la livre, ſera de $3^{l}\ 4^{ſ}\ 6^{d}$: & ces trois ſommes principales étant réunies formeront celle de $69^{l}\ 8^{ſ}\ 2^{d}$, qui repréſentent, à 6 deniers près, le prix des 2 ſetiers $\frac{4}{5}$ de froment, & celui de la main-d'œuvre portés plus haut.

Telle eſt la marche qu'il nous paroît qu'on peut ſuivre pour régler le prix du pain, ſuivant la qualité qu'on jugera à propos d'y attacher, mais en ayant toujours égard, ſoit au poids de chacun des pains, ſoit à la forme qu'on leur donnera, puiſqu'il eſt conſtant que les pains d'une livre, d'une demi-livre, & ſur-tout de 4 onces, perdent beaucoup de leur poids au four, principalement ſi on leur donne une forme plate ou alongée; qu'ils exigent des frais extraordinaires, & ſortent par-là du prix commun qui ſe trouve attaché aux pains de la même qualité, mais d'un poids très-ſupérieur: il ſeroit difficile de préſenter une règle fixe ſur ce point particulier; il faut l'abandonner à la prudence des Magiſtrats, & ſe borner à leur offrir des baſes générales qui leur deviendront toujours avantageuſes dans les circonſtances même où l'eſprit de juſtice les forcera de s'en écarter.

III.

Il eſt ordinaire à Paris de tirer, par la mouture économique, les trois quarts en farines différentes, d'une quantité de blé déterminée; on y compte ſur un quarantième ou environ de déchet; ce qui reſte de la quantité de blé qu'on a employée, compoſe les iſſues, c'eſt-à-dire, le gros & le menu ſon: on voit par-là que des 560 livres de froment net & d'une bonne qualité que nous avons priſes pour exemple dans les deux articles précédens, on peut obtenir 420 livres de farine, dont 320 ſeront de la première qualité, 54 de la

la seconde, 26 de la troisième, & 20 livres seront les dernières farines bises; il résultera 126 livres d'issues de ces 560 livres de froment, & 14 livres de déchet.

Quoique les déchets de mouture & de bluterie soient moins considérables dans la mouture à la grosse que dans celle qui est faite par économie, par la raison qu'on ne repasse pas les gruaux dans la première de ces moutures, tandis qu'il est de principe dans la seconde de faire passer à plusieurs reprises ces gruaux sous les meules, cependant le produit en farine est plus avantageux, plus constant dans la mouture économique que dans la mouture à la grosse, & la distinction des farines y est mieux établie: nous en avons fait l'observation dans l'*article premier;* & le tableau de nos expériences, auquel nous prions qu'on ait recours, en offre d'ailleurs les preuves détaillées.

Cette mouture économique plus utile que l'autre, fait des progrès rapides tous les jours; on la voit s'étendre d'une manière si marquée par le bénéfice qu'elle procure en favorisant le commerce des farines, que nous croyons qu'on peut commencer à la prendre pour base générale, tant des produits du blé en farine & des trois qualités de pain qu'il est assez d'usage d'en tirer, que de la taxe du pain, puisqu'on ne sauroit asseoir avec équité cette taxe que sur des produits à peu-près constans, tels qu'on les obtient de la mouture économique, & sur des farines assez bien distinguées pour que la valeur des différens pains qui en seront composés, se trouve toujours proportionnée, autant qu'il est possible, à la qualité de ces pains.

Ni le gros ni le menu son qui composent les issues, & qu'on a séparés des farines, ne doivent servir à faire du pain; outre qu'il n'en pourroit résulter qu'un aliment qui n'en auroit proprement que le nom, qui seroit mal-sain & indigeste, il ne vaudroit pas souvent le prix de la main-d'œuvre, & ne deviendroit utile qu'au boulanger qui parviendroit à le débiter.

Il seroit fort difficile de déterminer le déchet qui résulte

de l'opération du crible, du van, & de tout autre moyen de nettoyer les grains, puiſque ce déchet dépend de l'état ſi différent quelquefois dans lequel eſt le blé avant qu'on le prépare pour l'expoſer en vente. Il n'en eſt pas ainſi de la perte que le blé éprouve au moulin, on peut l'eſtimer comme nous l'avons déterminée avec aſſez de préciſion, parce qu'il eſt d'uſage de ne faire paſſer le blé ſous les meules, qu'après qu'il a ſubi l'opération du crible; parce que dans les moulins montés pour la mouture économique, les grains ne ſont verſés dans la trémie, pour paſſer ſous les meules, qu'au ſortir de ce même crible, lequel pour cet effet plus prompt, eſt placé fort près de l'ouverture qui communique à cette trémie, & fournit du blé net, à meſure que celui qui l'a précédé eſt converti en farine, & s'introduit dans les bluteaux.

L'avis que le Parlement veut bien demander à l'Académie ſur l'eſſai fait à Rochefort, & ſur le procès-verbal qui en a été la ſuite, en exécution de l'arrêt de la Cour du 17 Juin 1781, cet avis ſort, pour ainſi dire, du réſultat de nos expériences & du précis que nous venons de préſenter. On a employé dans cet eſſai 1411 livres 4 onces de blé dont on a tiré 1201 livres 14 onces 4 gros de farines différentes, par la mouture à la groſſe, & 1638 livres 4 onces de pain; on n'auroit obtenu à Paris de cette même quantité de blé, par la mouture la plus avantageuſe, que 1058 livres 7 onces de farines différentes, & 1389 livres 4 onces ou à peu-près de pain, par une opération de boulangerie qu'on eût le mieux conduite. Dès-lors on a retiré à Rochefort 143 livres 7 onces 4 gros de plus en farine, qu'on n'en auroit eu à Paris, & 249 livres de plus en pain qu'on n'y en auroit obtenu; il eſt vrai que les déchets de mouture auroient été plus forts à Paris qu'on ne les a éprouvés à Rochefort, & qu'il a dû ſe trouver, dans l'eſſai qu'on y a fait, 15 à 16 livres de plus en pain de différentes qualités, qu'on n'en auroit obtenu à Paris, en ſuppoſant les choſes parfaitement égales d'ailleurs; mais il s'agit, dans

l'essai de Rochefort, d'un excédant en pain de 249 livres, ou, à la rigueur, de 233 livres qui ont été prises sur le menu son; qui, à Paris, ne seroient jamais sorties des opérations de boulangerie, eût-il fallu faire du pain bis; & qui n'ont pu produire une augmentation si considérable sur le pain obtenu à Rochefort, qu'aux dépens de sa qualité, qu'autant que l'écorce atténuée du grain a passé confondue avec les farines à travers les soies des bluteaux; & c'est sans doute une des causes de la quantité extraordinaire de pain qu'on a tirée à Rochefort des 1201 livres 14 onces 4 gros de farine dont il est fait mention dans le procès-verbal.

Qu'on suppose pour un moment que les 1411 livres 4 onces de blé employées à Rochefort, eussent rendu aussi à Paris 1201 livres 14 onces 4 gros de farine dans les qualités différentes qu'on y admet, pour convertir la farine en pain; on n'auroit pu y tirer de cette même quantité de farine que 1577 livres 8 onces de pain tout au plus, c'est-à-dire 60 livres 12 onces de moins qu'on n'en a obtenu à Rochefort. On sent dès-lors que les farines très-bises, retenant l'eau avec beaucoup de ténacité, il est possible qu'une partie des pains faits à Rochefort, n'ait pas perdu au four tout l'excédant en eau qui auroit dû s'en évaporer, & que cette humidité surabondante dans le pain y ait été une des causes de la quantité surprenante qu'on en a obtenue dans l'essai de Rochefort.

Il y a long-temps que par une estimation générale qui approche assez de la vérité, mais sur laquelle le boulanger le plus habile est presque toujours en défaut, on regarde la livre de blé comme pouvant donner une livre de pain, déduction faite du son & des déchets. Il est aisé de voir sur le champ combien, dans l'expérience faite à Rochefort, le résultat est porté au-de-là de cette estimation si favorable pour le produit en pain d'une quantité déterminée de blé; on y a obtenu de 1411 livres 4 onces de froment, 1638 livres 4 onces de pain, c'est-à-dire 227 livres de

plus que la totalité des grains n'en auroit donné dans la supposition avantageuse d'une quantité de pain égale à celle du froment employé.

Si, après avoir remarqué la quantité considérable de pain qui est résultée de l'essai de Rochefort, on jette les yeux sur le tarif de cette ville fait en 1703, & qui avoit eu pour base celui de 1700 établi à la Rochelle, on verra au contraire qu'on n'y suppose qu'un produit de 320 livres de pain, comme tiré de 260 livres de farine, tandis qu'on obtiendroit aujourd'hui 340 livres de pain d'une quantité pareille de farine, ou qu'au moins on s'en écarteroit peu, en veillant à la chaleur du four. Malgré cette différence à laquelle on a vu que nous avons eu égard précédemment, en établissant avec raison nos calculs sur le plus fort des produits en pain dont il est question ici, nous croyons que ces deux tarifs peuvent-être employés utilement, quant au prix de la main-d'œuvre; qu'il ne s'agira que de répartir ce prix sur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres auxquelles est borné dans ces tarifs le produit sur la quantité de 260 livres de farine qu'on y a déterminée.

Dans le temps où l'on a rédigé ces tarifs ils pouvoient être trop favorables aux boulangers; on y accordoit 6^{l} pour l'emploi d'une charge de 260 livres de farine de la première ou de la seconde qualité, à quelque prix qu'elle se trouvât; c'est-à-dire, qu'on donnoit aux boulangers 4 deniers $\frac{1}{2}$ par livre de pain, pour toutes leurs dépenses de quelque nature qu'elles fussent, & pour le bénéfice qu'ils étoient en droit d'attendre de leur travail; ce prix de main-d'œuvre descend à $4^{d}\ \frac{4}{17}$ par la répartition des 6^{l} sur les 340 livres de pain, & rentre par-là dans les limites ordinaires de ce qui est accordé aux boulangers dans plusieurs Villes, au-delà de la valeur intrinsèque de la livre de pain. On remarque d'ailleurs que ces tarifs présentent la distinction utile des deux bases dont on a besoin pour bien taxer le pain, celle du prix intrinsèque, mais variable, mais toujours juste dans ses variations, de la livre de pain,

& celle du prix fixe, au moins pendant long-temps, des frais de main-d'œuvre qui sont dûs au boulanger. On observe enfin, avec une sorte de surprise, que ces tarifs, malgré l'augmentation assez considérable de la valeur de toutes les denrées, depuis plus de quatre-vingts ans, pourroient être adoptés aujourd'hui, en supposant le produit en pain sur 260 livres de farine, plus fort de 20 livres que ces tarifs ne l'ont déterminé; & en faisant descendre par-là, comme nous l'avons dit, le prix de la main-d'œuvre à $4^d \frac{4}{17}$ par livre de pain, au lieu de $4^d \frac{1}{2}$ auxquels ces mêmes tarifs l'ont fixé.

Mais c'est aux lumières & à la sagesse du Parlement que doit être réservée la décision de ce point important, sur lequel nous ne nous sommes expliqués que par une suite naturelle de notre travail & de la discussion qui l'a occasionné; il doit nous suffire d'avoir établi par voie d'expériences, suivant l'intention du Parlement, la première des bases sur lesquelles il est nécessaire d'asseoir la taxe du pain; & d'avoir préparé, à tout ce qui concerne la seconde base, par des exemples, des calculs rigoureux & des observations qui pourront en faciliter l'établissement.

S'il nous étoit permis cependant de nous expliquer d'une manière plus précise sur le moyen simple de régler actuellement le prix du pain à Rochefort, nous croirions qu'il conviendroit d'employer pour cette Ville le tarif qui a été fait pour la Rochelle en 1700, de l'y établir avec les changemens que nous avons déjà proposés, auxquels on ne sauroit se refuser, en considérant le produit en pain qu'il est ordinaire de tirer à Paris d'une quantité déterminée de farine, & qui ne peuvent que tourner à l'avantage du Public, par le prix un peu plus foible de la livre de pain auquel ils conduisent: il résulteroit de ces changemens fondés sur de justes raisons, qu'en même temps que le produit en pain, à quantités égales de farine, seroit proportionné à celui qu'obtiennent aujourd'hui les boulangers intelligens, il se trouveroit plus fort d'un seizième qu'on ne l'a supposé dans le tarif de 1700.

Nous jugerions également que le prix de 6^{l} accordé dans ce tarif pour la conversion en pain de 260 livres de farine, quelle qu'en soit la qualité, devroit être maintenu, puisqu'en supposant, d'après l'expérience, qu'il est possible de tirer 340 livres de pain de 260 livres de farine, le prix de la main-d'œuvre fixé dans ce tarif à 4^{d} $\frac{1}{2}$ par livre de pain, se trouvera réduit à 4^{d} $\frac{4}{17}$ par la répartition des 6^{l} sur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres auxquelles on a borné, en 1700, le produit réel en pain de 260 livres de farine.

C'est sur ce tarif qu'a été rédigé à Rochefort celui de 1703; & il semble que ce tarif plus ancien, fait sur de bons principes à plusieurs égards dans la capitale du pays d'Aunis, soit destiné en quelque sorte à servir de règle commune dans les villes que ce pays comprend.

Si ce tarif, ou celui de 1703, rapproché ainsi de l'état actuel de la boulangerie, étoit adopté, les discussions qui se sont élevées souvent sur le montant réel des frais de main-d'œuvre, n'auroient plus lieu; un prix fixe à cet égard, ou qui le seroit au moins pendant long-temps, feroit le repos du Magistrat, & tranquilliseroit le boulanger; il ne resteroit d'attention à donner qu'aux prix courans du blé & des farines dont on auroit toujours une connoissance exacte par les états qu'il est d'usage d'en tenir dans les halles chaque jour de marché; & en conservant avec soin les deux bases de la taxe du pain qu'on auroit une fois posées, sauf les variations de la valeur du blé, qui sont toujours prévues dans les tarifs, on écarteroit les contestations, ou au moins on les réduiroit à une seule aisée à terminer, celle qui regarderoit le prix moyen du blé & des farines dans les villes où le tarif seroit établi.

Nota. La contestation qui a donné lieu aux Expériences dont on vient de rendre compte, & aux conséquences qu'il a paru juste d'en tirer, a été terminée le 2 Juillet 1785, par un arrêt du Parlement, qui *entérine le Rapport des Commissaires de l'Académie des Sciences, dont il s'agit, & ordonne que le tarif de 1703 sera suivi à l'avenir dans la ville de Rochefort.*

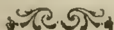


TABLEAU.

CONOMIQUE.

	TOTAL des Farines données par les deux sortes de BLÉS.	TOTAL des ISSUES.	TOTAL des DÉCHETS.	*RÉCAPITULATIONS.*
//onc.	1096l			Farines... 2110l //onc Iſſues..... 646. 8. Déchets.. 71. 4. 2827. 12.
8.	......	324l 8onc		
8.	......	....	31l 8onc	
//				
//	1014.			
	2110.			
//	......	322. //		
		646. 8.		
12.	......	....	39. 12.	
12.			71. 4.	

PREMIER TABLEAU.

MOUTURE ÉCONOMIQUE.

	PRODUITS EN FARINES.			TOTAL des Farines données par les deux fortes de BLÉS.	TOTAL des ISSUES.	TOTAL des DÉCHETS.	*RÉCAPITULATIONS.*
1.re EXPÉRIENCE fur 6 fetiers de Blé de 1781, criblé, & pefant 1452 livres.	Farine de blé de la première qualité..........	583l //onc.	1096l //onc.	1096l			Farines... 2110l //onc
	1.re Farine de gruau.....	286. 8.					Iffues..... 646. 8.
	2.e de gruau.........	122. 8.					Déchets.. 71. 4.
	3.e...............	57. //					
	4.e...............	47. //					2827. 12.
	PRODUITS EN ISSUES.						
	Remoulage de gruau....	43. //	324. 8.	......	324l 8onc		
	Remoulage bis........	94. 8.					
	Recoupes...........	119. //					
	Gros fon...........	68. //					
	Déchets.................		31. 8.	......	....	31l 8onc	
			1452. //				
2.e EXPÉRIENCE, 6 fetiers de Blé de 1782, criblé, & pefant 1375l 12onc.	Farine de la 1.re qualité..	454. //	1014. //	1014.			
	Farine de 1.er gruau....	280. //					
	Farine de 2.e gruau.....	151. 8.					
	De 3.e.............	64. //		2110.			
	De 4.e.............	64. 8.					
	PRODUITS EN ISSUES.						
	Remoulage de gruau....	44. //	322. //	......	322. //		
	Remoulage bis.......	106. 8.					
TOTAL DU BLÉ.	Recoupes...........	65. 8.			646. 8.		
1452l //onc.	Gros fon...........	106. //					
1375. 12.	Déchets................		39. 12.	......	....	39. 12.	
2827. 12.			1375. 12.			71. 4.	

ABLEAU.

LA GROSSE.

	Total des Farines données par les deux sortes de Blés.	Total des Issues.	Total des Déchets.	*Récapitulations.*
nc.	1071l			Farines... 2068. //
				Issues.... 721. //
				Déchets.. 38. 12.
				2827. 12.
8.	......	364l 8onc		
8.	......	....	16l 8onc	
//				
//	997.			
	2068.			
8.	......	356. 8.		
		721. //		
4.	......	....	22. 4.	
2.			38. 12.	

DEUXIÈME TABLEAU.

MOUTURE À LA GROSSE.

	Produits en Farines.			Total des Farines données par les deux sortes de Blés.	Total des Issues.	Total des Déchets.	*Récapitulations.*
3.e Expérience sur 6 setiers de Blé de 1781, criblé, & pesant 1452 livres.	Farine de la 1.ere qualité.	701l 8onc.	1071l ″onc.	1071l			Farines... 2068. ″
	De la 2.e qualité......	136. 8.					Issues... 721. ″
	De la troisième farine bise.	233. ″					Dechets.. 38. 12.
	Produits en issues.						2827. 12.
	Gros son...........	117. ″					
	Recoupes...........	99. ″	364. 8.	......	364l 8onc		
	Recoupettes.........	148. 8.					
	Déchets........	....	16. 8.	......	....	16l 8onc	
			1452. ″				
4.e Expérience sur 6 setiers de Blé de 1782, criblé, & pesant 1375l 12onc.	Farine de la 1.ere qualité.	685. ″					
	De la 2.e qualité, ou bis-blanc...........	162. ″	997. ″	997.			
	De la 3.e qualité, ou farine bise............	150. ″		2068.			
	Produits en issues.						
	Gros son...........	120. 8.					
	Recoupes...........	122. 8.	356. 8.	......	356. 8.		
	Recoupettes.........	113. 8.			721. ″		
Total du Blé.							
1452l ″onc.	Déchets........	....	22. 4.	......	....	22. 4.	
1375. 12.			1375. 12.			38. 12.	
2827. 12.							

eux qui sont établis dans les Tableaux précédens.

MOUTURE À LA GROSSE.

		liv.	onc.
Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	Farines différentes	178.	8
	Issues	60.	12
	Déchet	2.	12
		242.	//
Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$.	Farines différentes	166.	$2\frac{2}{3}$
	Issues	59.	$6\frac{2}{3}$
	Déchet	3.	$11\frac{1}{3}$
		229.	$4\frac{2}{3}$

	liv.	onc.
Blé de 1781	242.	//
Blé de 1782	229.	$4\frac{2}{3}$
Differ. sur le poids du Blé	12.	$11\frac{1}{3}$
Farines de 1781	178.	8
Farines de 1782	166.	$2\frac{2}{3}$
Differ. sur le poids des Farines	12.	$5\frac{1}{3}$

E S.

	liv.	onc.
lu Blé de 1781	54.	$1\frac{}{3}$
lu Blé de 1782	53.	$10\frac{2}{3}$
sur le Blé de 1781	//	$6\frac{2}{3}$
lu Blé de 1781	60.	12
lu Blé de 1782	59.	$6\frac{2}{3}$
sur le Blé de 1781	1.	$5\frac{1}{3}$

E T S.

	liv.	onc.
ı Blé de 1781	5.	4
ı Blé de 1782	6	10
sur le Blé de 1782	1.	6
ı Blé de 1781	2.	12
Blé de 1782	3.	$11\frac{1}{3}$
sur le Blé de 1782	//	$15\frac{1}{3}$

Produits différens d'un setier de Blé, d'après ceux qui sont établis dans les Tableaux précédens.

Mouture économique.

		liv.	onc.
Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	Farines différentes	182.	10 2/3
	Issues	54.	1 1/3
	Déchet	5.	4
		242.	〃
Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces 2/3.	Farines différentes	169.	〃
	Issues	53.	10 2/3
	Déchet	6	10
		229.	4 2/3

	liv.	onc.
Blé de 1781	242.	〃
Blé de 1782	229.	4 2/3
Différ. sur le poids du Blé	12.	11 1/3
Farines de 1781	182.	10 2/3
Farines de 1782	169.	〃
Différ. sur le poids des Farines	13.	10 2/3

Mouture à la grosse.

		liv.	onc.
Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	Farines différentes	178.	8
	Issues	60.	12
	Déchet	2.	12
		242.	〃
Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces 2/3.	Farines différentes	166.	2 2/3
	Issues	59.	6 2/3
	Déchet	3.	11 1/3
		229.	4 2/3

	liv.	onc.
Blé de 1781	242.	〃
Blé de 1782	229.	4 2/3
Différ. sur le poids du Blé	12.	11 1/3
Farines de 1781	178.	8
Farines de 1782	166.	2 2/3
Différ. sur le poids des Farines	12.	5 1/3

ISSUES.

		liv.	onc.
Mouture économique	Celles du Blé de 1781	54.	1 1/3
	Celles du Blé de 1782	53.	10 2/3
	En plus sur le Blé de 1781	〃	6 2/3
Mouture à la grosse	Celles du Blé de 1781	60.	12
	Celles du Blé de 1782	59.	6 2/3
	En plus sur le Blé de 1781	1.	5 1/3

DÉCHETS.

		liv.	onc.
Mouture économique	Ceux du Blé de 1781	5.	4
	Ceux du Blé de 1782	6	10
	En plus sur le Blé de 1782	1.	6
Mouture à la grosse	Ceux du Blé de 1781	2.	12
	Ceux du Blé de 1782	3.	11 1/3
	En plus sur le Blé de 1782	〃	15 1/3

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES POUR RÉSOUDRE DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

DIX-HUITIÈME MÉMOIRE,

Dans lequel on applique à la détermination de la parallaxe de Mars, les Formules analytiques démontrées dans les Mémoires précédens.

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

Exposition du Sujet.

(1.) DANS mon seizième Mémoire, j'ai calculé avec la plus grande généralité les observations des passages de Vénus des 6 Juin 1761 & 3 Juin 1769, afin d'en conclure la parallaxe moyenne du Soleil. Je me propose dans ce Mémoire, d'appliquer des méthodes également générales, au calcul des observations de Mars faites en 1751, pour déterminer pareillement la parallaxe moyenne du Soleil. Les Astronomes verront sans doute avec plaisir la comparaison des résultats donnés par ces deux méthodes; je ferai usage des formules qui m'ont déjà servi à déterminer la constante de la parallaxe horizontale polaire de la Lune (*Mémoires de l'Académie, année 1782*).

(2.) Je n'entreprendrai point de calculer toutes les Observations faites en 1751, pour déterminer la parallaxe de Mars; je me contenterai de discuter celles qui ont eu des correspondantes dans les principaux Observatoires de l'Europe. Je commencerai par les Observations faites à l'Observatoire royal de Paris & à Gréenwich. Voici le détail de ces Observations, tel qu'il m'a été donné par M. Cassini de Thury, & que j'ai comparé à la notice que l'on en trouve

dans les Mémoires de l'Académie, pour les années 1748, 1752 & 1760.

Notice des Observations correspondantes, faites en 1751 au cap de Bonne-espérance, par M. l'abbé de la Caille; à l'Observatoire royal de Paris, par M.rs Cassini de Thury & le Gentil; & à Gréenwich, par M. Bradley.

Observation du 31 Août 1751.

(3.) Le 31 Août 1751, la distance de Mars au zénith, lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de l'étoile 33.e des Poissons au zénith, ont été observées au Cap & à Gréenwich.

Cap.

Distance au zénith de l'étoile 33.e des Poissons. .	26d	49′	5″,7.
Distance au zénith du limbe boréal de Mars. . . .	26.	38.	47,3.
Limbe boréal de Mars, plus austral que l'Étoile.	0.	10.	18,4.

Gréenwich.

Distance au zénith de l'étoile 33.e des Poissons. . .	58.	32.	[illegible],0.
Distance au zénith du centre de Mars	58.	44.	16,0.
Centre de Mars plus austral que l'Étoile.	0.	12.	21,0.

Dans l'intervalle de l'Observation du Cap à celle de Gréenwich, Mars avoit éprouvé une augmentation de 14″,8 dans sa déclinaison australe.

Observation du 13 Septembre 1751.

(4.) Le 13 Septembre 1751, la distance de Mars au Zénith, lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de Rigel, ont été observées au Cap, à Paris & à Gréenwich.

Cap.

Distance au zénith du bord boréal de Mars.	25.	33.	14,9.
Distance de Rigel au zénith.	25.	24.	23.4,
Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel.	0.	8.	51,5.

Paris.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars..........	32d 50′ 0″,0.
Hauteur de Rigel......................	32. 41. 46,8.
Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel.	0. 18. 13,2.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 11 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

M. Caſſini penſe que la diſtance du limbe boréal de Mars à Rigel, obſervée à Paris, doit être diminuée de 3 ſecondes, pour avoir égard à l'épaiſſeur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord ſupérieur de Mars trop grande de 3 ſecondes.

Gréenwich.

Diſtance du centre de Mars au zénith.........	59. 49. 46,5.
Diſtance de Rigel au zénith..................	59. 57. 37,0.
Centre de Mars plus boréal que Rigel......	0. 7. 50,5.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Gréenwich, Mars avoit éprouvé une augmentation de 13 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Obſervation du 14 Septembre 1751.

(5.) Le 14 Septembre 1751, la diſtance de Mars au zénith lors du paſſage au Méridien, ainſi que la diſtance de Rigel au zénith, ont été obſervées au Cap & à Paris.

Cap.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith...	25. 29. 5,2.
Diſtance de Rigel au zénith.................	25. 24. 22,0.
Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel....	0. 4. 43,2.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars..........	32. 45. 50,2.
Hauteur de Rigel......................	32. 41. 46,8.
Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel...	0. 4. 3,4.

M. Cassini pense que cette dernière quantité doit être diminuée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du limbe boréal de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 11 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 24 Septembre 1751.

(6.) Le 24 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith, lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de λ du Verseau, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith......	24d 59′ 43″,7.
Distance de λ du Verseau au zénith...........	25. 1. 23,2.
Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau............................	0. 1. 39,5.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars............	32. 16. 32,7.
Hauteur de λ du Verseau.................	32. 18. 51,0.
Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau............................	0. 2. 18,3.

Suivant M. Cassini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 25 Septembre 1751.

(7) Le 25 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de λ du Verseau, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith . .	24ᵈ	58′	11″,7.
Diſtance de λ du Verſeau au zénith.	25.	1.	26,3.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . .	0.	3.	14,6.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.	32.	15.	16,0.
Hauteur de λ du Verſeau.	32.	18.	51,0.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . .	0.	3.	35,0.

Suivant M. Caſſini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 ſecondes, pour avoir égard à l'épaiſſeur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord ſupérieur de Mars trop grande de 3 ſecondes.

Dans l'intervalle de l'Obſervation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Obſervation du 26 Septembre 1751.

(8.) Le 26 Septembre 1751, la diſtance de Mars au zénith lors du paſſage au Méridien, ainſi que la hauteur de λ du Verſeau, ont été obſervées au Cap & à Paris.

Cap.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith . .	24.	56.	56,6.
Diſtance de λ du Verſeau au zénith.	25.	1.	26,3.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . .	0.	4.	29,7.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.	32.	14.	1,0.
Hauteur de λ du Verſeau.	32.	18.	55,0.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . .	0.	4.	54,0.

Suivant M. Caſſini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 ſecondes, pour avoir égard à l'épaiſſeur du fil du micromètre qui faiſoit paroître la hauteur du limbe boréal de Mars trop grande de 3 ſecondes.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Obſervation du 3 Octobre 1751.

(9.) Le 3 Octobre 1751, la diſtance de Mars au zénith lors du paſſage au Méridien, ainſi que la diſtance de λ du Verſeau au zénith, ont été obſervées au Cap, à Paris & à Gréenwich.

Cap.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith...	24d	57′	4″,6.
Diſtance de λ du Verſeau au zénith........	25.	1.	19,7.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau..	0.	4.	15,1.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.........	32.	14.	14,0.
Hauteur de λ du Verſeau..............	32.	18.	50,0.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau..	0.	4.	36,0.

D'après M. Caſſini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 ſecondes, pour avoir égard à l'épaiſſeur du fil du micromètre qui faiſoit paroître la hauteur du bord ſupérieur de Mars trop grande de 3 ſecondes.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une diminution de 3 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Gréenwich.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith..	60.	25.	16,5.
Diſtance de λ du Verſeau au zénith.........	60.	20.	34,0.
Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau..	0.	4.	42,5.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Gréenwich, Mars avoit éprouvé une diminution de 3″,2 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Observation du 4 Octobre 1751.

(10.) Le 4 Octobre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Gréenwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . .	24^d	58′	16″,3.
Distance de λ du Verseau au zénith	25.	1.	14,5.
Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . .	0.	2.	58,2.

Gréenwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . .	60.	23.	59,0.
Distance de λ du Verseau au zénith	60.	20.	33,0.
Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . .	0.	3.	26,0.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Gréenwich, Mars avoit éprouvé une diminution de 3″,2 dans sa déclinaison australe.

Observation du 7 Octobre 1751.

(11.) Le 7 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Gréenwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . . .	25.	3.	57,8.
Distance de λ du Verseau au zénith	25.	1.	21,2.
Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau . .	0.	2.	36,6.

Gréenwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . . .	60.	18.	16,5.
Distance de λ du Verseau au zénith	60.	20.	32,5.
Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau . .	0.	2.	16,0.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de

Gréenvich, Mars avoit éprouvé une diminution de 7",4 dans sa déclinaison australe.

Observation du 8 Octobre 1751.

(12.) Le 8 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith..	25ᵈ	6'	29",1.
Distance de λ du Verseau au zénith........	25.	1.	20,6.
Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau..	0.	5.	8,5.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.........	32.	23.	45,3.
Hauteur de λ du Verseau................	32.	18.	55,0.
Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau..	0.	4.	50,3.

M. Cassini pense que cette dernière quantité doit être diminuée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui faisoit paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une diminution de 7 secondes dans la déclinaison australe.

Observation du 9 Octobre 1751.

(13.) Le 9 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Gréenwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith..	25.	9.	18,6.
Distance de λ du Verseau au zénith..........	25.	1.	21,2.
Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau..	0.	7.	57,4.

Gréenwich.

Diſtance du limbe boréal de Mars au zénith...	60^d 13′ 0″,0.
Diſtance de λ du Verſeau au zénith.........	60. 20. 35,0.
Limbe boréal de Mars moins auſt. que λ du Verſeau..	0. 7. 35,0.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Gréenwich, Mars avoit éprouvé une diminution de 10 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Équations dont nous avons fait uſage dans ce Mémoire.

(14.) Soit

1 le demi-petit axe de la Terre ;
ρ le demi-grand axe ;
δ la déclinaiſon apparente de Mars.

Obſervation du Cap.

l la latitude corrigée du Cap ;
$R = \text{coſ.}\,\delta\ \text{ſin.}\,l - \rho\ \text{ſin.}\,\delta\ \text{coſ.}\,l.$

Obſervation correſpondante faite en Europe.

l' la latitude corrigée du lieu ;
$R' = \text{coſ.}\,\delta\ \text{ſin.}\,l' - \rho\ \text{ſin.}\,\delta\ \text{coſ.}\,l'$;

ſoit de plus

diſtance de Mars à la Terre $= \sqrt{[}$ diſtance² de Mars au Soleil + diſtance² de la Terre au Soleil — 2 × diſtance de la Terre × diſtance de Mars × coſ. (angle au Soleil)].

Les diſtances de Mars & de la Terre au Soleil, doivent être évaluées en parties telles que la moyenne diſtance du Soleil à la Terre = 1 ; l'on a d'ailleurs

coſ. (angle au Soleil) = coſ. (latitude héliocentrique de Mars) coſ. (différence de longitude hélioc. de la Terre & de Mars) ;

γ = le nombre de ſecondes dont le limbe boréal de Mars eſt plus boréal que l'Étoile à laquelle il a été comparé au Cap
— le nombre de ſecondes dont le limbe boréal de Mars eſt plus boréal que l'Étoile à laquelle il a été comparé en Europe
+ le nombre de ſecondes dont Mars s'eſt approché du Pôle boréal de l'Équateur dans l'intervalle des deux Obſervations ;

$d\gamma$ = d (nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal qu'on ne l'a supposé lors de l'observation du Cap)
— d (nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal qu'on ne l'a supposé lors de l'observation faite en Europe)
+ d (nombre de secondes dont Mars s'est approché du Pôle boréal de l'équateur dans l'intervalle des deux Observations).

J'ai fait usage des équations suivantes, démontrées dans mes précédens Mémoires.

(1) Parallaxe du Soleil dans sa moyenne distance $= \frac{\gamma}{R' - R}$ distance de Mars à la Terre $+ \frac{1}{R' - R}$ distance de Mars à la Terre $d\gamma + \frac{\gamma}{R' - R}$ d distance de Mars à la Terre.

Évaluation des quantités γ, correspondantes aux observations précédentes.

(15.) Au moyen des formules précédentes, on parviendra aux résultats suivans.

Observation du 31 Août 1751.

Cap & Gréenwich.

$\gamma = 47'',8$ — demi-diamètre de Mars;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

déclinaison de Mars $= 7^d\ 24'\ 1''$ australe;
distance de Mars à la Terre $= 0,38810$.

Observation du 13 Septembre 1751.

Cap & Paris. $\gamma = 30'',3$; *Cap & Gréenwich.* $\gamma = 48'',0$ — demi-diamètre de Mars;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

déclinaison de Mars $= 8^d\ 25'\ 18''$ australe;
distance de Mars à la Terre $= 0,38331$.

Observation du 14 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 31'',9$;

on

on avoit d'ailleurs relativement à cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $8^d\ 29'\ 30''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,38410.

Obſervation du 24 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 37'',8$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $8^d\ 58'\ 45''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,39824.

Obſervation du 25 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 19'',6$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $9^d\ 0'\ 18''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,40106.

Obſervation du 26 Septembre 1751.

$\gamma = 23'',3$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $9^d\ 1'\ 30''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,40369.

Obſervation du 3 Octobre 1751.

Cap & Paris.	*Cap & Gréenwich.*
$\gamma = 26'',9$.	$\gamma = 30'',6$;

on avoit d'ailleurs pour cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $9^d\ 1'\ 51''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,42409.

Obſervation du 4 Octobre 1751.

Cap & Gréenwich.

$\gamma = 31'',0$;

on avoit d'ailleurs pour cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $9^d\ 0'\ 27''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,42731.

Obſervation du 7 Octobre 1751.

Cap & Gréenwich.

$$\gamma = 27'',6;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $8^d\ 54'\ 37''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,43817.

Obſervation du 8 Octobre 1751.

Cap & Paris.

$$\gamma = 28'',2;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $8^d\ 52'\ 8''$ auſtrale;
Diſtance de Mars à la Terre = 0,44233.

Obſervation du 9 Octobre 1751.

Cap & Gréenwich.

$$\gamma = 32'',4;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Obſervation,

Déclinaiſon de Mars = $8^d\ 49'\ 22''$ auſtrale,
Diſtance de Mars à la Terre = 0,44673.

Équations relatives aux Obſervations faites à l'Obſervatoire Royal de Paris.

(16.) Si l'on applique des nombres aux équations du *§. 14*, & que l'on nomme pour chaque obſervation particulière

$d\gamma$ la différence entre la véritable valeur de γ & celle employée dans le calcul;

d diſtance de Mars à la Terre, la différence entre la véritable diſtance de Mars à la Terre & celle employée dans le calcul,

l'on aura relativement aux observations faites à l'Observatoire Royal de Paris.

Observation du 13 Septembre 1751.

(1) Parallaxe moyenne du Soleil $= 9'',151 + 0,302\, d\gamma + 23'',9\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 14 Septembre 1751.

(2) Parallaxe moyenne du Soleil $= 9'',666 + 0,303\, d\gamma + 24'',0\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 24 Septembre 1751.

(3) Parallaxe moyenne du Soleil $= 11'',908 + 0,315\, d\gamma + 31'',0\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 25 Septembre 1751.

(4) Parallaxe moyenne du Soleil $= 6'',213 + 0,317\, d\gamma + 15'',5\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 26 Septembre 1751.

(5) Parallaxe moyenne du Soleil $= 7'',437 + 0,319\, d\gamma + 18'',4\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 3 Octobre 1751.

(6) Parallaxe moyenne du Soleil $= 9'',011 + 0,335\, d\gamma + 21'',2\, d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 8 Octobre 1751.

(7) Parallaxe moyenne du Soleil $= 9'',840 + 0,349\, d\gamma + 22'',3\, d$ distance de Mars à la Terre.

(17.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) du *paragraphe précédent*, l'on suppose

$d\gamma = 0$; d distance de Mars à la Terre $= 0$,

& que l'on additionne toutes ces équations, l'on aura pour valeur moyenne de la parallaxe moyenne du Soleil,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil $= 9'',032$.

Si l'on rejette les équations (3) & (4) qui s'éloignent le plus du résultat moyen, mais en sens contraire, l'on aura

(2) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",011.

Équations relatives aux observations faites à Gréenwich.

(18.) Si l'on applique des nombres aux équations du §. 14, & que l'on suppose le demi-diamètre de Mars de 16",0, lors des observations des 31 Août & 4 Septembre 1751, & que l'on nomme pour chaque observation particulière,

$d\,\gamma$ la différence entre la véritable valeur de γ & celle employée dans les calculs;

d distance de Mars à la Terre, la différence entre la véritable distance de Mars & celle employée dans les calculs;

d demi-diamètre de Mars, la différence entre le véritable demi-diametre de Mars & celui employé dans les calculs;

on aura relativement aux observations faites à Gréenwich,

Observation du 31 Août 1751.

(1) Parall. moyenne ☉ = 9",508 − 0,299 d demi-diam. Mars + 0,299 $d\gamma$ + 24",8 d distance de Mars à la Terre.

Observation du 13 Septembre 1751.

(2) Parall. moyenne ☉ = 9",484 − 0,297 d demi-diam. Mars + 0,297 $d\gamma$ + 24",8 d distance de Mars à la Terre.

Observation du 3 Octobre 1751.

(3) Parallaxe moyenne du Soleil = 10",067 + 0,329 $d\gamma$ + 23",7 d distance de Mars à la Terre.

Observation du 4 Octobre 1751.

(4) Parallaxe moyenne du Soleil = 10",292 + 0,332 $d\gamma$ + 23",8 d distance de Mars à la Terre.

Observation du 7 Octobre 1751.

(5) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",416 + 0,341 $d\gamma$ + 21",4 d distance de Mars à la Terr.

Obſervation du 9 Octobre 1751.

(6) Parallaxe moyenne du Soleil = 11",211 + 0,346 $d\gamma$ + 25",1 d diſtance de Mars à la Terre.

(19.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) du *paragraphe précédent*, l'on ſuppoſe $d\gamma$ = 0, d demi-diamètre de Mars = 0, d diſtance de Mars à la Terre = 0, & que l'on additionne toutes ces équations, l'on aura pour valeur moyenne de la parallaxe moyenne du Soleil,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",999.

Si l'on rejette l'équation (6) qui s'éloigne trop ſenſiblement du réſultat moyen, pour qu'il n'y ait point une erreur dans les obſervations, l'on aura

(2) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",753.

Suite des recherches de la parallaxe du Soleil.

(20.) Pour avoir une idée complète de la parallaxe du Soleil que l'on conclut des obſervations faites en 1751, il faudroit diſcuter avec le même détail toutes les obſervations qui ont eu lieu à cette époque. Comme ce travail m'engageroit dans des diſcuſſions trop conſidérables, & qu'il m'écarteroit peut-être de la vérité en faiſant participer les bonnes obſervations à l'inexactitude de celles qui ſont moins parfaites, je vais préſenter ſeulement le réſultat des Obſervations faites par les Obſervateurs les plus célèbres.

Notice des Obſervations correſpondantes faites en 1751, au Cap, par M. l'abbé de la Caille; à Bologne, par M. Zanotti; à Stockolm, par M. Wargentin; & à Upſal, par M. Strommer.

Obſervation du 31 Août 1751.

(21.) Le 31 Août 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à l'étoile trentième des Poiſſons; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38810, & ſa déclinaiſon de 7^d 24′ 1″ auſtrale.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.e des Poissons. 2′ 48″,1.

Bologne.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.e des Poissons. 2′ 12″,5.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5″,5 dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$\gamma = 30'',1.$

Observation du 1.er Septembre 1751.

(22.) Le 1.er Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap, aux étoiles 30.e & 33.e des Poissons; à Bologne, à l'étoile 30.e des Poissons; & à Stockolm, à l'étoile 33.e des Poissons; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38685, & sa déclinaison de 7d 28′ 46″ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 30.e des Poissons. 2′ 0″,2.
Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33.e des Poissons. 10′ 18″,4.

Bologne.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 30.e des Poissons. 2′ 36″,0.

Stockolm.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'Étoile 33.e des Poissons. 10′ 54″,1.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5″,4 dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne. $\gamma = 30'',6.$

Cap & Stockolm. $\gamma = 35'',7.$

Observation du 2 Septembre 1751.

(23.) Le 2 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Upsal, à l'étoile 33.e des Poissons;

la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38560, & sa déclinaison de $7^d\ 33'\ 31''$ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33.e des Poissons. 2′ 0″,2.

Upsal.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33.e des Poissons. 2′ 35″,5.

Cap & Upsal.

$\gamma = 35'',1.$

Observation du 13 Septembre 1751.

(24.) Le 13 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à Rigel; la disttance de Mars àl a Terre étoit ce jour-là de 0,38331, & sa déclinaison de $8^d\ 25'\ 18''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel......... 8′ 51″,5.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel.......... 8′ 14″,1,

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5 secondes dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$\gamma = 32'',4.$

Observation du 14 Septembre 1751.

(25.) Le 14 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut pareillement comparé, au Cap & à Bologne, à Rigel; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38410, & sa déclinaison de $8^d\ 29'\ 30''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel........ 4′ 43″,2.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel.......... 4′ 5″,1.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Bologne.

$\gamma = 33'',1$.

Obſervation du 24 Septembre 1751.

(26.) Le 24 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Upſal, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,39824, & ſa déclinaiſon de $8^d\ 58'\ 45''$ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau..... 1′ 39″,5.

Upſal.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau...... 2′ 23″,0.

Cap & Upſal.

$\gamma = 43'',5$.

Obſervation du 25 Septembre 1751.

(27.) Le 25 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé au Cap, à Bologne, à Upſal & à Stockolm, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,40106, & ſa déclinaiſon de $9^d\ 0'\ 18''$ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau...... 3′ 14″,6.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau...... 3′ 39″,6.

Upſal.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau...... 3′ 48″,8.

Stockolm.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . . . . . . 3′ 52″,6.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 1″,6 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Bologne.	*Cap & Upſal.*	*Cap & Stockolm.*
$\gamma = 23'',4$.	$\gamma = 34'',2$.	$\gamma = 38'',0$.

Obſervation du 27 Septembre 1751.

(28.) Le 27 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,40620, & ſa déclinaiſon de $9^d\ 2'\ 22''$ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau. . . . . . 5′ 29″,0.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau. . . . . . 5′ 45″,7.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 0″,7 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Bologne.

$\gamma = 16'',0$.

Obſervation du 3 Octobre 1751.

(29.) Le 3 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Stockolm, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,42409, & ſa déclinaiſon de $9^d\ 1'\ 51''$ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau. . . . . . 4′ 15″,1.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau . . . . . . 4′ 58″,1.

Cap & Stockolm.

$\gamma = 43'',0$.

Observation du 5 Octobre 1751.

(30.) Le 5 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Stockolm, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,43067, & sa déclinaison de 8d 58′ 47″ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. . . . . . 1′ 25″,8.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. . . . . . 2′ 0″,1.

Cap & Stockolm.

$\gamma = 34'',3.$

Observation du 6 Octobre 1751.

(31.) Le 6 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap, à Upsal & à Stockolm, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre, étoit ce jour-là de 0,43416, & sa déclinaison de 8d 56′ 50″.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . . . . 0′ 26″,7.

Upsal.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. . . . . . 0′ 3″,3.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . . . . . 0′ 6″,3.

Cap & Upsal. $\gamma = 30'',0.$

Cap & Stockolm. $\gamma = 33'',0.$

Observation du 7 Octobre 1751.

(32.) Le 7 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,43817, & sa déclinaison de 8d 54′ 37″ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau...... 2′ 36″,6.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau...... 2′ 8″,2,

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une diminution de 2″,6 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Bologne.

$\gamma = 31'',0.$

Équations relatives aux Obſervations précédentes.

(33.)

Bologne.

31 Août. (1) Parall. moyenne du Soleil $= 9'',481 + 0,315\, d\gamma + 24'',4\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

1.er Sept. (2) Parall. moyenne du Soleil $= 9'',636 + 0,314\, d\gamma + 24'',7\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

13 Sept. (3) Parall. moyenne du Soleil $= 10'',141 + 0,313\, d\gamma + 26'',1\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

14 Sept. (4) Parall. moyenne du Soleil $= 10'',393 + 0,314\, d\gamma + 26'',9\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

25 Sept. (5) Parall. moyenne du Soleil $= 7'',675 + 0,328\, d\gamma + 19'',2\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

27 Sept. (6) Parall. moyenne du Soleil $= 5'',311 + 0,332\, d\gamma + 13'',1\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

7 Oct. (7) Parall. moyenne du Soleil $= 11'',098 + 0,358\, d\gamma + 23'',0\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

Upſal.

2 Sept. (8) Parall. moyenne du Soleil $= 9'',898 + 0,282\, d\gamma + 24'',6\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

24 Sept. (9) Parall. moyenne du Soleil $= 12'',876 + 0,296\, d\gamma + 31'',1\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

25 Sept. (10) Parall. moyenne du Soleil $= 10'',157 + 0,297\, d\gamma + 24'',6\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

6 Oct. (11) Parall. moyenne du Soleil $= 9'',600 + 0,320\, d\gamma + 21'',1\, d$ diſtance de Mars à la Terre.

Stockolm.

1.er Sept. (12) Parall. moyenne du Soleil = 10",139 + 0,284 $d\gamma$ + 27",1 d distance de Mars à la Terre.

25 Sept. (13) Parall. moyenne du Soleil = 11",324 + 0,298 $d\gamma$ + 26",4 d distance de Mars à la Terre.

3 Oct. (14) Parall. moyenne du Soleil = 13",631 + 0,317 $d\gamma$ + 30",9 d distance de Mars à la Terre.

5 Oct. (15) Parall. moyenne du Soleil = 11",044 + 0,322 $d\gamma$ + 24",1 d distance de Mars à la Terre.

6 Oct. (16) Parall. moyenne du Soleil = 10",757 + 0,325 $d\gamma$ + 23",4 d distance de Mars à la Terre.

Résultat des calculs précédens.

Bologne.

(34.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) qui appartiennent à Bologne, l'on fait $d\gamma = 0$, d distance de Mars à la Terre = 0, l'on aura, par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = 9,"105.

Et si l'on rejette les observations des 27 Septembre & 7 Octobre, dont l'une donne une parallaxe évidemment trop grande, & l'autre une parallaxe évidemment trop petite, l'on aura

(2) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",465.

Upsal.

(35.) Si dans les équations (8) (10) (11) qui appartiennent à Upsal, l'on fait, avec M. l'Abbé de la Caille, $d\gamma = 1",5$, pour avoir égard à la force comparative des lunettes employées au Cap & à Upsal; d distance de Mars à la Terre = 0; & que l'on rejette l'observation du 24 Septembre, qui donne évidemment une parallaxe beaucoup trop grande, l'on aura par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",435.

Stockolm.

(36.) Si dans les équations (12) (13) (15) (16) qui appartiennent à Stockolm, l'on fait, avec M. l'Abbé de la Caille, $d\gamma = 2'',4$, pour avoir égard à la force comparative des lunettes employées au Cap & à Stockolm; *d* distance de Mars à la Terre = 0; & que l'on rejette l'observation du 3 Octobre, qui donne évidemment une parallaxe beaucoup trop grande, l'on aura, par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = 10",086.

(37.) On peut conclure des résultats précédens, qu'en général les observations de Mars ont donné une parallaxe moyenne du Soleil, plus grande que celle qui se déduit des passages de Vénus. En effet, nous avons vu que les passages de Vénus ont donné 8",813 pour valeur de la parallaxe moyenne du Soleil; & quoique les résultats des observations faites par M.rs le Gentil & Cassini de Thury, s'éloignent peu de cette détermination, on voit cependant que les autres observations tendent à donner une plus grande parallaxe. Quoi qu'il en soit, & pour ne rien laisser à desirer sur ce sujet, je dois encore discuter les observations faites à Toulouse, par M.rs d'Arquier & Garripuy.

Notice des Observations faites à Toulouse.

(38.) M.rs d'Arquier & Garripuy n'ont fait que six observations comparables aux observations du Cap; celles des 31 Août & 1.er Septembre 1751, jours auxquels Mars a été comparé à l'étoile 30.e des Poissons, & celles des 24 & 25 Septembre, 7 & 8 Octobre, jours auxquels Mars a été comparé à l'étoile λ du Verseau; voici la notice de ces observations.

Observation du 31 Août 1751.

(39.) Le 31 Août 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile 30.e des Poissons;

la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38810; & ſa déclinaiſon de 7^d 24′ 1″ auſtrale.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.e des Poiſſons. 2′ 48″,1.

Toulouſe.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.e des Poiſſons. 2′ 11″,6.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Toulouſe, Mars avoit éprouvé une augmentation de 13″,4 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Toulouſe.

$\gamma = 23'',1.$

Obſervation du 1.er Septembre 1751.

(40.) Le 1.er Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouſe, à l'étoile 30.e des Poiſſons; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38685, & ſa déclinaiſon de 7^h 28′ 46″ auſtrale.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus auſt. que l'Étoile 30.e des Poiſſons. 2′ 0″,2.

Toulouſe.

Limbe bor. de Mars plus auſt. que l'Étoile 30.e des Poiſſons. 2′ 34″,5.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Toulouſe, Mars avoit éprouvé une augmentation de 13″,2 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Toulouſe.

$\gamma = 21'',1.$

Obſervation du 24 Septembre 1751.

(41.) Le 24 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouſe, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,39824, & ſa déclinaiſon de 8^d 58′ 45″ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau... 1′ 39″,5.

Toulouſe.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau... 2′ 24″,5.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Toulouſe, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4″,6 dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Toulouſe.

$\gamma = 40'',4.$

Obſervation du 25 Septembre 1751.

(42.) Le 25 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouſe, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,40106, & ſa déclinaiſon de 9d 0′ 18″ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau... 3′ 14″,6.

Toulouſe.

Limbe boréal de Mars plus auſtral que λ du Verſeau... 3′ 43″,8.

Dans l'intervalle de l'obſervation du Cap à celle de Toulouſe, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 ſecondes dans ſa déclinaiſon auſtrale.

Cap & Toulouſe.

$\gamma = 25'',2.$

Obſervation du 7 Octobre 1751.

(43.) Le 7 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouſe, à l'étoile λ du Verſeau; la diſtance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,43817, & ſa déclinaiſon de 8d 54′ 37″ auſtrale.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verſeau... 2′ 36″,6.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . 2′ 20″,0.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une diminution de 6″,7 dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$\gamma = 23'',3$.

Observation du 8 Octobre 1751.

(44.) Le 8 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,44233, & sa déclinaison de 8^d 52′ 8″ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . . . . 5′ 8″,7.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . . . . 4′ 48″,4.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une diminution de 7″,6 dans sa déclinaison australe.

Équations relatives aux Observations de Toulouse.

(45.)

31 Août. (1) Parall. moyenne du Soleil $= 7'',346 + 0,318\, d\gamma + 18'',1\, d$ distance de Mars à la Terre.

1.er Sept. (2) Parall. moyenne du Soleil $= 6'',710 + 0,318\, d\gamma + 16'',6\, d$ distance de Mars à la Terre.

24 Sept. (3) Parall. moyenne du Soleil $= 13'',453 + 0,333\, d\gamma + 33'',3\, d$ distance de Mars à la Terre.

25 Sept. (4) Parall. moyenne du Soleil $= 8'',442 + 0,335\, d\gamma + 20'',1\, d$ distance de Mars à la Terre.

7 Oct. (5) Parall. moyenne du Soleil $= 8'',411 + 0,361\, d\gamma + 18'',4\, d$ distance de Mars à la Terre.

8 Oct. (6) Parall. moyenne du Soleil $= 10'',156 + 0,364\, d\gamma + 22'',0\, d$ distance de Mars à la Terre.

(46.)

(46.) Si dans les équations précédentes, l'on fait

$d\gamma = 0$, d distance de Mars à la Terre $= 0$,

l'on aura par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",086.

Si l'on rejette les équations (1) (2) (3), attendu que les deux premières donnent une parallaxe trop petite, & la troisième une parallaxe beaucoup trop grande, on aura

(2) Parallaxe moyenne du Soleil = 9",001.

Je laisse aux Astronomes à décider entre ces différentes hypothèses.

CONCLUSION.

(47.) Pour déterminer, d'après nos calculs, la parallaxe moyenne du Soleil, il ne sera pas inutile de remettre sous les yeux du lecteur les résultats trouvés précédemment: voici le Tableau de ces résultats.

Parallaxe moyenne du Soleil.

Cap & Paris	9",011.
Cap & Gréenwich	9,753.
Cap & Bologne	9,465.
Cap & Toulouse	9,086.
Cap & Upsal	9,435.
Cap & Stockolm	10,086.

Si l'on additionne ces différentes quantités, & que l'on divise la somme par le nombre des observations, l'on aura

Parallaxe moyenne du Soleil = 9",473.

Il paroîtroit donc que la parallaxe moyenne du Soleil, déduite de nos calculs, est de 9",473. Cette parallaxe diffère de 0",660 de celle que nous avons conclue des passages de Vénus; mais il s'en faut beaucoup que nous donnions à cette dernière détermination le même degré de confiance qu'à celle qui est déduite des passages de Vénus. En effet, si l'on fait attention combien les erreurs sur les distances observées

de Mars aux différentes Étoiles, ſur les demi-diamètres de Mars, ſous les rapports des différentes diſtances de Mars à la Terre, influent ſur les réſultats, on ne ſera point étonné de la grande diverſité des parallaxes conclues de chaque obſervation particulière. Il eſt vrai que ſi l'on conſidère un très-grand nombre de ces obſervations, ainſi que nous l'avons fait, comme alors toutes les combinaiſons des erreurs ont dû naturellement ſe préſenter, on peut ſe flatter d'avoir un réſultat moyen qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité; mais il faut convenir en même-temps que l'enſemble des obſervations des paſſages de Vénus, ont donné des réſultats bien plus cohérens entr'eux, & qu'au moyen de ces paſſages on eſt parvenu à des concluſions plus déciſives. Quoi qu'il en ſoit, il me ſuffit d'avoir donné le calcul des obſervations faites ſur Mars en 1751; & comme j'ai laiſſé dans les équations, les termes d'après leſquels on pourra toujours corriger les erreurs de mes ſuppoſitions, on ne peut rien ajouter à la généralité de ces calculs. Je crois ſeulement devoir remarquer en finiſſant ce Mémoire, que quelque préférence que l'on accorde aux paſſages de Vénus, la juſtice exige néanmoins que ces paſſages ne faſſent point oublier entièrement les travaux de Dominique Caſſini ſur la parallaxe de Mars; & l'Académie aura toujours à ſe glorifier d'avoir donné, dès la fin du ſiècle dernier, une ſolution fort approchée du problème de la diſtance du Soleil à la Terre.



TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

Déduite très-brièvement & complétement, de la seule solution algébrique du plus simple de ses Problèmes généraux, au moyen des diverses transformations dont les rapports des sinus & cosinus, tangentes & cotangentes, sécantes & cosécantes d'un même Arc ou d'un même Angle plan, rendent cette solution susceptible, & comprenant quelques Formules & Observations qu'on croit utiles & neuves.

Par M. l'Abbé DE GUA.

LES progrès rapides que l'Astronomie a faits dans le dernier siècle & de nos jours, & les avantages précieux qu'un grand nombre d'Arts très-importans pour la société, en retirent continuellement, sembleroient pouvoir être envisagés comme un signal donné à tous les Géomètres, de renouveler sans cesse leurs efforts pour perfectionner les nombreuses inventions que les Mathématiques pures ont fournies à cette Science, & qu'elle emploie si heureusement dans ses pratiques les plus utiles; & en même temps que la plupart des propositions dont le corps compose la partie de la Géométrie-pratique, qu'on nomme *Trigonométrie sphérique*, sont certainement de ce genre, plusieurs motifs pouvoient donner lieu de conjecturer que ce ne seroit pas vainement qu'on tenteroit de simplifier les résultats auxquels elles conduisent, ou du moins leurs expressions.

Le besoin pressant que les premiers observateurs & calculateurs des mouvemens célestes reconnurent avoir de ces sortes de propositions, en ayant en effet rendu la recherche

un peu précoce, on fut principalement redevable des premières qui furent découvertes, soit à des réflexions aussi profondes que variées, sur celles des propriétés de la Sphère que les élémens de Géométrie comprennent, soit, & peut-être davantage, à l'analogie dont on s'étaya des propriétés des triangles rectilignes, d'abord rectangles & puis obliqu'angles, avec celles que pourroient avoir les triangles sphériques de l'une & de l'autre espèce.

Trop content, dans un temps où les Mathématiques n'étoient pas encore fort avancées, d'être parvenu de manière ou d'autre, à former, des premiers matériaux qu'on amassa en cette sorte, un système assez étendu, on dut vraisemblablement rejeter comme à peu-près chimérique, toute idée de le simplifier : ce préjugé paroît même s'être soutenu à l'époque du renouvellement des Lettres, qui en déracina tant d'autres; & combien n'en retrouve-t-on pas encore de vestiges dans tous les Traités de Trigonométrie sphérique qui ont paru depuis cette grande époque, ou même récemment?

La marche lente & toujours imitée presque servilement, de la Trigonométrie rectiligne, par laquelle on s'y élève d'ordinaire, suivant que je viens de le donner à entendre, de la considération des seuls triangles sphériques rectangles, à celle des obliqu'angles (parmi lesquels il en est pourtant qui ayant un côté de 90 degrés, ne sont pas moins simples que les premiers), & le grand nombre d'élémens différens de ceux des données mêmes des questions, & relatifs seulement à ceux-ci (tels que les demi-sommes ou les demi-différences de côtés ou d'angles), desquels on y fait fréquemment usage, y décèlent incontestablement, une synthèse un peu pénible; & quoique souvent adroite, d'autres fois pourtant, à peu-près forcée, dont les productions trop prolixes peuvent à la vérité s'attirer l'admiration, mais ne satisfont pas entièrement l'esprit.

L'Analyse, au moyen de laquelle quelques modernes ont tenté de suppléer à de si longues déductions, a d'ailleurs été jusqu'ici très-incomplète, & trop assujettie à partir de plusieurs

principes à la fois, employés précédemment par la ſynthèſe, ou à aboutir à des concluſions déjà connues, trop calquée en un mot, ſur un plan dont elle auroit dû au contraire, faire abſolument abſtraction, ou ſe propoſer du moins la réforme.

C'étoit d'abord ſans démonſtration que Viete avoit donné depuis long-temps, concernant cet objet *(a)*, quelques règles qu'on retrouvera dans partie des énoncés ou formules des miennes: Mayer *(b)* démontra, un ſiècle ou environ plus tard, la première, de la même manière que je préférerai d'employer: feu M. de Maupertuis *(c)* fit, à peu de diſtance de-là, ſervir celle-ci, d'introduction à ſon élégante Aſtronomie nautique: Léonard Euler envisageant en 1753, les côtés des triangles ſphériques, ſous le ſeul point de vue des plus courtes diſtances d'un de leurs termes à l'autre, donna en conſéquence une Trigonométrie ſphérique déduite des ſeuls principes *des plus grands & des plus petits* *(d)*; ouvrage tranſcendant, qui, tout bon qu'il puiſſe être jugé en le conſidérant comme introduction à un autre important dont il eſt en effet ſuivi, ſous le titre de *Trigonométrie ſphéroïdique*, mériteroit ſeul moins d'éloges, à raiſon de n'être point élémentaire, comme on auroit eu droit de l'attendre d'un traité dont la lecture devoit précéder celle des élémens d'Aſtronomie, & dès-lors deſtiné par ſa nature, principalement aux commençans: Lambert qui travailla depuis ſur la même matière, s'attacha ſur-tout à appliquer aux calculs des Tables qu'elle offre à conſtruire, la théorie des ſinus & coſinus qu'il nomme *hyperboliques*, & qu'il dit avec raiſon être équivalens à des ſinus & coſinus circulaires imaginaires, de laquelle les fondemens ſe trouvent dans le livre de Roger Cotes, intitulé: *Harmonia menſurarum*,

(a) Voyez l'édition *in-folio* des Elzévirs, *page 431*, où ſe trouve, à l'égard des règles ſemblables à ma ſeptième & à ma neuvième, une faute mal corrigée dans l'*Errata*.

(b) Voyez les Mémoires de l'Académie impériale de Péterſbourg, *tome II*.

(c) Voy. les Mém. de l'Ac. Royale de Berlin, pour l'année 1753.

(d) Voyez les mêmes Mémoires, pour l'année 1768.

mais les détails ſavans lui appartiennent, & dont je ne ſerai du reſte aucun uſage; & en convenant que M. Jean Trembley donne dans ſon traité nouveau de Trigonométrie ſphérique, de belles applications des règles déjà connues, je ne trouve point qu'il y perfectionne, ni les règles, ni leurs déductions; & je croirois au contraire qu'il n'a pas eu l'idée de ce qu'il y auroit eu à faire pour en venir à bout, ſur ce qu'il ſe félicite d'avoir réduit à quatre figures, indépendamment de celles qui pourroient avoir été néceſſaires à l'établiſſement de divers principes qu'il ſuppoſe, tout ce qu'il avoit à dire concernant cet objet, tandis qu'une ſeule figure très-ſimple va me ſuffire pour en offrir la déduction la plus complète.

Mais en même temps que je rappelle ici tous ces faits, je ne dois pas négliger d'y obſerver que bien que Mayer diſe expreſſément, *page 12*, qu'on peut déduire d'une ſeule formule qu'il rapporte, tout le reſte de la Trigonométrie ſphérique, il ne paroît pourtant avoir en vue dans cet endroit, ni une déduction purement analytique, ſemblable à celle que je me propoſe de faire, ni des formules neuves pour des cas différens de celui auquel appartient la formule dont il parle, & qui m'eſt commune avec lui.

En effet, il s'empreſſe, d'abord après qu'il a eu démontré cette formule, d'en conclure les énoncés de celles qu'on emploie d'ordinaire pour les effections aſtronomiques auxquelles elle peut ſervir immédiatement; il ſemble faire alors uniquement alluſion à des concluſions purement ſynthétiques, nommément à celle de ce genre par laquelle on paſſe *géométriquement* du cas des côtés ou angles donnés, à celui des angles & côtés reſpectivement donnés auſſi; il dit enfin qu'il n'entre pas dans de pareilles recherches, pour ne pas *jam actum agere*, ce qui ne laiſſe nullement entendre qu'il ait eu en aucune ſorte connoiſſance des calculs, en partie aſſez curieux & adroits, qu'on verra m'avoir peu-à-peu fourni la totalité de mes règles & formules.

Ces réflexions devoient ſuffire, autant que j'ai pu juger, pour me convaincre que la Trigonométrie ſphérique préſen-

toit encore une eſpèce de mine précieuſe, qu'on jugeroit mal-à-propos épuiſée; & j'ai été d'ailleurs d'autant plus encouragé à tourner avec ardeur mes recherches de ce côté-là, que l'Ouvrage dont j'ai cru y apercevoir les matériaux, m'a paru devoir former une très-bonne introduction à deux autres que j'inſérerai à la ſuite*, dans ce même volume de nos Mémoires.

Telles ont donc été les vues d'après leſquelles je me ſuis peu-à-peu engagé dans les diverſes recherches que je ſoumets au jugement de l'Académie; l'attention qu'elle voudra bien donner à ce Mémoire où je rends compte des concluſions auxquelles elles m'ont conduit, la mettra à portée de décider ſi, comme je le croirois, je ſuis fondé à m'attribuer mes règles 5.me & 9.me, & dès-lors mes 6.me & 10.me, & ſur-tout les formules ſimplifiées que j'en donne; toutes mes démonſtrations de règles & leurs ſimplifications, à celles de la première & de la ſeconde règle près; mes éclairciſſemens, importans à ce qu'il me ſemble, & deſirés vainement depuis long-temps, ſur la propoſition dont j'ai déjà parlé, & qui, de la ſolution du cas de certains côtés ou angles donnés, conclut celle du cas des angles & côtés oppoſée donnés auſſi; mes conſtructions dans la ſphère même, de ceux des problèmes que j'aurai réſolus, deſquels l'inconnue ſe ſera trouvée ſuſceptible de deux valeurs; & diverſes obſervations qu'on trouvera répandues dans tout l'ouvrage; ou même ſi le ſpectacle que je me flatte d'offrir ici d'une ſcience entière & très-utile, déduite ſuccinctement, & toujours uniformément, d'une propoſition unique très-ſimple, ne pourroit pas ſeul, être jugé propre à l'intéreſſer.

Première Demande.

Soient déſignés algébriquement les coſinus des trois angles du triangle ſphérique *GSP (Planche I, figure 1)*, par les

* Les deux arcs ponctués *GE*, *GF*, de la figure, ne ſeront d'uſage que dans les deux dernières obſervations générales de l'ouvrage; il n'y faut faire aucune attention dans la lecture de tout ce qui précèdera.

mêmes lettres romaines & majuſcules, *G*, *S* & *P*, qui déſignent géométriquement dans *la figure*, les angles mêmes; leurs ſinus par les lettres grecques analogues, majuſcules auſſi, Γ, Σ & Π; les coſinus de côtés reſpectivement oppoſés à chacun de ces angles, par les mêmes lettres romaines, mais minuſcules, *g*, *s* & *p*, qui ſe rapportent à ceux des angles, & leurs ſinus par les lettres grecques analogues, minuſcules auſſi, γ, σ & π; en ſorte qu'on ait

Coſ. $GSP = S$, ſin. idem $= \Sigma$; coſ. $GP = s$, ſin. idem $= \sigma$,
Coſ. $SPG = P$, ſin. idem $= \Pi$; coſ. $SG = p$, ſin. idem $= \pi$,
Coſ. $SGP = G$, ſin. idem $= \Gamma$; coſ. $SP = g$, ſin. idem $= \gamma$.

Qu'on repréſente d'ailleurs les cotangentes & tangentes des mêmes angles & côtés du triangle ſphérique, par les mêmes lettres romaines & grecques, majuſcules & minuſcules, qui en auront indiqué reſpectivement les coſinus & ſinus, mais accompagnées en arrière ou à gauche, d'une petite équerre à branches doubles l'une de l'autre, la grande poſée verticalement à côté de la lettre, & la petite vers le haut & ſe retournant en dehors; en ſorte qu'on ait

Cotang. $GSP = \lrcorner S$, tang. id. $= \lrcorner \Sigma$; cotang. $GP = \lrcorner s$, tang. id. $= \lrcorner \sigma$,
Cotang. $SPG = \lrcorner P$, tang. id. $= \lrcorner \Pi$; cotang. $SG = \lrcorner p$, tang. id. $= \lrcorner \pi$,
Cotang. $SGP = \lrcorner G$, tang. id. $= \lrcorner \Gamma$; cotang. $SP = \lrcorner g$, tang. id. $= \lrcorner \gamma$.

Qu'enfin les mêmes lettres romaines & grecques, majuſcules & minuſcules, accompagnées vers le bas & en arrière, ou à gauche, de la petite équerre dont on vient de parler, mais la petite branche poſée en arrière & verticalement de haut en bas, & la grande couchée horizontalement, de façon à couper en quelque ſorte la lettre, marquent reſpectivement les coſécantes & ſécantes des mêmes angles & côtés, en ſorte qu'on ait

Coſec. $GSP = \ulcorner S$, ſec. id. $= \ulcorner \Sigma$; coſec. $GP = \ulcorner s$, ſec. id. $= \ulcorner \sigma$,
Coſec. $SPG = \ulcorner P$, ſec. id. $= \ulcorner \Pi$; coſec. $SG = \ulcorner p$, ſec. id. $= \ulcorner \pi$,
Coſec. $SGP = \ulcorner G$, ſec. id. $= \ulcorner \Gamma$; coſec. $SP = \ulcorner g$, ſec. id. $= \ulcorner \gamma$.

Obſervations

Obſervations concernant cette première Demande.

Nous avons préféré, pour employer à la déſignation géométrique de notre figure, & à la déſignation algébrique des coſinus & ſinus, cotangentes & tangentes, coſécantes & ſécantes, de ſes angles & côtés, les trois lettres de l'alphabet, dont il nous a paru que les expreſſions romaines & grecques, majuſcules & minuſcules, différoient le plus les unes des autres; nous déſignons d'ailleurs, les cotangentes & tangentes, & les coſécantes & ſécantes, par les marques que nous avons jugées les plus analogues au contact & à la ſection; elles précèdent leurs lettres, pour qu'on connoiſſe d'avance quelles devront être les déſignations ſpécifiques de celles-ci; elles ſont repliées, la première en haut & vers la gauche, la ſeconde en bas & à gauche auſſi, pour éviter qu'on ne confonde, la première avec la marque des minutes d'un chifre précédent, ou avec le Γ grec majuſcule, & la ſeconde avec le même Γ, ou avec le ſigne *moins*; & nous les plaçons en arrière de la lettre, pour qu'on les diſtingue des expoſans de puiſſances de cette lettre; algorithme dont nous croyons les divers articles propres à rappeler facilement & ſans confuſion à l'eſprit, les rapports & les oppoſitions des diverſes lignes dont nous devons avoir ſouvent occaſion de faire mention enſemble.

Seconde Demande.

Tout arc & tout angle-plan, donne lieu à une proportion géométrique entre ſon coſinus, ſon ſinus, le rayon & ſa tangente, à une autre proportion géométrique entre ſa ſécante, ſa tangente, ſa coſécante & le rayon, & à des proportions géométriques continues, entre ſon coſinus, le rayon & ſa ſécante, & entre ſa tangente, le rayon & ſa cotangente; de toutes leſquelles il réſulte que ſon coſinus & ſon ſinus étant, par exemple, repréſentés reſpectivement par s & par σ, & le rayon par l'unité, on aura ſa tangente,

ℸ $\sigma = \frac{\sigma}{s}$, ſa ſécante, ⊏ $\sigma = \frac{1}{s}$, ſa cotangente,

ℸ $s = \frac{s}{\sigma}$, & ſa coſécante, ⊏ $s = \frac{1}{\sigma}$.

Obſervations ſur cette Demande.

Toutes les lignes dont on parle ici, ſont, ſans exception, ſuſceptibles des dénominations de poſitives & négatives, ou peuvent indifféremment admettre au-devant d'elles, les deux ſignes d'oppoſition + & —. Les coſinus, par exemple, ſont poſitifs dans les angles ſaillans aigus, depuis 0° juſqu'à 90° deviennent négatifs dans les angles ſaillans obtus, depuis 90° juſqu'à 180°, reſtent tels dans les angles rentrans obtus, depuis 180° juſqu'à 270^d, & redeviennent poſitifs dans les angles rentrans aigus, depuis 270° juſqu'à 360°; tandis que les ſinus ſont poſitifs dans tous les angles ſaillans, aigus ou obtus, depuis 0° juſqu'à 180°, mais deviennent négatifs dans tous les angles rentrans, obtus & aigus, depuis 180° juſqu'à 360°; & il en eſt de même à l'égard des coſinus des angles négatifs, ſupplémens à quatre droits des poſitifs. Quant aux tangentes & cotangentes, ſécantes & coſécantes, les premières ſont poſitives ou négatives, ſelon l'identité ou la diverſité de ſigne des lettres, dont la demande actuelle montre qu'elles repréſentent les quotiens, & les dernières ſuivent, relativement à une telle alternative, la loi du coſinus ou du ſinus, par lequel il faut, d'après la même demande, diviſer l'unité pour en avoir la valeur.

Nous ne donnons point pour neuve, cette diſtinction des ſignes des coſinus & ſinus, cotangentes & tangentes, coſécantes & ſécantes, des arcs ou angles, ſelon que toutes ces quantités peuvent ſe rapporter à des angles ſaillans ou rentrans, aigus ou obtus; parce que les réſultats que divers Géomètres nous ont laiſſés des additions & ſouſtractions réitérées ou entre-mêlées, des mêmes arcs ou angles, pourroient d'une part prouver que ces auteurs ne l'ont pas méconnue, & que d'ailleurs Dom Charles Worſley l'a même expoſée aſſez au long, dans ſon *Analyſe des Meſures*,

des Rapports & des Angles ; mais très-ſurpris en même-temps de n'en avoir vu faire mention à aucun des auteurs élémentaires qui ont traité de la confection des Tables des ſinus. . &c, & dès-lors des additions & ſouſtractions réitérées ou entre-mêlées, d'arcs ou d'angles, dont nous venons de parler, & pour la certitude deſquelles elle nous a paru néceſſaire, nous avons été d'autant plus attentifs à éviter ce défaut, que cet ouvrage devoit nous préſenter des occaſions actuelles d'additions de trois & quatre angles à la fois, & de ſouſtractions analogues.

Si pourtant le préjugé de ce ſilence abſolu ſur un tel article, de la part des auteurs élémentaires en cette matière, qui nous ont précédés, laiſſoit encore quelque doute dans l'eſprit de certains de nos lecteurs, concernant la diſtinction dont il eſt queſtion, nous nous croirions ſuffiſamment en état de le diſſiper en obſervant,

1.° Que faute de ſe prêter à une telle diſtinction, on ne pourroit, dans la conſidération du progrès de l'angle, par le mouvement circulaire du rayon, d'une extrémité d'un diamètre à l'autre, ou depuis 0° juſqu'à 180°, revenir du dernier terme au premier, que par un ſaut bruſque de toute une demi-circonférence, proſcrit par la loi de continuité, dont le génie de Léibnitz a ſi bien établi l'empire ſur toutes les Sciences.

2.° Qu'on méconnoîtroit, en ſe permettant un ſaut ſi étrange, l'inſtruction lumineuſe que peut donner ſur ce ſujet l'analyſe Mathématique de la Polyſection des arcs & angles, lorſqu'elle aſſigne, par exemple, pour le tiers cherché d'un arc ou angle donné, d'abord le tiers de cet arc ou angle, conformément à la notion qu'on s'en eſt formée, puis le tiers de la ſomme de cet arc ou angle, conformément à la même notion, & d'une circonférence, c'eſt-à-dire, le tiers d'un arc ou angle plus grand de 360° que le premier, & terminé par les mêmes limites, puis le tiers de la ſomme de ce même premier arc ou angle, & de deux circonférences, c'eſt-à-dire, le tiers d'un troiſième arc ou angle plus grand

de 720° que le 1.er & de 360° que le 2.d & compris toujours entre les mêmes limites, mais jamais le tiers de la somme du même premier arc ou angle, & d'une demi-circonférence.

3.° Qu'on s'astreindroit encore par-là, à borner la belle proposition élémentaire, que la somme des angles de tout polygone rectiligne est égale à autant de fois 2 droits moins 4, que le polygone a de côtés, aux seuls polygones formés entièrement d'angles saillans; tandis qu'elle s'étend également à ceux qui sont formés en partie d'angles rentrans, selon que feu M. Bezout l'a déjà remarqué à la suite du *nombre 86* de ses Élémens de Géométrie.

Mais outre les preuves que tout cela peut présenter de la justesse de notre notion des cosinus négatifs & puis positifs, & des sinus toujours négatifs, des angles rentrans, devant tous, ainsi que l'a remarqué encore feu M. Bezout, être censés d'un nombre de degrés au-dessus de 180°, la demande suivante nous en offrira une nouvelle dont il sera impossible d'éluder en aucune sorte la force, en attendant même que les résultats de nos règles ou formules trigonométrico-sphériques concourent à la confirmer.

Troisième Demande.

On supposera ici les règles pour prendre les cosinus & sinus de la somme ou de la différence de deux arcs ou angles désignés l'un & l'autre par leurs cosinus & sinus propres, desquelles divers auteurs de Trigonométrie rectiligne ont fait usage dans leurs constructions des Tables des sinus, &c. *comme démontrées d'abord sur les arcs ou angles de moins que 90 degrés, & pouvant ensuite être appliquées avec les changemens convenables des signes de quelques lettres, aux arcs ou angles d'un nombre de degrés compris entre 90 & 180 degrés, ou même,* auroient-ils pu ajouter, *entre 180 & 360 degrés;* savoir, que nommant, par exemple, respectivement *m* & *n*, les cosinus, & μ & ν, les sinus des deux arcs ou angles donnés, d'un nombre de degrés chacun moindre que 90, les cosinus *de leur somme*

& de leur différence feront refpectivement, $mn - \mu\nu$, & $mn + \mu\nu$; & les finus *de leur fomme & de leur différence* feront refpectivement auffi, $m\nu + n\mu$, & $m\nu - n\mu$; d'où réfultera ce qu'ils devront encore être dans tous autres cas, fur l'efpèce & le rapport mutuel des deux arcs ou angles donnés.

Obfervation fur cette Demande.

Cette demande fuffiroit, felon que nous l'avons annoncé tout-à-l'heure, pour mettre hors de toute conteftation, les notions, tant des cofinus négatifs ou pofitifs, que des finus négatifs, fe rapportant les uns & les autres à des arcs ou angles de plus que 180 degrés, ou rentrans.

En effet, 1.° pour avoir, fuivant la règle qu'elle fuppofe, le cofinus de la fomme de deux arcs ou angles, tous deux de l'efpèce qu'on a jufqu'ici nommés fimplement *obtus*, mais que je préférerois de nommer *faillans-obtus*, & dont on convient que les cofinus propres font négatifs, & les finus propres pofitifs, il n'y aura évidemment aucun figne à changer dans la formule $mn - \mu\nu$, repréfentative de ce cofinus; puifque les deux lettres romaines m & n changeant à-la-fois de figne, leur produit mn devra conferver le même figne $+$ qu'il étoit cenfé avoir auparavant, qu'à plus forte raifon le produit $\mu\nu$ devra-t il auffi conferver fon figne $-$, les deux lettres grecques μ & ν qui en font les élémens, n'ayant point changé le leur, & que le cofinus de fomme fera feulement négatif ou pofitif, felon que mn fera plus petit ou plus grand que $\mu\nu$, alternative qui revient à celle de la fomme propofée, $<$ ou $>$ que 270 degrés.

2.° Pour avoir le finus de la même fomme d'arcs ou d'angles, il faudra changer dans la formule $m\nu + n\mu$, du finus de fomme, les fignes des lettres romaines, en ne touchant point à ceux des lettres grecques, ce qui rendra l'expreffion changée, $-m\nu - n\mu$, du finus de fomme, néceffairement négative, & en conféquence ce finus lui-même, négatif auffi.

3.° La différence négative de deux angles aigus, ou *faillans-*

aigus, dont on ſuppoſeroit celui qui devroit être ſouſtrait, le plus grand, ſe réduiſant à un angle rentrant-aigu, & devant ainſi avoir un ſinus négatif & un coſinus poſitif, les deux formules en donnent l'indication, en ce que $n\mu$ qui eſt négatif dans la formule du ſinus, devient alors, contre ce qu'on y ſuppoſoit, > que $m\nu$, négatif auſſi, & que les deux parties de la formule du coſinus, reſtant poſitives, il en doit être ainſi de leur ſomme.

Les mêmes notions enfin des coſinus négatifs & de nouveau poſitifs, & des ſinus toujours négatifs, des angles rentrans obtus ou aigus, ou de plus que 180 degrés, recevroient au beſoin un haut degré de confirmation, du dénouement très-lumineux qu'on trouveroit en les approfondiſſant, qu'elles ſeroient propres à donner des divers paradoxes ou doutes, dont la matière des additions & ſouſtractions ſucceſſives & entre-mêlées, des arcs ou angles, a été juſqu'ici embarraſſée.

Corollaire important de cette Demande.

Si un coſinus eſt exprimé par *la différence* ou *par la ſomme* de deux produits tellement conditionnés que les deux produiſans de chacun ſoient coſinus ou ſinus correſpondans à des ſinus ou coſinus que repréſentent reſpectivement les deux produiſans de l'autre, ces coſinus & ſinus particuliers & reſpectifs appartiennent dès-lors aux deux parties *d'une ſomme ou d'une différence* d'arcs ou d'angles à laquelle appartient de ſon côté le coſinus primitif ou dont il a été parlé d'abord; & ſi un ſinus eſt exprimé par *la ſomme* ou *par la différence* de deux produits tellement conditionnés que l'un des deux produiſans, tel que ce ſoit, de l'un, étant regardé comme un ſinus ou un coſinus, l'un des deux produiſans de l'autre devienne le coſinus ou ſinus correſpondant, ces deux ſinus & coſinus particuliers & reſpectifs appartiennent dès-lors aux deux parties *d'une ſomme* ou *d'une différence* d'arcs ou d'angles, à laquelle appartient de ſon côté le ſinus primitif dont il a été parlé d'abord.

En ſorte que ſi la ſomme de produits qui devroit en particulier repréſenter un ſinus, ſe trouvoit être négative,

les deux parties de l'arc ou angle, auquel ce ſinus devroit appartenir, formeroient néceſſairement une ſomme de degrés plus grande que 180, ſoit qu'elles dûſſent être l'une & l'autre de valeur moyenne entre 90 & 180 degrés, ſoit que l'une devant être, ainſi que leur ſomme de plus que 180 degrés, l'autre ne pût être que de moins que cela; & ſi la différence de produits qui devroit auſſi repréſenter un ſinus, ſe trouvoit encore être négative, l'une des deux parties de l'arc ou angle auquel cette différence devroit appartenir, pourroit être de moins que 180 degrés, mais les deux pourroient auſſi à la fois, être de moins que 90 degrés, en ſuppoſant que ce fût la plus grande des deux qui dût être ôtée de la plus petite.

Quatrième & dernière Demande.

Nous ſuppoſerons les règles de Trigonométrie rectiligne, qui apprennent que dans tout triangle rectiligne, dont deux côtés & l'angle compris entre ces côtés ſont connus, le troiſième côté doit être égal à la racine carrée de la ſomme des carrés des deux côtés connus, moins le double rectangle des mêmes côtés, multiplié par le coſinus, poſitif pour un angle aigu, & négatif pour un angle obtus, de l'angle donné; & que dans tout autre, dont les trois côtés ſont connus, le coſinus d'un angle quelconque eſt néceſſairement égal au quotient de la diviſion de la ſomme des carrés des côtés qui le comprennent, moins le carré du côté qui lui eſt oppoſé, par le double rectangle des deux premiers de ces côtés, & ſera aigu ou obtus, ſelon que la ſomme des deux premiers carrés ſera plus grande ou plus petite que le troiſième.

PROBLÈME UNIQUE.

Étant donnés deux côtés d'un triangle ſphérique quelconque, & l'angle compris entre ces deux côtés, trouver le troiſième côté!

SOLUTION.

Qu'on tire *(figure 1.re)* d'un angle S du triangle ſphérique GSP, propoſé, deux tangentes SM, SN aux deux

côtés SG, SP qui concourent dans cet angle, & du centre C de la ſphère, des rayons CS, CG & CP, dont les deux derniers formeront, par les rencontres de leurs prolongations avec les tangentes SM, SN, les ſécantes CM, CN, & qu'on prendra tous pour l'unité; qu'on joigne de plus la droite MN; & les deux tangentes SM, SN, c'eſt-à-dire, ſuivant la première demande, $\urcorner\gamma$ & $\urcorner\pi$ ſeront reſpectivement, d'après la ſeconde demande, $= \frac{\gamma}{g}$ & $= \frac{\pi}{p}$, en même-temps que les deux ſécantes CM, CN, ou ſuivant la première demande, $\ulcorner\gamma$ & $\ulcorner\pi$ ſeront reſpectivement, d'après la ſeconde demande, $= \frac{1}{g}$ & $= \frac{1}{p}$.

On aura donc, 1.° en conſéquence de la quatrième & dernière demande, & ſuppoſant le coſinus S poſitif, ſauf à en changer le ſigne s'il ne devoit pas l'être, le carré de MN, l'un des côtés du triangle rectiligne MSN, dont on eſt ſuppoſé connoître les deux autres côtés, ainſi que l'angle que ces côtés comprennent, $= \frac{\gamma^2}{g^2} + \frac{\pi^2}{p^2} - 2\,\frac{S\gamma\pi}{gp}$; 2.° d'après la même demande & la conſidération du triangle rectiligne NCM, dont on connoîtra maintenant les trois côtés, le coſinus cherché S, de l'angle NCM, ou du côté GP du triangle ſphérique,

$$= \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{\gamma^2}{g^2} - \frac{\pi^2}{p^2} + 2\,\frac{S\gamma\pi}{gp}\right)$$

diviſé par $\frac{2}{gp}$, ou (d'après la ſubſtitution de $1 - g^2$ pour γ^2, & de $1 - p^2$ pour π^2) $= \frac{2gp + 2S\gamma\pi}{2} =$ $S\gamma\pi + gp$; formule d'une première règle, qu'il ſemble qu'on tenteroit en vain de ſimplifier.

COROLLAIRE I.

On peut conclure de-là, pour le cas où étant donnés trois côtés d'un triangle ſphérique, on chercheroit à connoître le coſinus de l'angle oppoſé à l'un de ſes côtés, par exemple, à GP,

à *GP,* une ſeconde règle, ſavoir, $S = \frac{s - gp}{\gamma \pi}$, ou ôtant le diviſeur, & abrégeant, conformément à notre ſeconde demande, par l'introduction des coſécantes & cotangentes, en la place des coſinus & ſinus, cette ſeconde formule dégagée de fractions, de la même ſeconde règle, $S = s \sqsubset g \sqsubset p - \urcorner p \urcorner g$.

COROLLAIRE II.

En prenant, au moyen de la valeur de S que donne la formule de notre ſeconde règle, celle de Σ, on trouvera que celle-ci doit être

$$= \frac{\sqrt{[\gamma^2 \pi^2 - (s - gp)^2]}}{\gamma \pi} = \frac{\sqrt{[(1 - g^2) \times (1 - p^2)] - (s - gp)^2}}{\gamma \pi} = \frac{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps)}}{\gamma \pi}.$$

Or, comme le numérateur de la dernière expreſſion comprend préciſément les mêmes fonctions de g, de p & de s, ce numérateur ſeroit par conſéquent le même pour les ſinus de chacun des trois angles du triangle ; & il s'enſuit encore de-là, que les ſinus des trois angles, en S, en G & en P, de tout triangle ſphérique SGP, ſont néceſſairement entre eux comme les fractions $\frac{1}{\gamma \pi}$, $\frac{1}{\gamma \sigma}$ & $\frac{1}{\pi \sigma}$, c'eſt-à-dire, comme ces autres, $\frac{\sigma}{\pi \gamma \sigma}$, $\frac{\pi}{\gamma \pi \sigma}$ & $\frac{\gamma}{\gamma \pi \sigma}$; enfin, ces dernières fractions ayant toutes le même dénominateur, & étant par conſéquent entr'elles, comme leurs numérateurs, on peut conclure de tout cela, ce beau théorème ſi connu, de Trigonométrie ſphérique, que *dans tout triangle ſphérique, les ſinus des angles ſont entr'eux, comme ceux des côtés oppoſés à ces angles.*

Et on doit encore en inférer, que dans tout triangle ſphérique GSP, les produits $\gamma \pi \Sigma$, $\sigma \pi \Gamma$ & $\sigma \gamma \Pi$, ſont tous égaux entr'eux, c'eſt-à-dire, cette autre propriété des triangles ſphériques, que les ſinus de chacun de leurs angles, multipliés par ceux des deux côtés qui comprennent chaque angle, forment un même produit, & que dès-lors les ſinus

des angles ſont dans ces triangles, en raiſon inverſe de celle des produits des ſinus des côtés qui comprennent les angles.

COROLLAIRE III.

Élevant tout-à-la-fois au carré les deux parties de la droite & de la gauche de la formule unique de notre première règle, qu'offre le problème ci-deſſus : tranſpoſant enſuite de la droite à la gauche les deux carrés monomes, qui ſe trouveront par-là au premier de ces côtés d'équation, & élevant de nouveau les deux parties de la droite & de la gauche au carré, on aura

$$\begin{array}{llll} s^4 & -2S^2\gamma^2\pi^2.s^2 & +S^4\gamma^4\pi^4 & =0; \\ & -2g^2p^2 & -2S^2\gamma^2\pi^2.g^2p^2 & \\ & & +g^4p^4 & \end{array}$$

équation dont le ſecond terme a pour coéfficient, le double de la ſomme des produits $S^2\gamma^2\pi^2$ & g^2p^2, pris négativement, & le troiſième terme eſt le carré de la différence des mêmes produits ; laquelle a d'ailleurs pour ſes racines

$$s - S\gamma\pi - gp = 0,$$

d'où nous nous y ſommes élevés,

$$s + S\gamma\pi + gp = 0,$$
$$s - S\gamma\pi + gp = 0,$$
$$\& \; s + S\gamma\pi - gp = 0;$$

dans laquelle enfin il ne ſe trouve que S, coſinus de l'angle en S, de lettre majuſcule, ou ſe rapportant à des angles, en même-temps qu'il n'y manque de lettre minuſcule, ou ſe rapportant à des côtés, que la ſeule lettre σ, ſinus du côté GP oppoſé à l'angle en S; ce qui m'avoit d'abord porté à croire qu'il devroit être aſſez difficile d'en conclure immédiatement, ce théorème de Trigonométrie ſphérique, très-connu auſſi, & non moins beau que le précédent, que toutes les équations qu'on peut former de diverſes fonctions quelconques des côtés & des angles de tout triangle ſphérique, doivent

donner lieu à des équations analogues entre des fonctions semblables des angles & des côtés respectivement.

Dans la vue néanmoins de parvenir à cette conclusion, j'ai d'abord, au moyen des proportions que présente le Corollaire II, entre les sinus des angles & ceux des côtés qui leur sont opposés, pensé à introduire dans l'équation trouvée, des Γ^2 & des Π^2, au lieu des γ^2, π^2, g^2 & p^2, mais sans y faire paroître pour cela des Σ^2 ni des σ^2 (carrés que l'équation que je cherchois ne devoit pas contenir, non plus que celle-ci), & mettant en leur place des $(1 - S^2)$ & $(1 - s^2)$ respectivement; & je me suis réservé d'abréger ensuite le résultat auquel ces substitutions m'auroient conduit, & où les Γ^2 & les Π^2 devroient être semblablement employés, par l'introduction ultérieure, à laquelle elles pourroient donner lieu, soit de $G^2 + P^2$ à la place de $2 - \Gamma^2 - \Pi^2$, soit de $G^2 P^2$ à la place de $1 - \Gamma^2 - \Pi^2 + \Gamma^2 \Pi^2$, soit des carrés des premières de ces quantités, au lieu de ceux des dernières, &c.

Or, cela m'a donné

$$\gamma^2 = \frac{(1 - s^2)\,\Gamma^2}{1 - S^2}, \quad \pi^2 = \frac{(1 - s^2)\,\Pi^2}{1 - S^2},$$

$$g^2 = \frac{1 - S^2 - (1 - s^2)\,\Gamma^2}{1 - S^2}, \text{ \& } p^2 = \frac{1 - S^2 - (1 - s^2)\,\Pi^2}{1 - S^2},$$

& par conséquent

$$S^2 \gamma^2 \pi^2 = \frac{S^2 (1 - s^2)^2\, \Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2},$$

$$\text{\& } g^2 p^2 = \frac{(1-S^2)^2 - (1-S^2).(1-s^2).(\Gamma^2 + \Pi^2) + (1-s^2)^2.\Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2};$$

& j'ai conclu de-là que le double pris négativement de la somme des deux derniers produits, devroit être

$$\frac{-2(1-S^2)^2 + 2(1-S^2).(1-s^2).(\Gamma^2+\Pi^2) - 2(1+S^2).(1-s^2)^2.\Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2},$$

& que le carré de leur différence, de laquelle le numérateur

& le dénominateur se trouveroient avoir $(1 - S^2)$ pour diviseur commun, seroit en même temps

$$\frac{[(1-s^2)^2\,\Gamma^2\,\Pi^2 - (1 - s^2).(\Gamma^2 + \Pi^2) + (1 - S^2)]^2}{(1 - S^2)^2}.$$

Enfin, substituant ces deux valeurs dans la même équation, y donnant au premier terme s^4, le dénominateur $(1 - S^2)^2$ des deux autres, effaçant ensuite par-tout, ce dénominateur $(1 - S^2)^2$, devenu commun à tous les termes, & ordonnant par rapport à S, au lieu de s, j'ai eu pour transformée de l'équation ci-dessus,

$$\begin{array}{lll}
s^4\,.\,S^4 & -\,2\,s^4\,.\,S^2 & +\,s^4 \qquad\qquad = 0. \\
-\,2\,s^2 & +\,4\,s^2 & -\,2\,s^2 \\
+\,1 & +\,2\,s^4\,\Gamma^2 & -\,2\,s^4\,\Gamma^2 \\
 & +\,2\,s^4\,\Pi^2 & -\,2\,s^4\,\Pi^2 \\
 & -\,2\,s^2\,\Gamma^2 & +\,2\,s^2\,\Gamma^2 \\
 & -\,2\,s^2\,\Pi^2 & +\,2\,s^2\,\Pi^2 \\
 & \left.\begin{array}{l}-\,2\,s^6\\+\,4\,s^4\\-\,2\,s^2\end{array}\right\}\Gamma^2\,\Pi^2 & \left.\begin{array}{l}-\,2\,s^6\\+\,4\,s^4\\-\,2\,s^2\end{array}\right\}\Gamma^2\,\Pi^2 \\
 & -\,2\,s^2\,\Gamma^2 & +\,1 \\
 & -\,2\,s^2\,\Pi^2 & +\,2\,s^2\,\Gamma^2 \\
 & +\,2\,\Gamma^2 & +\,2\,s^2\,\Pi^2 \\
 & +\,2\,\Pi^2 & -\,2\,\Gamma^2 \\
 & \left.\begin{array}{l}-\,2\,s^4\\+\,4\,s^2\\-\,2\end{array}\right\}\Gamma^2\,\Pi^2 & -\,2\,\Pi^2 \\
 & & \left.\begin{array}{l}+\,2\,s^4\\-\,4\,s^2\\+\,2\end{array}\right\}\Gamma^2\,\Pi^2 \\
 & & +\,s^4\,\Gamma^4 \\
 & & -\,2\,s^4\,\Gamma^2\,\Pi^2 \\
 & & +\,s^4\,\Pi^4 \\
 & & -\,2\,s^2\,\Gamma^4 \\
 & & +\,4\,s^2\,\Gamma^2\,\Pi^2 \\
 & & -\,2\,s^2\,\Pi^4 \\
 & & +\,\Gamma^4 \\
 & & -\,2\,\Gamma^2\,\Pi^2 \\
 & & +\,\Pi^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} * & * & \left.\begin{array}{l} +2s^6 \\ -6s^4 \\ +6s^2 \\ -2 \end{array}\right\} \Gamma^4\Pi^2 \\ & & \left.\begin{array}{l} +2s^6 \\ -6s^4 \\ +6s^2 \\ -2 \end{array}\right\} \Gamma^2\Pi^4 \\ & & \left.\begin{array}{l} +s^8 \\ -4s^6 \\ +6s^4 \\ -4s^2 \\ +1 \end{array}\right\} \Gamma^4\Pi^4 \end{array}$$

Laquelle, au moyen de la diviſion des coéfficiens de ſes trois termes, par $s^4 - 2s^3 + 1$, ou par $(s^2 - 1)^2$, s'eſt réduite à

$$\begin{array}{lll} S^4 - 2 \ldots\ldots S^2 & + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0. \\ \quad +2\Gamma^2 & -2\Gamma^2 & \\ \quad +2\Pi^2 & -2\Pi^2 & \\ \quad \left.\begin{array}{l} -2s^2 \\ -2 \end{array}\right\}\Gamma^2\Pi^2 & \left.\begin{array}{l} -2s^2 \\ -2 \end{array}\right\}\Gamma^2\Pi^2 & \\ & +(\Gamma^2 + \Pi^2)^2 & \\ & +2(s^2 - 1).(\Gamma^2 + \Pi^2).\Gamma^2\Pi^2 & \\ & +(s^2 - 1)^2.\Gamma^4\Pi^4 & \end{array}$$

Et après l'emploi dans celle-ci, de $-2G^2P^2$, à la place des trois premiers membres & de la dernière partie du quatrième membre de ſon ſecond terme, & celui, dans ce qui reſtera du dernier terme, de G^4P^4, au lieu des deux premiers, du quatrième, du cinquième, & des premières parties du ſixième & du ſeptième membres de ſon dernier terme (membres du dernier terme, deſquels la totalité forme en effet le carré de $1 - \Gamma^2 - \Pi^2 + \Gamma^2\Pi^2$, ou de G^2P^2), donne enfin

$$\begin{array}{llll} S^4 - 2s^2\Gamma^2\Pi^2 & .\ S^2 & + s^4\Gamma^4\Pi^4 \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \quad - 2G^2P^2 & & - 2s^2\Gamma^2\Pi^2G^2P^2 & = 0. \\ & & + G^4P^4 & \end{array}$$

dernière qui comprend les mêmes fonctions des carrés des cosinus & sinus des angles & côtés, que la primitive de laquelle on l'a déduite, au moyen de trois transformations, comprenoit respectivement des côtés & des angles, & a en effet pour racines $S - s\Gamma\Pi - GP = 0$, $S + s\Gamma\Pi + GP = 0$, $S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, & $S + s\Gamma\Pi - GP = 0$, expressions parfaitement analogues à celles des racines de la même primitive.

Comme pourtant il ne résulte jusqu'ici autre chose de ce que nous venons de montrer, sinon que la racine

$$s - S\gamma\pi - gp = 0$$

de la première équation de laquelle nous étions partis dans le calcul précédent, emporte la vérité de l'alternative des racines de la seconde, il paroît à propos, pour mieux déterminer la relation de simultanéité de la même racine, $s - S\gamma\pi - gp = 0$, de la première équation, avec telle ou telle racine de la seconde, plutôt qu'avec telle ou telle autre de celle-ci, de substituer successivement dans les racines de celle-ci, les valeurs de $\Gamma\Pi$ & de GP en lettres minuscules romaines ou grecques, & de comparer ensuite les valeurs de S en ces lettres minuscules, qu'on aura pu tirer de-là, avec l'autre valeur de S en ces mêmes lettres minuscules, que fournit la racine même primitive $s - S\gamma\pi - gp = 0$, pour admettre comme simultanée avec celle-ci, toute racine de la seconde équation, d'après laquelle une telle comparaison conduira à une équation identique, & refuser au contraire la même simultanéité à toute autre racine de la seconde équation, d'après laquelle une telle comparaison jetteroit dans des conditions, fut-ce même possibles.

Or GP est, d'après le Corollaire I de la solution du problème unique sur lequel se fonde tout ce que nous avons annoncé ci-dessus, que notre Trigonométrie sphérique compren-

droit, $= \frac{(g - sp) \times (p - sg)}{\gamma \pi}$, ou $= \frac{gp - sg^2 - sp^2 + s^2 gp}{\surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}$; & Γ & Π devant être, conformément au Corollaire II de la même ſolution de problème, reſpectivement

$$= \frac{\surd(1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp)}{\sigma \pi}, \& = \frac{\surd(1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2gsp)}{\sigma \gamma},$$

ou, ce qui eſt la même choſe,

$$= \frac{\surd(1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp)}{\surd(1 - s^2 - p^2 + s^2 p^2)}, \& = \frac{\surd(1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp)}{\surd(1 - s^2 - g^2 + s^2 g^2)},$$

on aura de plus $\Gamma \Pi = \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp}{\surd(1 - s^2 - p^2 + s^2 p^2) \times \surd(1 - s^2 - g^2 + s^2 g^2)}$

$= \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp}{(1 - s^2)\surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}$, & par conſéquent $s\Gamma\Pi - GP$, que la règle généralement établie pour le cas où étant connus deux angles & le côté compris entre ces angles, on cherche la valeur du troiſième angle, preſcrit de faire $= S$, devra être $= \frac{s - s^3 - sg^2 - sp^2 + 2s^2 gp - gp + sg^2 + sp^2 - s^2 gp}{(1 - s^2) . \surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}$

$$= \frac{(1 - s^2) \times (s - gp)}{(1 - s^2) \surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)} = \frac{s - gp}{\surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)},$$

valeur, dont la comparaiſon avec la même valeur, $S = \frac{s - gp}{\surd(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}$, que fournit immédiatement la racine de la première équation, nous donne l'identicité $0 = 0$, ou nous démontre la ſimultanéité néceſſaire des racines que nous comparions, & dès-lors, & d'après notre certitude antérieure ſur la vérité de la première, la vérité de la ſeconde, c'eſt-à-dire, celle de la règle reçue pour le cas que nous venons de décrire, ou de $S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, ou $S = s\Gamma\Pi - GP$.

Il eſt vrai que ſi au lieu de faire ici $S = s\Gamma\Pi - GP$, nous l'avions ſuppoſé $= - s\Gamma\Pi + GP$, en employant ainſi pour ſimultanée à notre racine $s - S\gamma\pi - gp = 0$ de la première équation, la racine $S + s\Gamma\Pi - GP = 0$, & non $S - s\Gamma\Pi + GP$ de la ſeconde, nous ſerions

parvenus de même à une identicité; mais mal-à-propos prétendroit-on conclure de-là, une double règle pour le cas trigonométrico-ſphérique dont nous parlons; puiſque la racine de la ſeconde équation, nouvellement employée, pouvant ſe changer en $- S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, & ne différant alors de $+ S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, qu'on avoit employée auparavant, que par le ſigne de la lettre S, dégagée dans les deux, de tout facteur, la diverſité entre l'une & l'autre doit uniquement indiquer que ſi la différence des membres $s\Gamma\Pi$ & GP devient de poſitive négative, l'angle GSP doit être changé d'aigu en obtus.

Mais la comparaiſon des valeurs de S, tirées des deux racines de la ſeconde équation, différentes de $+ S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, & $+ S + s\Gamma\Pi - GP = 0$, avec celle que donne la racine, $s - S\gamma\pi - gp = 0$, de la première; menant au contraire, d'après un calcul ſemblable au précédent, à des conditions, ſavoir, celle de $S - s\Gamma\Pi - GP = 0$, à la condition $p^2 - sgp + g^2 = 0$, & celle de $S + s\Gamma\Pi + GP = 0$, à la condition $p^2 + g^2 = 0$, il s'enſuit toujours de ce que nous venons de dire, que la double racine, $+ S \mp s\Gamma\Pi \pm GP = 0$, de la ſeconde équation, eſt ſeule ſimultanée avec la racine, $s - S\gamma\pi - gp = 0$, de la première, ſelon l'excès de $s\Gamma\Pi$ ſur GP, ou le défaut du premier de ces produits au ſecond, ou que la première de ces formules de racines, qui eſt double, renferme les deux ſeules qu'on puiſſe conclure légitimement de la ſeconde; propoſition à laquelle ce qu'on dit ou laiſſe entendre quelquefois, qu'une telle concluſion d'une de ces formules à l'autre, ne ſauroit avoir lieu dans aucun cas, qu'autant qu'on auroit changé *tous* les côtés & angles de l'une, en *ſupplémens* d'angles & de côtés de l'autre, donneroit pourtant trop d'étendue; puiſque le changement ſimple réciproque de côtés en angles & d'angles en côtés, d'élémens déſignés par quatre lettres différentes, joint à celui de l'angle ſeul dont le coſinus eſt déſigné par la lettre S, en *ſupplément* de côté, c'eſt-à-dire, à celui du ſigne de la ſeule lettre S, en $- s$, ſuffit pour

pour changer parfaitement la formule de racine $+ s - S\gamma\pi - gp = 0$, que nous avons déduite immédiatement de notre problème, en $+ S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, ou en $- S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, que l'on convient généralement & à propos, devoir être employées dans les cas où étant donnés deux angles & le côté compris entre ces angles, on cherche la valeur du troisième angle, ou bien où étant donnés les trois angles, on cherche la valeur de l'un des côtés; proposition enfin, qui offre ainsi un exemple curieux des éclaircissemens importans que des solutions synthétiques, compliquées & obscures, peuvent tirer de l'analyse algébrique de leurs divers élémens.

COROLLAIRE IV.

Il faudra donc, pour résoudre le premier des deux cas, dont nous venons de parler, c'est-à-dire, celui où *étant donnés, par exemple, les deux angles* G *&* P, *& le côté* GP *opposé à l'angle* S, *on chercheroit la valeur de ce troisième angle* S, prendre pour cosinus de ce dernier angle, l'expression $+ s\Gamma\Pi - GP$, ou la différence de $s\Gamma\Pi$ à GP, laquelle rendra l'angle cherché aigu ou obtus, selon qu'elle sera positive ou négative; troisième règle qu'on peut exprimer ainsi, $S = + s\Gamma\Pi - GP$.

COROLLAIRE V.

Et l'on résoudra le second des deux mêmes cas, ou celui *des trois angles donnés, & dans lequel on demanderoit la valeur d'un des côtés*, en faisant le cosinus du côté cherché, ou $s = \frac{S + GP}{\Gamma\Pi}$, premier énoncé d'une quatrième règle, auquel il sera dans la pratique, & pour s'affranchir du calcul des fractions, à propos de préférer celui-ci, tiré de la substitution de sécantes & tangentes, que notre seconde demande enseigne de faire,

$$s = + S \sqsubset G \sqsubset P \pm \mathrm{T} G\, \mathrm{T} P.$$

Nous remarquerons enfin, au sujet de ce qui précède, que si nous avions supposé dans la solution du problème, l'angle GSP obtus, & par conséquent son cosinus $= -s$, il en auroit résulté

$$S = \frac{-s - gp}{\gamma\pi},\ GP = \frac{(g + sp) \times (p + sg)}{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2p^2)}};$$

$$\Gamma\Pi = \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 - 2sgp}{\sqrt{(1 - s^2 - g^2 + s^2g^2)} \times \sqrt{(1 - s^2 - p^2 + s^2p^2)}}$$

$$= \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 - 2sgp}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2p^2)}};\ s\Gamma\Pi - GP$$

$$= \frac{-s + s^3 + sg^2 + sp^2 + 2s^2gp - gp - sg^2 - sp^2 - s^2gp}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2p^2)}};$$

$$= \frac{(1 - s^2) \times (-s + gp)}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2p^2)}} = \frac{-s + gp}{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2p^2)}};$$

& que ce seroient par conséquent alors, les racines

$$S \mp s\Gamma\Pi \mp GP = 0$$

de la seconde équation, qui, comparées avec

$$s + S\gamma\pi + gp = 0,$$

à laquelle se réduiroit la première, meneroient à une identicité, & par conséquent aussi, ces seules racines-là, qui deviendroient simultanées avec celle-ci; en sorte que la formule du Corollaire IV se changeroit en

$$S = -s\Gamma\Pi - GP,$$

& que celle du Corollaire V deviendroit

$$s = \frac{-S - GP}{\Gamma \cdot \Pi},\ \text{ou}\ s = -S \ulcorner G \ulcorner P - \urcorner G \urcorner P.$$

COROLAIRE VI.

Dégageant maintenant de la formule de la première règle, ou de $s = S\gamma\pi + gp$, la lettre γ, par exemple, au lieu de la lettre S, carrant les deux côtés de l'équation que cela donnera, substituant dans la première, $1 - g^2$ à la place de γ^2, arrangeant les termes par rapport à g, &

résolvant l'équation du second degré en g, qui résultera de-là, il viendra

$$g = \frac{sp \pm \sqrt{[s^2 p^2 + (S^2 \pi^2 + p^2) \times (S^2 \pi^2 - s^2)]}}{S^2 \pi^2 + p^2},$$

$$\text{ou } g = \frac{sp \pm \sqrt{[s^2 p^2 + S^2 \pi^2 \times (S^2 \pi^2 + p^2 - s^2) - s^2 p^2]}}{S^2 \pi^2 + p^2}$$

$$= \frac{sp \pm S\pi \sqrt{(S^2 \pi^2 + p^2 - s^2)}}{S^2 \pi^2 + p^2};$$

& chassant, tant du radical que comprend le numérateur, que du dénominateur, les expressions des cosinus, par la substitution de celles des sinus en leur place, on aura

$$g = \frac{sp \pm S\pi \sqrt{(\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 + 1 - \pi^2 - 1 + \sigma^2)}}{1 - \Sigma^2 \pi^2},$$

ou enfin

$$g = \frac{sp \pm S\pi \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{1 - \Sigma^2 \pi^2},$$

pour première formule d'une cinquième règle, propre à la solution du cas, où, *étant donnés deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés & adjacent à l'autre, on chercheroit la valeur du troisième côté*, laquelle doit ainsi être double.

Le Corollaire qu'on a tiré ci-dessus de la troisième demande, donnera de plus le moyen de simplifier beaucoup & diversement, cette formule.

En effet le cosinus dont elle représente la valeur, y est composé de la somme ou de la différence de deux produits, savoir,

$$\frac{p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} \times \frac{s}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$$

$$\& \quad \frac{S\pi}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} \times \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}};$$

les substitutions de $1 - \pi^2$ pour p^2, & de $\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2$ pour $S^2 \pi^2$, ou de $1 - s^2$ pour σ^2, font d'ailleurs voir aisément, que les sommes des carrés de chacun des produisans de l'un de ces produits & du correspondant de l'autre, sont

l'une & l'autre $= 1$, & que dès-lors les produisans du premier de ces deux mêmes produits étant pris pour cosinus ou pour sinus de deux arcs ou angles, ceux du second deviendront respectivement les sinus ou cosinus des mêmes arcs ou angles; & il s'ensuit de-là, & du Corollaire de la troisième demande, que *l'arc ou angle inconnu, dont* g *devroit être le cosinus, peut se changer en la différence ou en la somme de deux autres arcs ou angles, des cosinus desquels les expressions seroient*

$$\frac{p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, \; \& \; \frac{s}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}},$$

en même-temps que les sinus en seroient respectivement représentés par

$$\frac{S \pi}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, \; \& \; \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}.$$

Ces quatre fractions ayant enfin toutes le même dénominateur, & les tangentes des arcs ou angles élémentaires auxquelles elles appartiennent, devant par conséquent résulter de la division du numérateur de chacune de celles qui expriment un sinus, par le numérateur de celles qui représentent le cosinus correspondant, il s'ensuit de-là, que la tangente du premier des deux arcs ou angles élémentaires, doit être

$$= \frac{S \pi}{p} = S \mathrm{T} \pi;$$

& que Π étant, d'après la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés, $= \frac{\Sigma \pi}{\sigma}$, laquelle donne

$P = \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma}$, ou $\sigma P = \pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}$,

& change le sinus du second arc ou angle élémentaire en $\frac{\pm \sigma P}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$; la tangente de ce second arc ou angle élémentaire sera donc, $= \frac{\pm \sigma P}{s} = \pm P \mathrm{T} \sigma$,

& ainsi l'arc ou angle inconnu, dont g devra être le cosinus.

fera la différence ou la somme de deux arcs ou angles qui auroient respectivement pour tangentes

$$\frac{S\,\pi}{p}\text{, ou } S \urcorner \pi\text{; \& } \frac{\sigma\, P}{S}\text{, ou } P \urcorner \sigma\text{;}$$

seconde formule de la regle, laquelle simplifie beaucoup l'énoncé du corollaire, mais n'a pu être obtenue qu'en cherchant préliminairement la valeur de P.

Sans recourir du reste, ni aux proportions des sinus des angles & de ceux des côtés, des triangles sphériques, ni même aux expressions des sinus en particulier, des arcs ou angles élémentaires, & ayant seulement cherché dans la table des sinus, un sinus $= \Sigma\,\pi$, lequel j'appellerai $\varkappa$, nommé h le cosinus correspondant, ou $\sqrt{(1 - \Sigma^2\,\pi^2)}$, & représenté en conséquence, la sécante correspondante aussi, par $\frac{1}{h} = \llcorner\!\!\dashv \varkappa$, on pourra conclure de-là, que les cosinus des deux arcs ou angles élémentaires devront être respectivement $p \llcorner\!\!\dashv \varkappa$, & $s \llcorner\!\!\dashv \varkappa$; dernière formule de la règle, que nous jugeons même préférable à la précédente ou seconde, en ce qu'indépendamment de notre remarque sur l'emploi de P dans celle-ci, les deux produits qui représentent les cosinus des deux parties de l'arc ou angle inconnu, ont ici un produisant commun, savoir $\llcorner\!\!\dashv \varkappa$; & que cette circonstance peut contribuer beaucoup à faciliter des constructions de tables, en quoi consiste le principal usage de la Trigonométrie sphérique.

COROLLAIRE VII.

De même que dans les corollaires quatrième & cinquième, nous avons conclu de la formule unique de notre première règle, & de la seconde formule de notre seconde règle, la formule unique de notre troisième règle, & les deux de la quatrième; de même aussi, & en suivant la même marche, peut-on inférer des trois formules de notre troisième règle, trois formules différentes d'une sixième règle, pour la solution du cas où il s'agira de *déterminer la valeur d'un angle, d'après*

la connoiſſance qu'on pourra avoir des deux autres angles, & d'un côté oppoſé à l'un de ceux-ci, & adjacent à l'autre; formules dont, ſuivant que le prouveroient des calculs ſemblables à ceux du corollaire précédent, la première ſe trouvera être

$$G = \frac{- S P \pm s \Pi \sqrt{(\Sigma^2 - \sigma^2 \Pi^2)}}{\sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}};$$

la ſeconde aſſignera pour valeur des tangentes des deux parties, de la ſouſtraction ou addition deſquelles devra réſulter l'arc ou angle cherché, reſpectivement, $- s \urcorner \Pi$, & $\pm p \urcorner \Sigma$, & (n étant pris pour un ſinus égal au produit $\sigma \Pi$, & h pour le coſinus correſpondant), preſcrira la troiſième, préférable aux deux autres, de prendre reſpectivement pour coſinus des deux parties du même arc ou angle cherché, $P \sqsubset n$, & $- S \sqsubset n$.

Obſervation concernant les ſix Règles précédentes.

On ne ſauroit propoſer aucun cas de problème de Trigonométrie ſphérique, qui ne comprenne, ou trois données d'un même nom, ſavoir, trois côtés ou trois angles, ou deux données d'un nom & la troiſième d'un autre; & tous les cas compris dans le premier membre de cette diviſion générale, peuvent d'abord être facilement réſolus par nos règles ſeconde & quatrième, & de préférence par leurs ſecondes ou dernières formules, plutôt que par les premières.

Quant au ſecond membre de la même diviſion générale, lequel admet deux données d'un même nom & une ſeule de l'autre, l'élément cherché devra y être homogène, ou aux deux données du même nom, ou à la donnée ſeule de ſon nom; & les cas renfermés dans la première branche de cette ſubdiviſion, recevront tous une ſolution aiſée de nos règles première & cinquième, ou troiſième & ſixième, ſelon que la donnée ſeule de ſon nom, ſera compriſe entre les deux de même nom l'une que l'autre, ou ne le ſera pas; & (ſuppoſé qu'on les réſolve en effet par la cinquième ou la

ſixième), en employant alors, leurs ſecondes ou troiſièmes formules, plutôt que les premières, & ſe fixant même de préférence aux troiſièmes ou dernières.

La ſeconde branche de la même ſubdiviſion ſe ſubdiviſe de ſon côté, en trois autres.

En effet, ou bien l'élément donné ſeul de ſon nom, ainſi que le cherché, devront tout à la fois l'un & l'autre, être oppoſés à l'un des donnés de même nom l'un que l'autre, cas qu'on pourra réſoudre par la ſeule proportion des ſinus des angles & de ceux des côtés, & qui a ainſi deux ſolutions, donnant pour l'angle cherché des valeurs, l'une >, l'autre < que 90°.

Ou bien l'élément donné ſeul de ſon nom, ſera compris entre les deux autres donnés auſſi, de même nom l'un que l'autre; & l'élément cherché, qui ne pourroit plus être l'oppoſé au donné ſeul de ſon nom, ſans qu'on retombât dans nos première & troiſième règles, ſera oppoſé à l'un des donnés de même nom l'un que l'autre cas; qu'on pourra réſoudre en cherchant d'abord par la première règle ou par la troiſième, la valeur de l'élément oppoſé au donné ſeul de ſon nom, & faiſant enſuite uſage de la proportion entre les ſinus des côtés & ceux des angles.

Ou bien enfin l'élément cherché devra au contraire être compris entre les deux donnés de même nom l'un que l'autre, & ce ſera le donné ſeul de ſon nom qui ſera oppoſé à l'un de ceux-ci & adjacent à l'autre; cas dans lequel notre cinquième & notre ſixième règles offriront d'abord un moyen de trouver la valeur de l'élément oppoſé au cherché, & l'on pourra enſuite, par l'emploi de la proportion entre les ſinus des angles & ceux des côtés, parvenir à la connoiſſance de l'élément même cherché; en ſorte que nos ſix règles précédentes devroient déjà, au beſoin, répondre à toutes les queſtions auxquelles la Trigonométrie ſpérique donne lieu, & que ç'a été ſans doute, parce que feu M. Léonard Euler a jugé qu'on y devroit en effet répondre de cette manière, que ce grand Géo-

mètre n'a pas poussé plus loin qu'il n'a fait, dans le Mémoire de 1753 que nous avons déjà cité de lui, la recherche des formules qu'il se proposoit d'y donner.

Mais n'auroit-on pas encore imaginé des moyens de réduire les derniers cas, ou du moins l'un des derniers cas que renferme la dernière branche de notre seconde subdivision, à une seule espèce d'opération chacun, au lieu des deux espèces consécutives, à la faveur desquelles nous aurions jusqu'ici enseigné de les résoudre? ou, si l'on n'avoit pas encore rempli cet objet, ne seroit-il pas possible de suppléer à l'imperfection à un tel égard, qu'on pourroit alors reprocher à la Trigonométrie sphèrique? le projet que nous avons annoncé dans le titre même de notre Ouvrage, de traiter complètement de cette Science, n'exigeroit-il pas d'ailleurs que nous pussions joindre aux règles que nous avons données jusqu'ici, & aux nouvelles règles que nous aurions pu en déduire, pour les cas compris dans les deux dernières branches de la subdivision immédiatement précédente, & desquels nous venons de parler, différentes autres règles pour les mêmes effections, sinon d'une pratique aussi facile, du moins curieuses & élégantes, qu'on trouve dans divers Auteurs? ce sont-là deux points importans dont nous devons maintenant nous occuper.

COROLLAIRE VIII.

Et d'abord, si, étant donnés deux côtés & l'angle compris entre ces côtés, on ne cherchoit plus, comme dans la solution de notre Problème unique, la valeur du troisième côté, mais on se proposoit de trouver celle de l'un des autres angles: par exemple, si, étant donnés les deux côtés opposés aux angles *G* & *P*, & l'angle *S*, on cherchoit la valeur de l'angle *G*, l'un des deux cas qu'on nomme *des quatres parties continues*, parce que les trois élémens donnés & le cherché s'y suivent immédiatement l'un l'autre, sans interruption; notre première règle, résultante de la solution même du Problème, nous donnant $s = S\gamma\pi + gp$, ou $s^2 = S^2\gamma^2\pi^2 + 2S\gamma\pi gp + g^2p^2$,

&

& en conséquence $\sigma = \surd(1 - S^2\gamma^2\pi^2 - 2S\gamma\pi gp - g^2p^2)$, & la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés ajoutant à cela que $\Gamma = \frac{\Sigma\gamma}{\sigma}$, on concluroit de-là,

$$\Gamma = \frac{\Sigma\gamma}{\surd(1 - S^2\gamma^2\pi^2 - 2S\gamma\pi gp - g^2p^2)},$$ & par conséquent $\surd(1 - \Gamma^2)$, ou $G = \frac{\surd(1 - S^2\gamma^2\pi^2 - 2S\gamma\pi gp - g^2p^2 - \Sigma^2\gamma^2)}{\surd(1 - S^2\gamma^2\pi^2 - 2S\gamma\pi gp - g^2p^2)}$.

On remarqueroit ensuite que s'il étoit possible de décomposer la quantité qui se trouveroit ici sous le signe radical du dénominateur commun des deux valeurs fractionnaires auxquelles on seroit parvenu, en deux carrés, dont l'un fût celui du numérateur de la première, pris positivement, savoir, $+ \Sigma^2\gamma^2$, & l'autre fût peu compliqué, on auroit alors l'expression de $\surd(1 - \Gamma^2)$, ou de G, par une fraction dont le numérateur seroit rationnel & peu compliqué, & qui auroit d'ailleurs le même dénominateur que celle qui auroit exprimé Γ; d'où s'ensuivroit que les quotiens $\frac{\Gamma}{G}$ & $\frac{G}{\Gamma}$, ou la tangente & la cotangente de l'angle cherché, se trouveroient représentées par des fractions fort simples; en sorte que ce pourroit être là, une chose à tenter.

Dans la vue donc d'introduire en effet $+ \Sigma^2\gamma^2$ dans le dénominateur commun aux deux fractions, on y ajoutera réellement ce monome carré, en en soustrayant d'autre part sa valeur $(1 - S^2) \times (1 - g^2)$, ou $1 - S^2 - g^2 + S^2g^2$, & il viendra de-là sous le signe du dénominateur commun,

$$1 - S^2\gamma^2\pi^2 - 2S\gamma\pi gp - g^2p^2 + \Sigma^2\gamma^2 - 1 + S^2 + g^2 - S^2g^2;$$

on changera ensuite $- g^2p^2 + g^2$ en $g^2\pi^2$,

$- S^2g^2 + S^2$ en $S^2\gamma^2$,

& $S^2\gamma^2 - S^2\gamma^2\pi^2$ en $S^2\gamma^2p^2$;

& après tous ces changemens, le polynome entier se trouvera réduit à $g^2\pi^2 - 2Sgp\gamma\pi - S^2\gamma^2p^2 + \Sigma^2\gamma^2$, outre qu'on aura sous le signe du numérateur de la valeur de G,

$g^2\pi^2 - 2Sgp\gamma\pi + S^2\gamma^2p^2 + \Sigma^2\gamma^2 - \Sigma^2\gamma^2$, ou ſeulement $g^2\pi^2 - 2Sgp\gamma\pi + S^2p^2\gamma^2$; ce qui donnera enfin,

$$G = \frac{\pm S\gamma p \mp g\pi}{\surd[(1 + S\gamma\pi + gp) \times (1 - S\gamma\pi - gp)]}.$$

Et des valeurs ainſi trouvées de Γ & de G, on conclura pour première formule d'une ſeptième règle,

$$\urcorner G = \frac{\pm S\gamma p \mp g\pi}{\Sigma\gamma},$$

ou cette ſeconde & meilleure formule de la même ſeptième règle $\urcorner G = \pm p \urcorner S \mp \pi \urcorner g \ulcorner S$, c'eſt-à-dire, qu'*on pourra avoir la cotangente de l'angle cherché, en ôtant du produit du coſinus du côté donné, tenant à l'angle cherché, par la cotangente de l'angle donné, le produit du ſinus du même côté donné, tenant à l'angle cherché, par la cotangente du côté donné, opposé à l'angle cherché, & par la coſécante de l'angle donné, ou en faiſant le contraire*; ce qui rendra l'angle cherché aigu ou obtus, ſelon que la différence des deux produits dont nous venons de parler, devra être priſe poſitive ou négative.

A quoi l'on peut joindre qu'en changeant dans cette formule de règle, les G & g en P & p, & les π & p en γ & g, elle feroit alors connoître la cotangente $\urcorner P$ de l'angle S ; G, en ce qu'elle deviendroit $\urcorner P = \pm g \urcorner S \mp \gamma \urcorner p \ulcorner S$; la ſéquence des quatre élémens continus commençant alors au côté SG pour finir à l'angle P, au lieu de commencer comme auparavant, au côté SP pour finir à l'angle G, ou allant en ſens contraire de la précédente.

COROLLAIRE IX.

Multipliant par Σ les deux côtés de la formule du corollaire VIII, elle nous donnera ce beau théorème, qu'on nomme auſſi des *parties continues*, $\pm \pi \urcorner g \mp pS = \Sigma \urcorner G$, c'eſt-à-dire, que *la différence poſitive ou négative des produits du ſinus du côté oppoſé à l'angle* P, *par la cotangente du côté*

opposé à l'angle G, *& du cosinus du même côté opposé à l'angle* P, *par le cosinus de l'angle* S, = *le produit du sinus de l'angle* S, *par la cotangente de l'angle* G, ou plus généralement que *la différence positive ou négative, des produits du sinus du côté moyen, par la cotangente du côté extrême, & des cosinus du côté & de l'angle moyen, l'un par l'autre, est toujours égale au produit du sinus de l'angle moyen, par la cotangente de l'angle extrême.*

COROLLAIRE X.

D'où l'on déduira pour le cas où seroient donnés deux angles G & S, & le côté GS compris entre ces angles, & l'on chercheroit la valeur du côté SP opposé au premier angle & adjacent au second, $\urcorner g = \urcorner p S \pm \Sigma \urcorner G \ulcorner p$, c'est-à-dire, qu'*il faudra prendre pour cotangente du côté cherché & extrême, la somme ou la différeuce des produits de la cotangente du côté moyen, par le cosinus de l'angle moyen, & du sinus de l'angle moyen, par la cotangente de l'angle extrême, & par la cosécante du côté moyen;* formule à laquelle on peut substituer à volonté, d'une manière analogue à ce qu'on a fait dans le corollaire précédent, celle que donneroit une séquence qui, commençant comme la première, à l'angle G, continueroit à contre-sens de celle-ci, savoir $\urcorner g = \urcorner s P \pm \Pi \urcorner G \ulcorner s$.

En effet, si l'on faisoit sur la formule $S = s \Gamma \Pi - G P$ du corollaire IV, les mêmes calculs qu'on a faits dans le corollaire VIII, sur la formule $s = S \gamma \pi + g p$ de la solution du problème même, il en résulteroit, suivant que nous nous en sommes convaincus par l'opération, au lieu de

$$\urcorner G = \pm p \urcorner S \mp \pi \urcorner g \ulcorner S$$

qui avoit résulté du corollaire VIII,

$$\urcorner g = \urcorner s P \pm \Pi \urcorner G \ulcorner s.$$

On peut de plus remarquer ici, que Lambert semble peu à propos, dans le Mémoire de l'année 1768, que nous

avons cité plus haut de lui, faire dépendre toute la Trigonométrie ſphérique de nos quatre premières règles, jointes ſeulement à des proportions de ſinus d'angles & de côtés, & à cette ſeptième; attendu qu'on ne tireroit jamais de tout cela, qu'en y joignant la réſolution d'une équation du ſecond degré, nos règles pour les cas où l'inconnue doit réſulter de deux parties ; ſavoir, nos Vme & VIme, & les IXme & Xme qui nous reſtent à donner.

COROLLAIRE XI.

Les lettres employées dans la formule du corollaire VIII, qui déſignent des fonctions différentes des deux élémens moyens de la ſéquence d'élémens que l'on conſidère dans ce corollaire, paroiſſant ne devoir offrir, après le dégagement qu'on en auroit fait, au moyen de la réſolution d'une équation du ſecond degré aſſez compliquée, aucune ſimplification pour le cas où étant donnés deux côtés & un angle oppoſé à l'un de ces côtés & adjacent à l'autre, on chercheroit la valeur de l'angle compris entre les deux côtés donnés, laquelle on ne pût attendre, du moins également, de l'emploi à cet effet, d'une méthode analogue à celle que nous avons indiquée dans l'obſervation à la ſuite du corollaire VII, ç'a été à une telle méthode que nous avons cru devoir nous en tenir de préférence, pour ſimplifier la ſolution de ce cas, le moins traitable de tous.

Suppoſant donc connoître les côtés SG & GP, & l'angle S, & nous propoſant de découvrir la valeur de l'angle G, la première formule de notre cinquième règle nous a d'abord donné $g = \frac{sp \pm S\pi\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2\pi^2)}}{1 - \Sigma^2\pi^2}$, & par conſéquent

$\sqrt{(1 - g^2)}$, ou $\gamma =$

$$\frac{\pm\sqrt{[1 - 2\Sigma^2\pi^2 + \Sigma^4\pi^4 - s^2p^2 \mp 2spS\pi)\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2\pi^2)} - S^2\sigma^2\pi^2 + S^2\Sigma^2\pi^4]}}{1 - \Sigma^2\pi^2};$$

& la proportion des ſinus des angles & de ceux des côtés

joignant à cela, que $\Gamma = \frac{\Sigma \gamma}{\sigma}$, nous avons conclu que $\Gamma =$

$$\frac{\Sigma \times \pm \surd [1 - 2\Sigma^2 \pi^4 + \Sigma^4 \pi^4 - s^2 p^2 \mp 2 s p \mathcal{S} \pi \surd (\sigma^2 - \pi \Sigma^2 \pi^2) - \mathcal{S}^2 \sigma^2 \pi^2 + \mathcal{S}^2 \Sigma^2 \pi^4]}{\sigma + \surd (1 - \Sigma^2 \pi^2)},$$

première expreſſion du ſinus de l'angle cherché, à la ſimplification de laquelle nous n'avons pas renoncé de réuſſir, quelque peu qu'un premier coup-d'œil l'en dût faire juger ſuſceptible.

Si l'on pouvoit, avons-nous penſé dans cette vue, parvenir, au moyen de diverſes ſubſtitutions de valeur, à former des ſeules quantités rationnelles, au nombre de ſix, qui ſe trouvent ſous le grand ſigne radical du numérateur, trois carrés, dont l'un fût celui d'un des facteurs du coéfficient en lettres, $s p \mathcal{S} \pi$ du petit radical, compris auſſi ſous le ſigne du grand, & dont les deux autres fuſſent les produits du carré de l'autre facteur du même coéfficient, par les quantités compriſes au nombre de deux, ſous le petit radical, & le dernier en particulier, fût d'après cela, négatif; on rendroit dès-lors poſſible l'extraction de racine carrée de la ſomme entière & mixte que comprend le grand ſigne radical; & il peut en conſéquence être à propos d'eſſayer ſi ces opérations préliminaires ſeroient en effet praticables ou non.

Remarquant d'abord pour cet effet, qu'aucun des trois carrés dont on vient de parler, ne ſauroit contenir Σ^4, que Σ^4 ſe trouve pourtant au troiſième des membres ſous le grand ſigne, & que $\Sigma^2 + \mathcal{S}^2 = 1$, nous avons commencé par changer la ſomme du troiſième & du ſixième membres rationnels, ſavoir, $\Sigma^4 \pi^4 + \Sigma^2 \mathcal{S}^2 \pi^4$ en $\Sigma^2 \pi^4$, ce qui a réduit le ſextinome rationnel ſous le grand ſigne, au quintinome rationnel auſſi, $1 - 2\Sigma^2 \pi^2 - s^2 p^2 - \mathcal{S}^2 \sigma^2 \pi^2 + \Sigma^2 \pi^4$.

Nous avons de plus obſervé qu'aucun des trois mêmes carrés ne pouvoit avoir de coéfficient numérique; & combinant en conſéquence de cela, l'un des deux $\Sigma^2 \pi^2$, compris dans le ſecond membre du quintinome que nous venions d'obtenir, avec le dernier membre $\Sigma^2 \pi^4$ du même quintinome, nous avons changé ce quintinome en cet autre,

$1 - \Sigma^2 \pi^2 - s^2 p^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 p^2$; & comme le dernier membre $- \Sigma^2 \pi^2 p^2$ de ce quintinome, produit de $- \Sigma^2 \pi^2$, dernier membre de la quantité compiise fous le petit ſigne radical, par p^2, carré d'un des facteurs du coefficient de ce petit radical, pouvoit repréſenter l'un des carrés dont nous avions beſoin, nous l'avons mis à part, pour ne nous plus occuper que de tirer du quadrinome $1 - \Sigma^2 \pi^2 - s^2 p^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, reſtant, les deux autres carrés que nous avions encore à former, & qui étoient maintenant déterminés aux valeurs $\sigma^2 p^2$ & $S^2 s^2 \pi^2$.

Il ne nous falloit pour cela, ni le premier ni le troiſième membres de notre quadrinome; & nous avons penſé d'après cette réflexion, à les chaſſer tous deux en même-temps, en ſubſtituant au dernier des deux, ſa valeur $-(1 - \sigma^2) \times (1 - \pi^2) = -1 + \sigma^2 + \pi^2 - \sigma^2 \pi^2$; ce qui, au lieu du quadrinome que nous avions, nous a produit le nouveau quintinome ſuivant, $\sigma^2 + \pi^2 - \sigma^2 \pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, non ſans nous laiſſer d'abord quelqu'inquiétude au ſujet de l'augmentation ſurvenue dans le nombre des membres que nous avions à conſidérer, lequel il s'agiſſoit au contraire de réduire.

Continuant pourtant notre recherche, & obſervant qu'il ne nous falloit point de $- \Sigma^2 \pi^2$, nous avons ſubſtitué à ce quatrième membre de notre nouveau quintinome, ſa valeur, $- \pi^2 + S^2 \pi^2$, ce qui nous a ramenés à un nouveau quadrinome, ſavoir, $\sigma^2 - \sigma^2 \pi^2 + S^2 \pi^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, & nous avons alors remarqué avec ſatisfaction, que les deux premiers membres de ce nouveau quadrinome pouvoient évidemment ſe changer en l'un, $\sigma^2 p^2$, des carrés que nous deſirions encore d'obtenir, & que les deux derniers étoient de leur côté, précisément équivalens à l'autre, $+ S^2 s^2 \pi^2$.

Or, notre expreſſion de Γ, doublement radicale & compliquée, s'étant ainſi changée en

$$\frac{\Sigma s \sqrt{[\sigma^2 p^2 - \Sigma^2 \pi^2 p^2 \mp 2 s p S \pi \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)} + S^2 s^2 \pi^2]}}{\sigma \times (1 - \Sigma^2 \pi^2)},$$

du numérateur de laquelle le facteur radical se trouve, au moyen de l'extraction de racine, être

$$= \mp p \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)} + S s \pi,$$

nous avons conclu de-là une première formule d'une neuvième règle, savoir, $\Gamma = \frac{\Sigma \times [S s \pi \mp p \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}]}{\sigma \times (1 - \Sigma^2 \pi^2)}$.

Nous nous sommes encore bientôt aperçus, d'après la seconde partie du corollaire de notre quatrième demande, & conformément à l'emploi que nous avions déjà fait de la première partie du même corollaire, pour simplifier la première formule de notre cinquième règle, que l'angle auquel appartient ce sinus, a pour parties deux autres angles, dont les sinus sont $\frac{S}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, & les cosinus sont respectivement $\frac{\Sigma p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma \pi s}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, quantités de la première & la troisième desquelles, après y avoir substitué $1 - \Sigma^2$ au lieu de S^2, & $1 - \pi^2$ au lieu de p^2, & des carrés de la seconde & la quatrième desquelles, après la substitution de $1 - \sigma^2$ au lieu de s^2, les deux sommes respectives se trouvent en effet être égales à l'unité; & nous en avons conclu que l'angle cherché devoit résulter de la différence ou de la somme de deux autres, qui auroient pour sinus & cosinus, le premier $\frac{S}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, & le second $\frac{\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma \pi s}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$.

Et comme il pouvoit se présenter ici un moyen de simplification par les tangentes, analogue à celui dont nous avons conclu la troisième formule de notre cinquième règle, nous nous nous sommes d'abord attachés à nous assurer si cette simplification seroit en effet possible.

Remarquant donc dans cette vue, que le quotient de la première des quatre fractions rapportées ci-dessus, par la troisième, devoit donner la tangente de la première partie

de l'angle cherché, ou de celle qui ne ſeroit ſuſceptible que d'un ſeul ſigne, nous avons d'abord déterminé cette première partie d'angle, en lui aſſignant pour tangente le produit de la cotangente de l'angle S, par la ſécante du côté oppoſé à l'angle P, ou en ſuppoſant cette tangente de première partie, $= \urcorner S \sqsubset \pi$.

Après quoi, & en conſéquence de la proportion des ſinus des angles & de ceux des côtés oppoſés, ayant changé le numérateur de la ſeconde de nos fractions $\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}$ en $\sqrt{(\sigma^2 - \sigma^2 \Pi^2)}$, ou en $\sigma \sqrt{(1 - \Pi^2)}$, ou en σP, & celui de la quatrième & dernière en $\sigma\, s\, \Pi$, nous avons conclu que la tangente de la ſeconde partie de l'angle cherché ou de celle qui ſeroit ſuſceptible de deux valeurs, devroit être repréſentée par $\frac{P}{s\,\Pi}$ ou par $\urcorner P \sqsubset \sigma$, produit de la cotangente de l'angle P, dont on ſuppoſeroit avoir trouvé la valeur, par la ſécante du côté oppoſé à l'angle S.

Prenant enfin dans les Tables, un ſinus $= \Sigma \pi$, que nous avons nommé φ, & dont nous avons ſuppoſé le coſinus $\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)} = f$, & changeant l'expreſſion de la troiſième des fractions ci-deſſus, en l'équivalente $\frac{\Sigma \pi p}{\pi \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\varphi p}{\pi f}$, nous avons exprimé les coſinus de nos deux parties d'angles, ou les deux dernières des fractions ci-deſſus rapportées, par $\urcorner \varphi \urcorner p$, appartenant à l'angle élémentaire ſuſceptible de deux valeurs, & par $\urcorner \varphi\ \urcorner s$ appartenant à l'autre; & en ayant conclu que l'*angle cherché doit réſulter de la ſomme ou de la différence de deux autres, dont les coſinus ſeroient* $\urcorner \varphi\ \urcorner s$ & $\pm \urcorner \varphi\ \urcorner p$, nous avons avec d'autant plus de raiſon préféré cette 3.me & dernière formule aux deux 1.^eres, quelqu'élégante même que ſoit auſſi la ſeconde, qu'elle ne fait point, comme celle-ci, uſage de la proportion des ſinus des angles & des côtés, & que les coſinus des deux angles partiels, n'y ayant l'un & l'autre, comme leurs tangentes dans la ſeconde, que deux produiſans, y ont de plus, à la

à la différence de ce qui a lieu dans celle-ci, un produisant commun; ce qui doit faciliter beaucoup les constructions de Tables aaxquelles on pourroit se proposer d'employer notre neuvième règle, c'est-à-dire, le principal usage de cette règle.

COROLLAIRE XII.

Par un raisonnement semblable à celui au moyen duquel nous avons conclu de la solution de notre problème unique & de ses corollaires I, VI, VII & IX, les règles & formules de règles, qu'offrent les corollaires IV, V, VIII & X, nous pourrions aussi inférer du corollaire précédent, trois nouvelles formules de règle, pour le cas où étant donnés deux angles & un côté opposé à l'un d'eux & adjacent à l'autre, par exemple, les angles *S* & *P*, & le côté *GP*, on chercheroit la valeur du côté *SP*, compris entre les deux angles donnés, savoir; 1.° que les sinus des deux parties du côté cherché, sont $\frac{s}{\sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$ & $\frac{\pm \sqrt{(\Sigma^2 - \sigma^2 \Pi^2)}}{\Sigma \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$, & que les cosinus en sont $\frac{\sigma P}{\sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$ & $\frac{- \sigma S \Pi}{\Sigma \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$; 2.° qu'on désigneroit également ces parties, en donnant pour tangentes à la première $\urcorner s \vdash \Pi$, & à la seconde $\urcorner p \vdash \Sigma$; 3.° enfin que nommant φ un sinus $= \sigma \Pi$, & f son cosinus $= \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}$, on devroit préférer de donner respectivement à chacune, pour cosinus, $\urcorner \varphi \urcorner P$ & $- \urcorner \varphi \urcorner S$.

COROLLAIRE XIII.

Quant aux autres règles, ou formules de règles, répandues dans divers ouvrages, & plus curieuses qu'utiles, qu'on auroit pu s'attendre que nous rapporterions & démontrerions dans celui-ci, il n'en est aucune que la combinaison de notre 4.me demande avec son corollaire, l'observation que les radicaux employés dans les premières formules de notre 5.me règle, & des suivantes, jusqu'à la 10.me sont des moyennes proportionnelles entre des sommes & des différences de deux mêmes quantités, & la manière si connue dont deux quantités quelconques se forment de leur demi-

ſomme, plus ou moins leur demi-différence, ne donnaſſent le moyen de déduire des formules ci-deſſus rapportées; déduction dont le Mémoire déjà cité de F. C. Mayer, offre en particulier, quelques bons exemples: mais comme ces détails ſeroient trop recherchés, nous dirions même de luxe, dans une Science que nous nous flattons d'avoir déſormais réduite d'une manière très-lumineuſe, aux ſeules pratiques les plus ſimples qu'elle pût indiquer de ſuivre, nous nous contenterons de préſenter ici les deux concluſions les plus élégantes de ce genre, auxquelles nos principes & notre méthode peuvent s'étendre, ſavoir; 1.° celle qui, dans le cas du corollaire I.er de notre problème unique & de notre ſeconde règle, où l'on connoît les trois côtés que nous nommerons *f*, *h* & *k* du triangle, & l'on cherche la valeur d'un de ſes angles, par exemple, de celui qui ſeroit oppoſé au côté *k*, détermine une telle valeur par cette proportion, *la moyenne proportionnelle entre les ſinus des deux côtés* f *&* h, *adjacens à l'angle cherché, eſt à la moyenne proportionnelle entre les ſinus des demi-ſommes de* k *&* f — h *& de* k *&* h — f, *comme le rayon eſt au ſinus de la moitié de l'angle cherché;* 2.° celle qui, dans le cas du corollaire VIII du même problème unique & de notre ſeptième règle, où l'on connoît deux côtés du triangle & l'angle qu'ils comprennent entr'eux, enſeigne à trouver chacun des deux autres angles, par ces deux proportions, *le ſinus de la demi-ſomme des deux côtés connus, eſt à celui de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle donné, eſt à la tangente de la demi-différence des angles cherchés;* & *le coſinus de la demi-ſomme des côtés connus, eſt à celui de leur demi-différence, comme la même cotangente de la moitié de l'angle donné, eſt à la tangente de la demi-ſomme des angles cherchés.*

Nous obſerverons à ce ſujet, comme un préalable néceſſaire à l'une & à l'autre des démonſtrations que nous annonçons, que ſi l'on nomme μ & m le ſinus & le coſinus d'un arc ou angle, moitié d'un autre dont le ſinus & le coſinus ſoient reſpectivement σ & s, notre quatrième demande &

l'égalité des deux parties de l'arc ou de l'angle dont σ & s sont le sinus & le cosinus, détermineront σ à être $m\mu + \mu m = 2m\mu$, & σ^2 à être $= 4m^2\mu^2 = 4m^2(1 - m^2)$, ou $= 4\mu^2(1 - \mu^2) = 4m^2 - 4m^4$, ou $4\mu^2 - 4\mu^4$; en sorte que s^2 ou $1 - \sigma^2$ sera $= 1 - 4m^2 + 4m^4 = 1 - 4\mu^2 + 4\mu^4$; que $\pm s$ sera $= + 1 - 2m^2 = + 1 - 2\mu^2$, & que m ainsi que μ, seront l'une & l'autre $= \sqrt{(\frac{1 \mp s}{2})}$, c'est-à-dire, l'une & l'autre égales à la racine de la moitié de l'un des sinus verses de l'angle à partager, savoir; pour l'arc ou angle de moins que 90° ou de plus que 270°, auquel pourroit se rapporter le cosinus s, & de la moitié duquel le cosinus est > que le sinus, le cosinus $m = \sqrt{(\frac{1 + s}{2})}$, & le sinus $\mu = \sqrt{(\frac{1 - s}{2})}$; & le contraire, ou le cosinus $m = \sqrt{(\frac{1 - s}{2})}$, & le sinus $\mu = \sqrt{(\frac{1 + s}{2})}$, pour l'arc ou angle de plus que 90° & de moins que 270°, auquel le même cosinus s seroit supposé appartenir, & de la moitié duquel le cosinus seroit < que le sinus; ou qu'en général, le cosinus m doit être $= \sqrt{(\frac{1 \pm s}{2})}$, & le sinus $= \sqrt{(\frac{1 \mp s}{2})}$.

Et nous inférerons de-là ultérieurement, que la tangente, $T\mu$, de l'arc ou angle sous-double de celui dont s seroit le cosinus, doit, dans la supposition que ce dernier arc ou angle soit de moins que 90° ou de plus que 270°, être $= \sqrt{(\frac{1 - s}{1 + s})}$, & dans la supposition contraire, ou que le même arc ou angle soit de plus que 90° & de moins que 270°, être $= \sqrt{(\frac{1 + s}{1 - s})}$; ou en général $= \sqrt{(\frac{1 \mp s}{(1 \pm s)})}$.

Passant de-là à la 1.ere des démonstrations que nous avons promises, l'observation précédente concernant les expressions des sinus & cosinus d'un arc ou angle moitié d'un autre, rapprochée de la première formule de notre seconde règle,

$S = \frac{s - gp}{\gamma\pi}$, nous apprendra que le sinus de la moitié de l'arc ou angle dont Σ & S seroient respectivement les sinus & cosinus, ou $\sqrt{(\frac{1 \mp S}{2})}$ devroit, soit que le cosinus S fût positif ou négatif, être $= \sqrt{(\frac{\gamma\pi + gp - s}{2\gamma\pi})}$, expression dont la quantité qui compose le numérateur de la fraction sous le signe radical, a pour carré, $\gamma^2\pi^2 + 2\gamma\pi gp + g^2p^2 - 2s\gamma\pi - 2sgp + s^2$, & est par conséquent moyenne proportionnelle entre tout couple de facteurs dont le produit peut représenter ce carré.

Mais si dans ce carré l'on change; 1.° s^2 en $1 - \sigma^2$; 2.° ce $-\sigma^2$ en $-\pi^2\sigma^2 - p^2\sigma^2$; 3.° $\gamma^2\pi^2$ & g^2p^2 en $s^2\gamma^2\pi^2 + \sigma^2\gamma^2\pi^2$, & en $s^2g^2p^2 + \sigma^2g^2p^2$; 4.° les $-p^2\sigma^2$ & $+g^2p^2\sigma^2$ trouvés dans le second & le troisième changemens, en $-p^2\gamma^2\sigma^2$, & les $-\pi^2\sigma^2$ & $+\gamma^2\pi^2\sigma^2$ trouvés aussi dans les deux mêmes changemens, en $-g^2\pi^2\sigma^2$; 5.° enfin, que de $2\gamma\pi gp$, on fasse, $2s^2\gamma\pi gp + 2\sigma^2\gamma\pi gp$; il viendra après tous ces changemens, pour valeur du même carré, $1 - 2sgp - 2s\gamma\pi + s^2g^2p^2 + 2s^2\gamma\pi gp + s^2\gamma^2\pi^2 - \gamma^2\sigma^2p^2 + 2\sigma^2\gamma\pi gp - \sigma^2g^2\pi^2$, polynome qui $= (1 - sgp - s\gamma\pi - \sigma\gamma p + \sigma g\pi) \times (1 - s\gamma\pi - sgp + \sigma\gamma p - \sigma g\pi)$.

La quatrième demande donne d'ailleurs, pour sinus & cosinus de la différence de f, dont nous supposerons que les sinus & cosinus soient γ & g, à h, dont nous supposerons en même temps que les sinus & cosinus soient π & p, ou pour le sinus & le cosinus de $f - h$, $p\gamma - \pi g$, & $pg + \pi\gamma$; & il s'ensuit de-là, par la même demande, que les cosinus de la somme & de la différence de k, dont nous supposerons que les sinus & cosinus soient σ & s, à $f - h$, ou les cosinus de $k + f - h$ & de $k - f + h$, sont respectivement $sgp + s\gamma\pi - \sigma g\pi + \sigma\gamma p$. & $sgp + s\gamma\pi + \sigma g\pi - \sigma\gamma p$; que les deux produisans $1 - sgp - s\gamma\pi + \sigma g\pi$ & $-\sigma\gamma p$

& $1 - sgp - s\gamma\pi - \sigma g\pi + \sigma\gamma p$, ſont les deux ſinus verſes de $k + f - h$ & de $k - f + h$, & que le produit de leurs racines, diviſé par $\sqrt{(2)}$, eſt celui des ſinus des moitiés de $k + f - h$ & de $k - f + h$.

Or, d'après cela, le trinome $\gamma\pi + gp - s$, qui doit être égal au produit des racines de ces deux ſinus verſes, devra pareillement, étant diviſé par 2, repréſenter le produit des ſinus des deux moitiés de $k + f - h$ & de $k - f + h$; d'où s'enſuit que $\sqrt{\left(\frac{\gamma\pi + gp - s}{2}\right)}$ repréſente de ſon côté, la moyenne proportionnelle entre ces deux ſinus de moitiés; & comme on a vu que cette quantité $\sqrt{\left(\frac{\gamma\pi + gp - s}{2}\right)}$, étant encore diviſée par $\sqrt{(\gamma\pi)}$, devenoit $= \frac{\sqrt{(1 \pm S)}}{\sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, égale au ſinus de la moitié de l'angle dont les ſinus & coſinus ſont Σ & S, on peut enfin conclure de toutes ces remarques, la première des trois proportions que nous nous ſommes propoſé ci-deſſus de démontrer.

Quant à la démonſtration des deux dernières des mêmes proportions, il faudra, pour en venir à bout, ſe rappeler d'abord, que relativement au cas dont il s'agit, nous avions trouvé dans le corollaire VIII, pour ſinus & coſinus de l'angle dont nous y cherchions la valeur,

$$\frac{\Sigma\gamma}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp)} \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}} \quad \& \quad \frac{\mp g\pi \pm S\gamma p}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp)} \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}}.$$

On remarquera de plus, que nous aurions pu de même trouver pour ſinus & coſinus de l'autre angle inconnu,

$$\frac{\Sigma\pi}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp)} \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}} \quad \& \quad \frac{\mp p\gamma \pm Sg\pi}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp)} \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp}},$$

& l'on concluera de-là & des formules de notre 3.me demande, que dans les mêmes ſuppoſitions, les coſinus de la ſomme & de la différence des deux angles cherchés, ſont reſpectivement,

$$\frac{(S^2 + 1)\gamma\pi gp - S\pi^2 g^2 - S\gamma^2 p^2 + (S^2 - 1)\gamma\pi}{(1 - gp - S\gamma\pi) \times (1 + gp + S\gamma\pi)} \quad \&$$

$$\frac{(S^2 + 1)\gamma\pi gp - S\pi^2 g^2 - S\gamma^2 p^2 - (S^2 - 1)\gamma\pi}{(1 - gp - S\gamma\pi) \times (1 + gp + S\gamma\pi)}.$$

On joindra d'ailleurs à cela, que si 1.° l'on fait disparoître de l'un des deux membres du milieu de chacun des numérateurs de ces deux expressions, les cosinus g ou p, & de l'autre les sinus γ ou π, respectivement, & à volonté, en changeant dès-lors, leurs sommes en $- S\pi^2 + S\gamma^2\pi^2 - Sp^2 + Sg^2p^2$; ou en $- S\gamma^2 + S\gamma^2\pi^2 - Sg^2 + Sg^2p^2$, & que 2.° au lieu des $- S\pi^2 - Sp^2$, ou de $- S\gamma^2 - Sg^2$, qu'on aura ainsi trouvés, on substitue $- S$, les mêmes numérateurs se trouveront après ces deux changemens, être les produits respectifs de $(1 - gp - S\gamma\pi)$ par $(- S - \gamma\pi - Sgp)$, & de $(1 + gp + S\gamma\pi)$ par $(- S + \gamma\pi + Sgp)$; & les fractions mêmes, ou les valeurs des cosinus de somme & de différence des deux angles cherchés, se réduiront à $\frac{- S - \gamma\pi - Sgp}{1 + gp + S\gamma\pi}$ & $\frac{- S + \gamma\pi + Sgp}{1 - gp - S\gamma\pi}$.

On aura donc, d'après la seconde partie de l'observation faite préalablement ci-dessus, les tangentes des moitiés de la somme & de la différence des angles cherchés,

$$= \frac{\sqrt{[(1 + S) \times (1 + gp + \gamma\pi)]}}{\sqrt{[(1 - S) \times (1 + gp - \gamma\pi)]}},$$

& $$= \frac{\sqrt{[(1 + S) \times (1 - gp - \gamma\pi)]}}{\sqrt{[(1 - S) \times (1 - gp + \gamma\pi)]}};$$

valeurs qui se décomposent en

$$\sqrt{\left(\frac{1 + S}{1 - S}\right)} \times \frac{\sqrt{(1 + gp + \gamma\pi)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(1 + gp - \gamma\pi)}},$$

& $$\sqrt{\left(\frac{1 + S}{1 - S}\right)} \times \frac{\sqrt{(1 - gp - \gamma\pi)}}{\sqrt{(2)}} \times \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(1 - gp + \gamma\pi)}};$$

& d'après les deux parties à la fois de la même observation, sont en effet les quatrièmes termes des deux proportions énoncées ci-dessus, & qui nous restoient à démontrer.

Du reste, quelqu'élégantes que soient ces sortes de dernières solutions, nous penserions que feu M. Léonard Euler n'a pu, dans son Mémoire de 1753, les préférer, comme

il a fait, à toutes ſortes d'autres, qu'autant qu'il aura négligé de s'occuper de la recherche des divers abrégés de celles-ci.

Pour mettre enfin le lecteur à portée de juger combien la pratique des règles qu'on tire d'ordinaire de la première & des deux dernières proportions dont nous parlons, eſt moins aiſée que celle que nous leur préférons, & le garantir en même-temps, d'une erreur où l'autorité & l'exemple d'un Aſtronome, célèbre durant ſa vie, à divers juſtes titres, pourroit l'entraîner, il nous ſemble à propos d'obſerver en cet endroit, quoique nous abſtenant d'ailleurs de toute application de nos règles à des exemples, que ce Savant s'étant propoſé à la *page 13* de ſon Introduction aux Éphémérides de 1745 & des années ſuivantes, d'enſeigner l'uſage de la règle déduite de la première de ces trois mêmes proportions, par la détermination de l'heure à laquelle le Soleil doit ſe lever à Londres, lorſqu'il a $17^\circ\ 32'$ de déclinaiſon auſtrale, employa à cet effet, par mépriſe ſur les ſignes, un angle de $72^\circ\ 28'$, au lieu de ſon ſupplément, ou d'un de $107^\circ\ 32'$, & en tira la concluſion erronée, que le Soleil, dans la circonſtance ſuppoſée, paroîtroit ſe lever à Londres à $7^h\ 37'\ 43''$, tandis que c'eſt à $7^h\ 29'\ 41''$ qu'il doit en effet paroître s'y lever; erreur du reſte qui n'influa en rien ſur ſes Éphémérides mêmes, calculées ſans doute par une méthode plus facile & plus ſimple, qui ne ſauroit guère avoir été autre que celle de Viete & de M.rs Mayer & de Maupertuis, que nous avons donnée dans le premier corollaire du problème unique de notre Trigonométrie ſphérique; ſans quoi on ne pourroit guère reconnoître les divers & nombreux calculs que ſes Éphémérides contiennent, pour avoir été faits par lui-même.

Première Obſervation générale.

On peut comprendre dans les deux regiſtres parallèles ſuivans, toutes les ſimplifications que la Trigonométrie ſphérique générale peut recevoir dans les cas particuliers où le triangle qu'on y conſidère, auroit, ou un ou deux côtés, ou un ou deux angles, de 90°.

PREMIER REGISTRE.

RÈGLES ou formules de Règles, désignées par N.os	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	RÉDUCTIONS, des Règles qui en résultent, & Remarques.
1.ere Savoir, $s = S\gamma\pi + gp$.	$\Sigma = 1$, & $S = 0$.	$s = gp$.
	$\gamma = 1$, & $g = 0$.	$s = S\pi$.
	$\pi = 1$, & $p = 0$.	$s = S\gamma$.
	Σ & γ ou $\pi = 1$.	$s = 0$.
	γ & $\pi = 1$.	$s = S$, d'où $\sigma = \Sigma$, & d'après la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés, $\gamma = \Gamma$, & $\pi = \Pi$, & le triangle est équilatéral & équiangle.
2.me Savoir, $S = s \ulcorner g \ulcorner p - \urcorner g \urcorner p$.	$\sigma = 1$, & $s = 0$.	$S = - \urcorner g \urcorner p$.
	$\gamma = 1$, & $g = 0$.	$S = s \ulcorner p$.
	$\pi = 1$, & $p = 0$.	$S = s \ulcorner g$.
	σ, & γ ou π, $= 1$.	$S = 0$, & $\Sigma = 1$, & l'angle $= 90°$.
	γ & $\pi = 1$.	$S = s$, d'où $\sigma = \Sigma$. . . . . &c. comme ci-dessus.
5.me Savoir, cosinus de la première partie du côté cherché, $= p \ulcorner \varkappa$, & cosinus de la seconde, $= s \ulcorner \varkappa$.	$\Sigma = 1$, d'où $\varkappa = \pi$, & $h = p$.	cos. de première partie $= 1$, & sin. ainsi que l'arc, $= 0$; cos. de seconde partie $= s \ulcorner \pi$, & l'arc cherché, différence ou somme des deux, $= \mp$ le second.
	$\pi = 1$, d'où $\varkappa = \Sigma$, & $h = S$.	cos. de première partie $= 0$, sin. $= 1$, & arc de $90°$; cos. de seconde $= s \ulcorner \Sigma$, & l'arc cherché est complément ou supplément de sa seconde partie.
	$\sigma = 1$.	cos. de première partie $= p \ulcorner \varkappa$, & cos. de l'autre $= 0$, d'où sin. $= 1$, & arc de $90°$; & l'arc cherché est, ou complément de sa première partie, pris négativement, ou son supplément.
	π & $\sigma = 1$.	cos. des deux parties $= 0$, & l'arc $= 0$, ou bien $= 180°$.

Suite

Suite du premier Regiſtre.

RÈGLES ou formules de Règles, déſignées par N.^{os}	SUPPOSITIONS à faire ſur les Données.	RÉDUCTIONS, Règles qui en réſultent, & Remarques.
7.me Savoir, $\urcorner G = \pm p \urcorner S \mp \pi \urcorner g \vdash S$.	$\Sigma = 1$ & $S = 0$.	$\urcorner G = \mp \pi \urcorner g$.
	$\pi = 1$.	$\urcorner G = \mp \urcorner g \vdash S$.
	$\gamma = 1$.	$\urcorner G = \pm p \urcorner S$.
	Σ & $\pi = 1$.	$\urcorner G = \pm \urcorner g$.
	Σ & $\gamma = 1$.	$\urcorner G = 0$.
	π & $\gamma = 1$.	$\urcorner G = 0$.
9.me Savoir, coſ. de première partie de l'angle cherché $= \urcorner \varphi \urcorner s$, & coſinus de ſeconde $= \urcorner \varphi \urcorner p$.	$\Sigma = 1$, d'où $\varphi = \pi$, & $f = p$.	coſ. de première partie $= \urcorner \pi \urcorner s$, & coſ. de ſeconde $= 1$; d'où ſinus de la même $= 0$, & l'angle cherché = ſa première partie.
	$\pi = 1$, d'où $p = 0$, $\varphi = \Sigma$, & $f = S$.	coſ. de première partie $= \urcorner \Sigma \urcorner s$, & coſ. de ſeconde $= 0$, la ſeconde $= 90°$, & l'angle cherché eſt, ou complément, pris négativement, de ſa première partie, devenant rentrante, ou ſon ſupplément.
	$\sigma = 1$.	coſ. de première partie $= 0$, & cette partie $= 90°$, & coſ. de ſeconde $= \urcorner \varphi \urcorner p$; d'où l'angle cherché eſt, ou complément, ou ſupplément de ſa ſeconde partie.
	π & $\sigma = 1$.	coſ. des deux parties à la fois $= 0$, les parties mêmes $= 90°$, & l'angle cherché $= 0°$ ou $180°$.

SECOND REGISTRE.

RÈGLES ou formules de Règles, désignées par N.os	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	RÉDUCTIONS, des Règles qui en résultent, & Remarques.
3.me Savoir, $S = s \Gamma \Pi - G P$.	$\sigma = 1$, & $s = 0$.	$S = - G P$.
	$\Gamma = 1$, & $G = 0$.	$S = s \Pi$.
	$\Pi = 1$, & $P = 0$.	$S = s \Gamma$.
	σ & Γ ou $\Pi = 1$.	$S = 0$.
	Γ & $\Pi = 1$.	$S = s$; d'où $\Sigma = \sigma$, $\Gamma = \gamma$, $\Pi = \pi$, & le triangle eſt équilatéral & équiangle.
4.me Savoir, $s = S \vdash G \vdash P + \urcorner G \urcorner P$.	$\Sigma = 1$, & $S = 0$.	$s = + \urcorner G \urcorner P$.
	$\Gamma = 1$, & $G = 0$.	$s = S \vdash P$.
	$\Pi = 1$, & $P = 0$.	$s = S \vdash G$.
	Σ & Γ ou Π, $= 1$.	$s = 0$, & $\sigma = 1$, & le côté $= 90°$.
	Γ & $\Pi = 1$.	$s = S$, d'où $\sigma = \Sigma$..&c. comme ci-deſſus.
6.me Savoir, coſ. de première partie $= P \vdash \nu$, & coſ. de l'autre $= - S \vdash \nu$.	$\sigma = 1$, d'où $\nu = \Pi$, & $h = P$.	coſ. de première partie $= 1$, & ſinus, ainſi que l'angle, $= 0$; coſ. de ſeconde partie $= - S \vdash \Pi$, & l'angle cherché, différence ou ſomme des deux, $= \mp$ la ſeconde.
	$\Pi = 1$, d'où $\nu = \sigma$, & $h = s$.	coſinus de première partie $= 0$, ſin. $= 1$, & angle droit; coſ. de ſeconde $= S \vdash \sigma$, & l'angle cherché complément ou ſupplément de ſa ſeconde partie.
	$\Sigma = 1$.	coſ. de première partie $= P \vdash \nu$, & coſ. de l'autre $= 0$, d'où ſin. $= 1$ & angle droit, & l'angle cherché eſt, ou complément, ou ſupplément de ſa première partie, pris négativement.
	Π & $\Sigma = 1$.	coſinus de chaque partie $= 0$; & l'angle cherché, ou $= 0$, ou $= 180°$.

Suite du second Regiſtre.

RÈGLES ou formules de Règles, déſignées par *N.*ᵒˢ	SUPPOSITIONS à faire ſur les Données.	RÉDUCTIONS, Règles qui en réſultent, & Remarques.
*8.*ᵐᵉ Savoir, ⌉*g* = ± *P* ⌉*s* ∓ Π ⌉*G* ⊢*s*.	σ = 1 & *s* = 0.	⌉ *g* = ∓ Π ⌉ *G*.
	Π = 1.	⌉ *g* = ∓ ⌉ *G* ⊢ *s*.
	Γ = 1.	⌉ *g* = ± *P* ⌉ *s*.
	σ & Π = 1.	⌉ *g* = ∓ ⌉ *G*.
	σ & Γ = 1.	⌉ *g* = 0.
	Π & Γ = 1.	⌉ *g* = 0.
*10.*ᵐᵉ Savoir, coſ. de première partie de l'arc cherché = ⌉ φ ⊢*S*, & coſ. de ſeconde = ⌉ φ ⌉ *P*.	Σ = 1, d'où φ = Π & *f* = *p*.	coſ. de première partie = ⌉ Π ⌉ *S*, & coſ. de ſeconde = 1 ; d'où ſin. de la même = 0, & l'arc cherché = ſa première partie.
	Π = 1, d'où *p* = 0φ = σ, & *f* = *S*.	coſ. de première partie = ⌉ σ ⌉ *S*, & coſ. de ſeconde = 0, la ſeconde = 90° ; & l'angle cherché, eſt, ou complément pris négativement de ſa première partie, devenant rentrante, ou ſon ſupplémen
	Σ = 1 & *S* = 0.	coſ. de première partie = 0, & cette partie = 90°, & coſ. de ſeconde = ⌉ φ ⌉ *P*; d'où l'arc cherché eſt, ou complément, ou ſupplément de ſa ſeconde partie.
	Π & Σ = 1.	coſ. des deux parties à-la-fois = 0, les parties mêmes = 90°, & l'angle cherché = 0°, ou 180°.

Seconde Observation générale.

Les réductions des deux Registres précédens, peuvent servir à construire généralement dans la sphère même, & par la seule figure dont nous avons fait jusqu'ici usage, mais aux deux arcs ponctués de laquelle il sera désormais nécessaire d'être attentif, nos formules 3.me, 6.me, 8.me & 10.me, les seules qui offrent chacune une double solution.

En effet, 1.° abaissant dans le cas de la formule 3, de l'angle G un arc GE perpendiculaire sur SP, prolongée s'il le falloit, on aura dans le triangle rectangle GES, sin. E, ou 1 : sin. S, ou Σ : : sin. SG, ou π : sin. $GE = \Sigma\pi, = n$, & par conséquent cos. $GE = \sqrt{(1 - \Sigma^2\pi^2)} = h$; & la première, $s = gp$, des réductions du premier Registre précédent, relative à la formule 1.ere dans le triangle rectangle, donnera encore cos. SG, ou p, divisé par cos. GE, ou par h, $=$ cos. SE, $= \frac{p}{h} = p \llcorner\!\!\dashv n$; & de même cos. GP, ou s, divisé par cos. GE, ou par h, $=$ cos. PE, $= \frac{s}{h}, = s \llcorner\!\!\dashv n$; en sorte que nous avons assigné à propos dans la règle 3.me, pour les deux parties du côté cherché SP, les arcs SE, PE, dont les cosinus seroient $p \llcorner\!\!\dashv n$, & $s \llcorner\!\!\dashv n$, & leur somme pour ce côté même.

2. Traçant dans le cas de la formule 6.me, un arc de 90° qui se termine en F, au côté SP prolongé, s'il est nécessaire, on aura dans le triangle à un côté de 90°, GSF, sin. GF, ou 1 : sin. GS, ou π : : sin. GSF, ou Σ : sin. GFS, $= \Sigma\pi, = n$, & par conséquent cos. $GFS = \sqrt{(1 - \Sigma^2\pi^2)} = h$; & la première, $S = - GP$, des réductions du second Registre précédent, relative à la formule 3.me dans le triangle à un côté de 90°, donnera encore cos. GSF, ou S, divisé par $-$ cos. GFS, ou par $-h$, $=$ cos. FGS, $= \frac{-S}{h}, = -S \llcorner\!\!\dashv n$; & de même cos. GPS, ou P, divisé par cos. GFS

ou par $+ h$, $=$ cof. FGP, $= \frac{}{h}$, $= P \ulcorner \eta$; en forte que nous avons affigné à propos dans notre 6.me règle, les deux expreffions $- S \ulcorner \eta$ & $+ P \ulcorner \eta$, pour les cofinus des deux parties SGF, FGP, de l'angle SGP, ou G, dont cette formule de la même règle étoit deftinée à nous faire connoître la valeur, & la fomme de ces deux parties, pour l'angle même.

3.° Dans le cas de la règle 9.me, les deux triangles rectangles SGE, PGE donneront lieu à ces deux proportions, fin. GE, ou $\Sigma\pi$ (comme on a montré au premier article), ou φ : fin. SE, $= \gamma(1 - \frac{p^2}{1 - \Sigma^2\pi^2})$, $= \frac{\pi\surd(1 - \Sigma^2)}{f}$, $= \frac{\pi S}{f}$ :: Σ : fin. $SGE = \frac{\Sigma\pi S}{\varphi f}$, $= \frac{\varphi S}{\varphi f}$, $= \frac{S}{f}$; & fin. GE, ou $\Sigma\pi$, ou $\sigma\Pi$ fon équivalent : fin. PE, $= \gamma(1 - \frac{s^2}{1 - \Sigma^2\pi^2})$, $= \frac{\surd(\sigma^2 - \Sigma^2\pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$ :: Π : fin. PGE $= \frac{\surd(\sigma^2 - \Sigma^2 x^2)}{\sigma\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$; de la première defquelles s'enfuit cof. $SGE = \frac{\surd(\Sigma^2 - \Sigma^2\pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$, $= \frac{\Sigma p}{f}$, $= \frac{\Sigma\pi p}{f\pi}$, $= \frac{\varphi}{f} \times \frac{p}{\pi}$, & dont la feconde donne cof. $PGE = \frac{\surd(\sigma^2 - \sigma^2\Sigma^2\pi^2 - \sigma^2 + \Sigma^2\pi^2)}{\sigma\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$, $= \frac{\Sigma\pi s}{\sigma\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$, $= \frac{\varphi s}{f\sigma}$; & c'eft par conféquent avec raifon que nous avons affigné, dans notre 9.me règle, les valeurs $\pm \urcorner \varphi \urcorner p$ & $\urcorner \varphi \urcorner s$, aux cofinus des deux parties SGE & PGE de l'angle PGS, que nous cherchions alors.

4.° Enfin, dans le cas de la règle 10.me, les deux triangles à un côté de 90° SGF, PGF, donneront lieu aux proportions fuivantes, fin. S, ou Σ : fin. SGF, $=$ (d'après l'article II), $\frac{\gamma(1 - \Sigma^2\pi^2 - 1 + \Sigma^2)}{\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$, $= \frac{\Sigma p}{\surd(1 - \Sigma^2\pi^2)}$ :: fin. GF, ou 1 : fin. SF, $= \frac{p}{\gamma(1 \mp \Sigma^2\pi^2)}$, dont le cofinus

$= \frac{\surd(\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2 \pi^2)}, = \frac{S\pi}{f}, = \frac{S \Sigma \pi}{\Sigma f}, = \frac{S \varphi}{\Sigma f}$; & ſin. GPS, ou Π : ſin. PGF, $= \frac{\surd(1 - \Sigma^2\pi^2 - 1 + \Pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2 \pi^2)}, = \frac{\surd(\Pi^2 - \Sigma^2 \pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2 \pi^2)}, = \frac{\surd(\Pi^2 - \sigma^2 \Pi^2)}{\surd(1 - \Sigma^2 \pi^2)}, = \frac{\Pi s}{f}$: : ſin. GF, ou 1 : ſin. PF, $= \frac{s}{f}$, dont le coſinus $= \frac{\surd(1 - \sigma^2 \Pi^2 - 1 + \sigma^2)}{f}, = \frac{\sigma P}{f}, = \frac{\sigma \Pi P}{f \Pi}, = \frac{\Sigma \pi P}{f \Pi}, = \frac{\varphi P}{f \Pi}$. Or, les deux valeurs $\frac{S\varphi}{\Sigma f}$ & $\frac{P\varphi}{\Pi f}$, ou $\urcorner S \urcorner \varphi$ & $\urcorner P \urcorner \varphi$ étant en effet celles que nous avons aſſignées aux coſinus des deux parties SF, PF, du côté SP que nous cherchions, nous avons donc donné à propos à ce côté, pour valeur, la ſomme ou la différence des arcs auxquels de tels coſinus appartiendroient.

Troiſième Obſervation générale.

La ſimplification qui réſulte dans la réſolution des triangles ſphériques, de la ſuppoſition qu'une des données quelconque de tout problème concernant ces triangles, ſoit de 90°, s'étendant également, ſuivant la première des deux obſervations précédentes, aux côtés & aux angles; l'une de ces ſimplifications ſe changeant même toujours en l'autre, par l'inverſion qu'on peut faire d'un côté en ſupplément d'angle, ou d'un angle en ſupplément de côté, & l'angle nouvellement introduit GFS, que forme dans la ſeconde des mêmes obſervations, le côté nouvellement introduit auſſi GF, de 90°, n'ayant pas moins aux articles II & IV de cette Obſervation, la quantité $\Sigma \pi$ pour ſinus, que ne l'a aux articles I & III, l'arc nouvellement introduit auſſi GE, l'un des côtés de l'angle droit E; il s'enſuit de tout cela que la ſuppoſition d'un côté de 90° n'eſt pas moins propre que celle d'un angle de 90°, ou droit, à la ſimplification des triangles ſphériques; que les triangles ſphériques à un ou deux ou trois côtés de 90° ne méritoient donc pas moins d'être conſidérés, ſelon qu'ils l'auroient pu, par eux-

mêmes & au long, que ceux à un ou deux ou trois angles, de 90° auſſi; que les premiers auteurs de Trigonométrie ſphérique ne ſauroient donc avoir eu plus de raiſon d'adopter les réſultats qu'ils ont déduits de l'une de ces ſuppoſitions, plutôt que ceux qu'ils auroient conclu de l'autre, comme des degrés néceſſaires pour s'élever de-là aux énoncés généraux des triangles obliquangles, & qu'étant néanmoins tous, partis à cet effet, de la théorie du triangle ſphérique rectangle, qu'ils ont ſeule traitée au long, à l'excluſion de celle des triangles ſphériques à des côtés de 90°, ils doivent s'être laiſſés en cela, guider mal-à-propos, par une analogie de la Trigonométrie rectiligne, telle qu'elle eſt préſentée dans la plupart des livres élémentaires, à la ſphérique, laquelle n'aſtreignoit nullement à ſuivre une pareille méthode, & ne ſe ſoutenant d'ailleurs qu'imparfaitement, auroit dû, même par cette ſeule raiſon, être abſolument abandonnée.



DIVERSES MESURES,

En partie neuves, des Aires sphériques & des Angles solides, triangulaires & polygones, dont on est supposé connoître des élémens en nombre suffisant, avec des Remarques qu'on croit pouvoir contribuer à simplifier les intégrations de plusieurs Équations différentielles à inconnues actuellement séparées.

Par M. l'Abbé DE GUA.

ALBERT GIRARD, Samiélois *(a)*, Géomètre du commencement du dernier siècle, & le même qui a commenté Stevin, est le premier auteur qui se soit proposé la recherche de la mesure des angles solides, & fit pour y parvenir deux pas différens.

Le premier (que les analogies de l'angle plan à l'angle solide, & de la circonférence circulaire à la superficie sphérique, rendoient très-facile) de s'apercevoir que la mesure qu'il cherchoit, dépendoit de celle des aires des triangles sphériques.

Le second, d'assigner au juste la valeur des mêmes aires, en donnant une règle très-simple, d'où elle dérive en effet.

Très-jaloux de la découverte qu'il crut d'après cela, pouvoir s'attribuer, il eut grand soin de remarquer dans sa Brochure sur ce sujet, intitulée *Invention nouvelle en Algèbre*, qui date de 1629, & dont il y a un exemplaire à la Bibliothèque du Roi, qu'elle n'avoit jusqu'à lui été connue de qui

(a) Cet auteur paroît avoir voulu indiquer, en se donnant cette qualification, qu'il étoit natif de la ville de Saint-Michel, ou Saint-Mihel en Barrois, qu'on auroit autrefois appelée *San-Mihel* ou *Sa-Miel*.

que

que ce fût, *à moins*, ajouta-t-il, *que ce ne n'eût été avant le Déluge.*

Mais quoiqu'il fût dès-lors tombé véritablement sur une solution générale, exacte & très-belle, d'un des problèmes des plus curieux qu'il pût se proposer, on ne sauroit en même temps disconvenir que la gloire qu'il ambitionnoit à cet égard, fût plus qu'obscurcie par un défaut essentiel qui régna dans la démonstration qu'il prétendit donner de la même solution, relativement au triangle sphérique rectangle en particulier ; cas duquel il faisoit du reste fort bien voir que la vérité devroit s'étendre à tous les autres.

Ayant en effet comparé d'abord, au moyen d'une déduction très-embrouillée & très-difficile à suivre, l'aire d'un triangle sphérique rectangle qu'il considère, à une portion de surface sphérique comprise dans une même inclinaison de plans, & terminée par un petit cercle perpendiculaire aux deux plans qui forment l'inclinaison, il conclut l'égalité des deux, *de cela seul que la base de l'un croisera*, dit-il, *toujours la base de l'autre; d'où*, continue-t-il, *on doit inférer que l'un veut continuellement égaler l'autre, que cela accorde avec son théorème incessamment, que la vérité en est donc manifeste & probable.*

Et ce fut du reste, avec raison, qu'il donna ensuite à l'énoncé de sa proposition, une extension qui la rend propre à tous les polygones sphériques, & dont je parlerai plus bas; diverses choses sur lesquelles on peut consulter son petit ouvrage.

Le P. Bonaventure Cavallieri, Jesuate italien, professeur d'Astronomie à Bologne, & si connu par l'Introduction de la méthode des Indivisibles dans les Mathématiques, qu'on lui dut, selon bien des Géomètres du dernier siècle ou du commencement de celui-ci, mais qu'on doit plutôt lui reprocher, selon d'autres plus nombreux, récens pour la plupart, & d'un poids beaucoup plus grand, donna & démontra d'ailleurs très-élégamment, la même règle, dans le *Directorium generale uranometricum*, qu'il fit imprimer à Bologne en 1632; & n'ayant point eu sans doute connoissance de la petite brochure

qu'Albert Girard avoit miſe au jour trois ans auparavant, en Hollande, il témoigna auſſi la regarder comme abſolument neuve, en ſe ſervant de ces termes, *quod* (inventum) *a nemine huc uſque quem ſciam traditum fuit.*

Il laiſſa de plus entendre à quel point il étoit flatté de croire l'avoir découverte, non-ſeulement en l'appelant *inventum pulcherrimum, novâ nec adhuc auditâ ratione, licet non ſit ex facilioribus (b) detegendum*, mais encore en la plaçant à deſſein, dans le dernier chapitre de ſon Livre, comme pour y laiſſer ſes lecteurs ſur la bonne bouche; *illudque*, dit-il, *hoc poſtremo capite non incongruè fuit reſervatum, quò ſublatis dapibus quibus in menſâ communiter veſci conſueſcimus, his exempta (c) fames, novo hoc cibo reſtituta, famelici potiùs quàm ſaturi ab aſtronomicâ menſâ diſcedamus.*

Enfin il fut attentif à rendre compte, & même dans quelque détail, des divers uſages auxquels elle pourroit ſervir.

La même meſure fut depuis donnée, démontrée à la manière de Cavallieri, & attribuée, tant à ce Jéſuate qu'à Girard, par Jean Caſwel, Maître ès Arts Anglois, dans ſa Trigonométrie ſphérique, inſérée à la ſuite du Recueil des Œuvres de Wallis; & Lagny en fit depuis mention, ſans dire qu'elle fût déjà connue, à la fin d'un Mémoire qu'on trouve dans le Recueil de ceux de l'Académie, de l'année 1714.

Mais une ſi curieuſe invention, qui comprend dans le plus ſimple ſans comparaiſon, de tous ſes cas, celle dont les ſymboles furent autrefois gravés ſur le tombeau d'Archimède, ne m'en avoit pas moins abſolument échappé juſqu'après le temps où j'eus découvert la plupart des propoſitions neuves & nombreuſes ſur le tétraèdre, que j'ai dit, au commencement de ma Trigonométrie ſphérique, devoir faire la matière du troiſième

---

(b) Il faut lire ſans doute ici, *difficilioribus ;* car la facilité, qui eſt un des caractères de la démonſtration dont il y eſt queſtion, contribue beaucoup à en relever le prix.

(c) Il faudroit ajouter ici *cum fuerit*, ou lire à l'ablatif abſolu, *exemptâ fame ;* mais je me fais un devoir de rapporter le paſſage tel qu'il ſe trouve dans le Livre.

Mémoire qui me reste à insérer dans ce Volume; ce qui remonte à environ trente années.

L'analogie de ces matières, avec l'objet sur lequel elle roule, m'ayant vers cette époque, déterminé à en entreprendre la recherche, je pensai de plus, mais mal-à-propos, qu'il ne seroit possible d'y réussir que par le secours des calculs différentiel & intégral; & après y avoir en effet employé ces calculs, en prenant pour données, selon qu'il m'avoit paru convenir le mieux, les cosinus des côtés du triangle sphérique, ou des angles plans des faces de l'angle solide à trois faces, je m'aperçus bientôt avec satisfaction, que la combinaison des règles de différentiation & d'intégration, avec la seconde des formules que j'ai données dans la Trigonométrie sphérique, me menoit à une solution très-simple, mais énoncée, contre mon attente, par les angles du triangle sphérique, ou les inclinaisons de faces de l'angle solide, qui ne m'avoient pourtant point fourni de données, laquelle est en effet la même que celle de Girard & Cavallieri.

Je me croyois donc, d'après cela, inventeur de cette belle règle lorsqu'un de nos Confrères à qui j'en fis part, & qui se trouva l'avoir déjà connue, me mit sur la voie de revenir à cet égard de mon erreur; & en même temps que j'en fus détrompé, je m'aperçus avec quelque surprise, que bien que la solution que j'avois trouvée, fût une des meilleures, & vraisemblablement la meilleure, que les calculs différentiel & intégral pussent offrir, celle de Cavallieri, qui, contre ce que j'avois cru possible, n'employoit que la super-position jointe aux propriétés élémentaires de la sphère, étoit au moins aussi élégante.

M'étant d'ailleurs remis, après une très-longue inrerruption, aux travaux mathématiques, j'ai reconnu que Jacques Bernoulli, dans le I.er volume de ses Œuvres, qui n'a paru qu'en 1744, *page 448*, & feu M. Léonard Euler, dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, de l'année 1753, *page 233*, s'étoient successivement proposé de résoudre, & avoient en effet résolu le cas du même

problème, où le triangle seroit supposé rectangle; & que M. Euler en particulier, en avoit facilement déduit une solution générale, outre une autre de cette dernière espèce, ou indépendante de la supposition d'un angle droit, qu'il donne à la suite; qu'enfin M. l'abbé Bossut en avoit inséré dans ses élémens de Géométrie, une dernière, élémentaire comme celle de Cavallieri, & du reste très-différente de celle-ci.

Diverses considérations me déterminent pourtant, à ne point m'abstenir de présenter la mienne à l'Académie.

La première, que Jacques Bernoulli se bornant dans la sienne, comme je viens de remarquer, à la considération du seul triangle sphérique rectangle, ne parvient malgré cela, à son but, qu'au moyen d'une déduction très-compliquée, & ne construit ensuite sa solution de ce cas si particulier, qu'en employant une courbe qu'il enseigne à tracer; tandis que le problème peut être construit dans toute sa généralité, comme on le verra plus bas, par un simple secteur de grand cercle de la sphère; & quant aux deux solutions de M. Euler, tirées l'une & l'autre, ainsi que l'ouvrage dont la dernière fait partie, de la méthode très-indirecte en cette matière, *des plus grands & des plus petits*, qu'elles n'ont pu ne point participer du défaut que j'ai reproché au commencement de ma Trigonométrie sphérique, à l'emploi à de tels égards, de cette méthode, & duquel j'ai remarqué alors, que l'auteur même convenoit.

La seconde, que j'en conclurai successivement, deux règles neuves fort simples; l'une pour passer de la connoissance des cosinus des trois angles plans de l'angle solide, c'est-à-dire, des fonctions trigonométriques les plus simples, de ses trois élémens les plus simples aussi, à celle de la tangente de la moitié de l'arc d'où dépend sa mesure; l'autre pour employer semblablement la connoissance des cotangentes de moitié des angles plans de deux faces du même angle solide, & celle de la cosécante & de la cotangente de l'inclinaison de ces deux faces, à la détermination de la cotangente de l'arc ou angle d'où doit résulter la même mesure, & cela sans

recherche préalable, ni d'aucune fonction trigonométrique des inclinaisons de faces, ni des arcs que les Tables donnent en conséquence, pour mesures de ces inclinaisons mêmes; deux choses qu'on verra que la règle ordinaire suppose nécessairement.

La troisième, qu'elle donnera lieu à deux remarques qui me semblent importantes, sur les simplifications que des considérations particulières aux divers problèmes qu'on se propose à résoudre, & l'emploi, tant des propositions de Trigonométrie sphérique, que de la mesure supposée de l'angle solide, seroient propres à faire naître dans des intégrations qu'on auroit jugées sans ce secours, d'un plus haut degré de difficulté.

A quoi j'ajouterai qu'on aura encore, d'après la lecture de ce Mémoire, l'avantage d'être à portée de comparer ensemble, plusieurs méthodes de solution d'un des plus beaux problèmes de Géométrie, aussi différentes l'une de l'autre que le sont celles de Cavallieri, de Jacques Bernoulli, de M. Léonard Euler & de M. l'abbé Bossut, lesquelles on connoissoit déjà, & celle que je vais présenter.

PROBLÈME.

Mesurer l'aire d'un triangle sphérique quelconque, & dès-lors aussi, l'angle solide composé de trois angles plans, quelconques, qui, ayant son sommet au centre de la sphère, se termineroit par ses trois inclinaisons de plans, aux trois angles du triangle sphérique proposé.

SOLUTION.

Que le côté GP du triangle sphérique GSP *(planche I, figure 2)* reste constant, soit de quantité, soit de position, tandis que le côté PS restant aussi constant de quantité, mais variant de position, passera dans la situation infiniment voisine PY, & que le troisième côté GS, variant tout-à-la-fois, & de position, & de quantité, passera dans la situation infiniment voisine GY, & s'accourcira d'ailleurs,

de la droite infiniment petite SZ, à l'extrémité Z de laquelle aboutit la perpendiculaire infiniment petite YZ, tirée de Y fur GS.

Cela pofé, — ZS fera la différence de l'arc GS, oppofé à l'angle en P, dont nous fuppoferons, comme dans notre Trigonométrie fphérique, que p & π foient refpectivement le cofinus & le finus, différence qu'on fait être

$$= \frac{-dp}{\pi}, = \frac{-dp}{\sqrt{(1-pp)}}.$$

L'angle ZYS du triangle infiniment petit YSZ, aura de plus, pour complément, l'angle YSZ; & l'égalité fuppofée des deux arcs finis PS & PY, emportant avec elle, que la droite infiniment petite YS, foit perpendiculaire à l'un & à l'autre de ces deux mêmes arcs, l'angle YSZ fera auffi complément de GSP; en forte qu'on aura $YZS = GSP$, & que fi l'on nomme toujours comme dans la Trigonométrie fphérique, refpectivement, S & Σ, le cofinus & le finus de l'angle fphérique GSP, tels feront auffi le cofinus & le finus de ZYS.

D'où s'enfuivront ces deux proportions,

$$\text{fin. } ZYS, \text{ ou } \Sigma : \text{fin. } YZS, \text{ ou } 1 :: ZS,$$

$$\text{ou } \frac{-dp}{\sqrt{(1-pp)}} : YS = \frac{-dp}{\Sigma\sqrt{(1-pp)}};$$

$$\text{Et fin. } ZYS, \text{ ou } \Sigma : \text{fin. } YSZ, \text{ ou } S :: ZS,$$

$$\text{ou } \frac{-dp}{\sqrt{(1-pp)}} : YZ = \frac{-Sdp}{\Sigma\sqrt{(1-pp)}}.$$

Les bandes fphériques infiniment petites PYS, GYZ, prolongées l'une & l'autre jufqu'aux grands cercles dont leurs fommets P & G feroient refpectivement les pôles, couperoient d'ailleurs évidemment dans ces grands cercles, des portions infiniment petites auffi, qui feroient refpectivement à YS & à YZ, comme le rayon de la fphère feroit aux rayons des petits cercles auxquels appartiendroient refpectivement

YS & YZ, c'eſt-à-dire aux ſinus γ & π des arcs PS, & GY ou GS; & ces deux portions coupées dans deux différens grands cercles, devroient être par conſéquent, la première $= \frac{-dp}{\gamma\Sigma\sqrt{(1-pp)}}$, & la ſeconde $= \frac{-Sdp}{\Sigma.(1-pp)}$.

Or puiſque les bandes mêmes PYS & GYZ, ſont évidemment égales aux mêmes portions, multipliées, la première par $(1 - g)$, & la ſeconde par $(1 - p)$, ces mêmes bandes ſeront donc, la première $= \frac{-(1-g).dp}{\gamma.\Sigma.\sqrt{(1-pp)}}$, & la ſeconde $= \frac{-S.(1-p).dp}{\Sigma.(1-pp)}$; en ſorte que l'excès de la ſeconde de ces expreſſions ſur la première,

$$\text{ou } \frac{-\gamma.S.(1-p) + (1-g).\sqrt{(1-pp)}}{\gamma.\Sigma.(1-pp)}\,dp,$$

devra être égal à la différence de la ſurface triangulaire ſphérique; équation différentielle dont je remarquerai d'abord, que l'intégrale, quelle qu'elle puiſſe être, doit contenir les mêmes fonctions de chacun des trois côtés ou des trois angles du triangle ſphérique, & que le coſinus p, qui y eſt différencié, ne ſauroit d'ailleurs être exclu préalablement à l'intégration; d'où s'enſuit qu'il ne faudra penſer à y ſubſtituer avant l'intégration, que les ſeules valeurs de Σ, de S, de π & de γ, en s, g & p.

Pour remplir ce dernier objet, on emploîra donc ici, les valeurs de S & de Σ, en s, g & p, qu'on trouve par la première des règles de la Trigonométrie ſphérique, ſavoir, $S = \frac{s-gp}{\gamma\pi}$, & $\Sigma = \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\gamma\pi}$, leſquelles donneront $\frac{1}{\Sigma}$, ou $\ulcorner S, = \frac{\gamma\sqrt{(1-pp)}}{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}$ & $\frac{S}{\Sigma}$, ou $\mathrm{T}\,S = \frac{s-gp}{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}$, & ſubſtituées dans la différentielle ci-deſſus, la changeront en

$$\frac{1-g}{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}\,dp \quad \frac{-s+gp}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}\,dp,$$

ou en $\frac{1+p-g-gp-s+gp}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}\,dp$, ou enfin en

$$\frac{1}{\sqrt{(1-ss-gg-pp+2sgp)}}\,dp \; \frac{-g-s}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}\,dp,$$

dont il ne s'agira plus que d'intégrer les deux parties.

On changera, pour faciliter l'intégration de la première, le radical $\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}$, d'abord en $\sqrt{(1-s^2-g^2+s^2g^2-p^2+2sgp-s^2g^2)}$, puis en $\sqrt{[\gamma^2\sigma^2-(p-gs)^2]}$; puis, dans la vue de réduire le premier des deux membres sous le signe, à l'unité, en $\gamma\sigma\sqrt{[1-\frac{(p-sg)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}$; & d'après cela, la différence même à laquelle ce dénominateur appartient, en

$$\frac{\frac{dp}{\gamma\sigma}}{\sqrt{[1-\frac{(p-gs)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}}$$

, laquelle a évidemment pour intégrale l'arc de cercle décrit du rayon 1, duquel le cosinus seroit $\pm\frac{p-gs}{\gamma\sigma}$, c'est-à-dire, suivant la seconde règle du Mémoire précédent, qui mesureroit l'angle en P du triangle sphérique GSP.

Quant à l'intégration de la seconde partie de différence, nous la tirerons principalement de cette réflexion, que nous n'avons pu, en faisant varier p, & p seulement, trouver pour première partie d'intégrale, l'arc qui mesure l'angle en P, du triangle sphérique GSP, qu'autant qu'en faisant varier, ou g ou s, & une de ces deux lettres seulement, nous eussions dû trouver pour première partie de la même intégrale, les arcs qui mesurent respectivement les angles en G & en S du même triangle sphérique; en sorte que les cosinus & sinus de ces angles, dont je nommerai respectivement, & toujours d'après ma Trigonométrie sphérique, les premiers G & Γ, de même que j'ai déjà nommé les derniers S & Σ, doivent entrer à même titre que les cosinus & sinus de l'angle en P, que je nommerai

nommerai de même P & Π, dans l'intégrale, quelle qu'elle puiſſe être, de la différencielle propoſée.

En effet, le premier pas que cette remarque nous indique de faire dans la recherche dont nous nous occupons, c'eſt de différencier la ſomme des deux arcs, dont G & Γ & S & Σ ſont reſpectivement les coſinus & ſinus, c'eſt-à-dire, de ceux qui ont pour coſinus $\frac{g - sp}{\sigma\pi}$ & $\frac{s - gp}{\gamma\pi}$, & pour ſinus $\frac{\sqrt{(1 - s^2 - g^2 - p^2 + sgp)}}{\sigma\pi}$ & $\frac{\sqrt{(1 - s^2 - g^2 - p^2 + 2sgp)}}{\gamma\pi}$, & de ſouſtraire enſuite la différence qui en proviendra, de la ſeconde partie qui nous ſera reſtée ci-deſſus, avec l'eſpérance bien fondée, que ſi nous n'épuiſons pas tout-à-fait par-là, cette ſeconde partie, nous la ſimplifierons du moins beaucoup.

Or, dG, par exemple, étant $= \frac{-s}{\sqrt{(1-ss)}.\sqrt{(1-pp)}}dp + \frac{gp}{\sqrt{(1-ss)}.\sqrt{(1-pp)^3}}dp - \frac{sp^2}{\sqrt{(1-ss)}.\sqrt{(1-pp)^3}}dp = \frac{-s+gp}{\sqrt{(1-ss)}.\sqrt{(1-pp)^3}}dp$, on aura par conſéquent $\frac{dG}{\Gamma} = \frac{-s+gp}{(1-pp)\sqrt{(1-g^2-p^2-s^2+2sgp)}}dp$, & par la même raiſon, $\frac{dp}{\Pi} = \frac{-g+sp}{(1-pp)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}dp$, & dès-lors $\frac{dG}{\Gamma} + \frac{dP}{\Pi} = \frac{(-g-s)\times(1-p)}{(1-pp)\sqrt{(1-ss-gg-pp+2sgp)}}dp = \frac{-g-s}{(1+p)\sqrt{(1-ss-gg-pp+2sgp)}}dp$, ou égale à la ſeconde partie de la même différentielle, laquelle étoit reſtée ci-deſſus à intégrer, ce qui ſeul fait voir que l'intégrale cherchée ne doit être autre choſe que la ſomme des trois arcs qui meſurent reſpectivement les trois angles du triangle ſphérique propoſé, multipliée, pour la porter à deux dimenſions, par le rayon 1, & d'une conſtante C, de deux dimenſions auſſi, qui reſte à déterminer.

J'obſerverai à l'égard de ce dernier objet, que dans le cas où les trois côtés du triangle ſphérique propoſé GSP,

feroient chacun de 90°, & où fes trois angles le deviendroient par conféquent auffi, l'intégrale devroit évidemment être $\frac{1}{8}$ de la furface fphérique entière, ou une demi-aire de grand cercle, & la fomme des trois arcs propres à mefurer les trois angles du triangle, multipliée par le rayon, deviendroit de fon côté, égale à trois demi-aires de grands cercles; d'où je concluerai que *C* doit être faite égale à une aire de grand cercle, prife négativement, ou au produit, pris négativement, d'une demi-circonférence par le rayon; & que la furface du triangle fphérique eft par conféquent & généralement, égale au produit de la fomme des trois arcs qui mefurent chacun des trois angles du triangle, moins une demi-circonférence, par le rayon, felon que l'ont dit Girard & Cavallieri.

Conftruction.

Du centre *C*, & d'un rayon égal à celui de la furface de fphère, dont celle du triangle propofé doit faire partie, décrivez *(fig. 3)* la circonférence *ABHDGE :* prenez-y, à commencer du point *A*, des arcs *AH, HD, DE* du même nombre de degrés refpectivement, que les trois angles en *S*, en *P* & en *G (fig. 2)* du triangle fphérique propofé : prolongez enfuite les rayons extrêmes *CA, CE* en arrière jufqu'en *G* & *B;* & le double de l'un des deux fecteurs égaux, *ACB, ECG,* ou, ce qui eft la même chofe, la fomme *ECABE* de ces deux mêmes fecteurs, fera égale à l'aire cherchée du triangle fphérique propofé, ou fera la mefure de l'angle folide dont les inclinaifons de faces aboutiront aux trois angles de ce triangle fphérique.

COROLLAIRE I.er

On peut inférer de-là, avec Albert Girard, que tout polygone fphérique eft égal au produit de la fomme des arcs propres à mefurer tous fes angles, diminuée d'un nombre de demi-circonférences exprimé par la différence du nombre de côtés ou d'angles qu'il comprend, à 2, par le rayon.

En effet, tout polygone ſphérique peut être décompoſé en autant de triangles ſphériques contigus les uns aux autres qu'il a de côtés moins deux, à la ſomme des aires deſquels la ſienne ſera égale, & à la ſomme des angles deſquels celle de ſes propres angles le ſera auſſi; & puiſque l'aire de chaque triangle élémentaire a pour meſure, le produit de la ſomme des trois arcs qui meſurent ſes angles, moins une demi-circonférence, par le rayon, celle du polygone doit donc être égale à la ſomme des arcs qui meſurent tous les angles de triangles élémentaires, c'eſt-à-dire, tous les angles du polygone, moins autant de demi-circonférences que la décompoſition forme de triangles, c'eſt-à-dire, que le polygone a de côtés moins deux, multipliée par le rayon.

COROLLAIRE II.

La règle de Girard & de Cavallieri pour la meſure de l'aire du triangle ſphérique, & pour celle de l'angle ſolide, laquelle nous avons démontrée d'une manière très-différente de celle de ces deux Auteurs & d'autres qui en ont traité après eux, n'eſt d'une exécution facile dans la pratique, qu'autant qu'on eſt ſuppoſé connoître les trois angles du triangle ſphérique, ou, ce qui revient au même, les trois inclinaiſons de faces de l'angle ſolide, ou du moins, des fonctions trigonométriques de ces trois angles ſphériques, ou inclinaiſons de faces, d'après leſquelles on puiſſe trouver aiſément dans des Tables trigonométriques, ces angles ſphériques, ou inclinaiſons de faces mêmes; & comme elle demande au contraire beaucoup de calculs de Trigonométrie ſphérique, dans ſon application aux cas où l'on ne connoîtroit que les côtés du triangle ſphérique, ou, ce qui revient au même, les angles plans de l'angle ſolide, ou encore des fonctions trigonométriques ſeulement, de ces derniers élémens, qui ſont pourtant auſſi ſimples au moins que les autres, & que l'imagination paroît même ſaiſir les plus aiſément de tous, j'ai penſé qu'il ſeroit à propos de chercher dans ce corollaire, à éviter un tel inconvénient, en y exprimant directement, s'il

étoit poſſible, l'aire du triangle ſphérique, & dès-lors la meſure de l'angle ſolide, par des fonctions trigonométriques des ſeuls côtés du triangle ſphérique, ou des ſeuls angles plans de l'angle ſolide.

J'ai dû commencer, & j'ai commencé en effet dans cette vue, par la recherche de l'expreſſion du coſinus du quotient de la diviſion de l'aire triangulaire ſphérique, que je venois de trouver, par le rayon, en coſinus des côtés ſeulement; mais combien n'ai-je pas craint d'abord, d'avoir entrepris à cet effet, un travail inutile, lorſque j'ai eu trouvé d'après l'application des règles pour l'addition & ſouſtraction, ſucceſſives ou entre-mêlées, des arcs ou angles dont on connoît les coſinus & les ſinus, & par un calcul aſſez long, mais facile, que je crois ſuperflu de rapporter ici, qu'elle devroit conſiſter en une fraction, dont le numérateur ſeroit $g + s + p - gs - gp - sp - g^3 - s^3 - p^3 - g^2s - g^2p - s^2g - s^2p - p^2g - p^2s - gsp + g^2s^2 + g^2p^2 + s^2p^2 + 3g^2sp + 3s^2gp + 3p^2gs + g^3s + g^3p + s^3g + s^3p + p^3g + p^3s - 2g^2s^2p - 2g^2p^2s - 2p^2s^2g - g^3sp - s^3gp - p^3gs + g^2s^2p^2$, & qui auroit pour dénominateur $(1 - g^2) \times (1 - s^2) \times (1 - p^2)$, produit qui ne peut évidemment avoir d'autres diviſeurs que les ſommes & les différences de l'unité & de chaque coſinus de côté.

Eſſayant pourtant ſi l'un de ces élémens du dénominateur ne lui ſeroit pas commun avec le numérateur, ce qui, d'après l'uniformité de compoſition des deux termes à-la-fois, par des g, des s & des p, emporteroit qu'il y en auroit au moins trois de tels, j'ai reconnu avec ſatisfaction, que le numérateur étoit en effet diviſible, ainſi que le dénominateur, par $(1 - g) \times (1 - s) \times (1 - p)$, & qu'ayant fait ſubir cette diviſion aux deux termes de la fraction tout-à-la-fois, & ſimplifié le premier des deux quotiens, je pouvois réduire la fraction même à

$$\frac{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p) - (1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p)}$$ &

de ſorte que la différence du rayon au coſinus, ou le ſinus verſe du quotient cherché, devoit être

$$\frac{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}{(1+g) \times (1+s) \times (1+p)},$$

en même-temps que le calcul ne feroit trouver reſpectivement, pour valeurs du ſinus & de la tangente du même quotient, que les expreſſions plus compliquées,

$$\frac{(1+g+s+p) \times \sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}}{(1+g) \times (1+s) \times (1+p)},$$

&

$$\frac{(1+g+s+p) \times \sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}}{(1+g) \times (1+s) \times (1+p) - \sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}}.$$

La grande ſimplification de l'expreſſion de la différence du rayon, au coſinus du quotient de la meſure de l'angle ſolide, par le rayon, m'a enſuite ſuggéré de chercher s'il ne s'en préſenteroit pas de ſemblable pour l'expreſſion de la ſomme des deux mêmes élémens, de laquelle on a vu dans le corollaire XIII de ma Trigonométrie ſphérique, que la diviſion par le réſultat de la précédente, ſuivie de l'extraction de racine carrée du quotient, pourroit, en ce cas, repréſenter très-ſimplement la tangente de moitié de l'arc ou angle, qui, multiplié par le rayon, doit meſurer l'aire de triangle ſphérique ou l'angle ſolide propoſé.

Or, j'ai trouvé en effet que la ſomme du rayon & du coſinus étoit $= \frac{(1+g+s+p)^2}{(1+g) \times (1+s) \times (1+p)}$; que le quotient de la diviſion de l'expreſſion du ſinus verſe précédent, par celle-ci, étoit donc $\frac{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}{(1+g+s+p)^2}$, & que la racine carrée de ce quotient, ou l'expreſſion de la tangente de moitié de l'arc qui, multiplié par le rayon, meſure l'aire triangulaire ſphérique, ou l'angle ſolide, propoſés, $= \frac{\sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}}{1+g+s+p}$, & eſt ainſi plus ſimple que celle de la tangente de l'arc entier même.

D'où j'ai enfin conclu la règle suivante, neuve encore, pour la mesure de l'aire triangulaire sphérique, des côtés seulement de laquelle on connoîtroit les cosinus, ou de l'angle solide, des angles plans seulement duquel on connoîtroit les cosinus.

Ajoutez à l'unité le double parallélipipède des trois cosinus donnés : soustrayez de la somme, celle des carrés des trois mêmes cosinus : tirez la racine carrée du restant ; & ayant divisé cette racine par la somme de l'unité & des trois cosinus donnés, le quotient vous représentera la tangente d'un arc ou angle, dont le double, multiplié par le rayon, sera la mesure cherchée.

Et la pratique de cette règle m'a d'ailleurs semblé beaucoup plus simple pour le cas dont il y est question, que ne seroit l'application qu'on voudroit faire au même cas, de celle de Girard & Cavallieri, laquelle devroit consister en trois solutions préliminaires d'autant de cas particuliers, mais à la vérité, semblables entr'eux, d'un même triangle sphérique, en la recherche dans les tables, des trois arcs ou angles correspondans aux trois cosinus que chacune de ces solutions auroit fait trouver, & en l'addition de ces trois arcs ou angles, suivie de la soustraction d'une demi-circonférence ou de deux droits, & de la multiplication du restant, par le rayon.

COROLLAIRE III.

Cette règle, la remarque qu'on a faite ci-dessus, que $\sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)} = \gamma\sigma\sqrt{[1 - \frac{(p - gs)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}$, & la proposition de Trigonométrie sphérique, qui apprend que $\frac{p - gs}{\gamma\sigma} = P$, en sorte que $\sqrt{[1 - \frac{(p - gs)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}$ doit être $= \Pi$, nous indiquent par leur réunion, que la fraction $\frac{\gamma\sigma\Pi}{1 + g + s + p}$ est aussi une expression de la tangente de moitié de l'arc ou angle cherché, qui, multiplié par le rayon, doit mesurer l'aire triangulaire sphérique, ou l'angle solide, proposés, & par conséquent, que $\frac{1 + g + s + p}{\gamma\sigma\Pi}$

eſt réciproquement l'expreſſion de la cotangente de moitié du même arc ou angle.

De plus, $1 + g + s + p$ étant $= 1 + g + s + gs + p - gs = \sqrt{(1 + g)^2} \times \sqrt{(1 + s)^2} + \gamma\sigma P$, & $\gamma\sigma$ étant $= \sqrt{(1 + g)} \times \sqrt{(1 + s)} \times \sqrt{(1 - g)} \times \sqrt{(1 - s)}$, la cotangente de moitié de la meſure cherchée ſera donc $= \frac{\sqrt{(1 + g)} \times \sqrt{(1 + s)}}{\sqrt{(1 - g)} \times \sqrt{(1 - s)}} \times \frac{1}{\Pi} + \frac{P}{\Pi}$, c'eſt-à-dire, égale au produit des cotangentes des moitiés des deux angles donnés, l'une par l'autre, & par la coſécante de l'angle donné, joint à la cotangente du même angle.

D'où réſulte, pour la meſure des aires des triangles ſphériques, dont on connoîtroit deux côtés & l'angle compris entre ces côtés, cette règle, neuve encore.

Formez un parallélipipède des cotangentes des moitiés des deux côtés donnés, & de la coſécante de l'angle donné auſſi, qu'ils ſont ſuppoſés comprendre entr'eux : ajoutez-y la cotangente du même angle; & la ſomme exprimera la valeur de la cotangente de moitié de l'arc ou angle, dont le double, multiplié par le rayon, devra être la meſure cherchée de l'aire triangulaire ſphérique propoſée; règle d'une pratique fort ſimple encore, ainſi que d'une application facile à la meſure de l'angle ſolide.

Première Obſervation.

L'indice d'une différentielle exacte dans la première partie de la différentielle du problème, lequel nous a été offert, d'abord par l'introduction d'un même carré avec les deux ſignes + & —, ſous le radical du dénominateur, puis, au moyen de la diviſion de la quantité compriſe ſous ce radical, par ſa partie conſtante, jointe à la multiplication hors du ſigne, par la racine de cette partie, enfin, par la tranſpoſition de cette dernière partie, du dénominateur au numérateur, nous ſemble aſſez propre à faire reconnoître à des Géomètres peu verſés encore dans la pratique du calcul intégral, d'autres différentielles exactes, dans des cas pareils

ou analogues, où ils ne se seroient pas facilement doutés d'en devoir rencontrer ; & la remarque d'où nous avons tiré la conjecture qui nous a facilité l'intégration de la seconde partie de la même différentielle du problème, ainsi que l'usage que nous avons fait dans cette intégration, d'une proposition de Trigonométrie sphérique, pourront d'ailleurs leur servir d'exemple de la simplification prodigieuse que certaines circonstances particulières des problèmes peuvent, à l'aide nommément de cette science, produire dans des intégrations dont les différentielles auroient paru sans cela, compliquées au point d'en être à peine susceptibles.

Seconde Observation.

Quoiqu'en préférant les moyens d'intégration des deux parties de la différence de l'inconnue du problème précédent, que nous avons employés ci-dessus, à titre de nous avoir paru fort simples & assez adroits, nous n'ayons voulu nullement donner à entendre que nous regardassions l'intégration de ces deux parties, même de la seule dernière, qui est la plus compliquée, comme difficile à un certain degré, par toute autre voie, nous remarquerons pourtant ici, que ces deux différences échappent l'une & l'autre aux formes générales d'aires de courbes que Newton a carrées dans son Traité *de quadraturâ curvarum;* & que s'il en est autrement à l'égard des formes générales de Cotes, & à plus forte raison, de celles que Smith a calculées après la mort de Cotes, conformément aux principes & sur les papiers posthumes de cet Auteur, au nombre de 94, & que Dom Charles Worsley a ensuite insérées dans son *Analyse des mesures des raisons & des angles*, elles ne se rapportent du moins, la première qu'à la 89.me, & la seconde qu'à la 91.me de ces 94 dernières formes générales, desquelles 89.me & 91.me formes, les seconds cas en donnent respectivement, pour intégrales, l'arc dont $\frac{-p+gs}{\sqrt{(1-g^2-s^2-p^2+2gps)}}$ seroit cotangente, & celui qui

auroit

auroit pour cotangente $\frac{(1+p)\times(1+gs)-(g+s)^2}{(g+s)\times\sqrt{(1-g^2-s^2-p^2+2gsp)}}$, exprimés d'abord l'un & l'autre en degrés, minutes, secondes, &c. & divisés ensuite par $27^d\ 17'\ 44''$, &c. ou par le nombre de degrés, minutes, secondes, &c. que contiendroit le rayon fléchi en arc; expressions dont la première se rapporte évidemment à ce que nous avons établi, & la seconde se trouveroit y revenir pareillement, si, ayant cherché le cosinus & le sinus de la somme des deux arcs ou angles dont les cosinus & sinus particuliers seroient respectivement, $\frac{g-sp}{\sigma\pi}$, $\frac{\sqrt{(1-g^2-s^2-p^2+2gsp)}}{\sigma\pi}$ & $\frac{s-gp}{\gamma\pi}$, $\frac{\sqrt{(1-g^2-s^2-p^2+2sgp)}}{\gamma\pi}$, on en déduisoit la valeur de la cotangente de cette somme; sans que les Tables en offrent pourtant aucune de la somme même des deux parties de la différentielle, comme a fait au contraire notre second corollaire.

Or, ne seroit-on pas fondé à inférer de-là, que des intégrations qui, prises même par parties, se refusent à celles des formes générales calculées par Newton, ne sont même comprises en cet état, que dans les dernières de pareilles formes générales, que l'Éditeur de l'Ouvrage posthume de Cotes a jointes à celles que ce Géomètre avoit lui-même données, & n'admettent que des constructions très-compliquées de Géométrie plane, devenant pourtant d'une construction très-facile par l'emploi de la première des propositions générales de la Trigonométrie sphérique, réuni à la mesure de l'aire triangulaire sphérique, ou de l'angle solide; le même emploi réuni à la même mesure, & après avoir été généralisé par des transformations, seroit propre à en simplifier un grand nombre d'autres, & à reculer ainsi beaucoup, les bornes dans lesquelles l'intégration des différentielles à inconnues actuellement séparées, a été jusqu'ici resserrée?

De même en effet, qu'on reconnoît que l'intégration de telle ou telle différentielle, dépend des logarithmes, de la quadrature du cercle, de la rectification de la parabole ou de l'ellipse, &c. & qu'on se contente dès-lors de l'y rapporter,

ne pourroit-on pas auſſi rapporter celle de telles ou telles autres, à la *planification* (qu'on me permette ce terme) d'une ſurface triangulaire ſphérique, dont on connoîtroit tels ou tels élémens, par exemple, les trois coſinus de côtés, ou, ce qui ſeroit la même choſe, à celle de l'angle ſolide dont on connoîtroit des élémens analogues, par exemple, les trois coſinus d'angles plans, en un mot, à l'intégration ſuppoſée de

$$\frac{1 - g - s + p}{(1 + p)\sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}}\, dp = dx;$$ généraliſée?

Ou encore remarquant que cette différentielle doit, lorſqu'on y aura ſubſtitué $\gamma\sigma P + gs$ pour p, & $\gamma\sigma dP$ pour dp, ſe changer en

$$\frac{(1 - g - s + gs + \gamma\sigma P) \times \gamma\sigma dP}{(1 + gs + \gamma\sigma P) \times \sqrt{[(1 - g^2) \times (1 - s^2) - \gamma^2\sigma^2 P^2]}}, = dx;$$

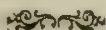
c'eſt-à-dire,

$$\frac{[(1 - g) \times (1 - s) + \sqrt{(1 - g^2)} \times \sqrt{(1 - s^2)}\, P] \times \sqrt{(1 - g^2)} \times \sqrt{(1 - s^2)}}{[1 + gs + \sqrt{(1 - g^2)}\sqrt{(1 - s^2)}\, P] \times \sqrt{[(1 - g^2) \times (1 - s^2) \times (1 - P^2)]}}\, dp = dx;$$

ne pourroit-on pas, au moyen de cette formule généraliſée, rapporter pluſieurs autres différentielles à la planification d'une ſurface ſphérique, dont on connoîtroit deux côtés & l'angle que ces côtés comprendroient, ou d'un angle ſolide dont on connoîtroit deux angles plans & leurs inclinaiſons de plans?

Enfin, n'y auroit-il pas moyen d'en faire autant à l'égard de divers autres cas, ou même de tous les autres cas de réſolution du triangle ſphérique, dans chacun deſquels on auroit exprimé la différence de l'aire triangulaire ſphérique par les ſeules données dont il dépendroit?

Mais ce ſont là des recherches que j'abandonne à de jeunes Géomètres; mon âge, & les infirmités qu'il peut entraîner, permettant à peine que je me flatte de réuſſir, avant le terme de ma carrière, à mettre en ordre & à porter à la perfection dont je les crois ſuſceptibles, un aſſez grand nombre d'autres objets que je ne juge pas moins importans, & ſur leſquels j'ai plus d'avances.



PROPOSITIONS NEUVES,

Et non moins utiles que curieuſes, ſur le Tétraèdre; ou *Eſſai de Tétraédrométrie.*

Par M. l'Abbé DE GUA.

LA communication des lumières qui s'eſt multipliée à un ſi haut point entre les Gens de Lettres, vers la fin du dernier ſiècle & dans celui-ci, a été, & eſt ſans doute encore, du plus grand avantage pour les Sciences. Mettant d'abord à profit la diſpoſition à l'imitation que nous apportons en naiſſant, & qui influe enſuite ſi fort, ſur diverſes circonſtances ou époques même, de notre vie, & donnant ainſi un heureux eſſor à notre indolence & notre nonchalance naturelles, elle nous excite d'ailleurs au travail, par la connoiſſance qu'elle nous donne des ſuccès d'autrui, dans des occupations ſemblables aux nôtres, & nous y encourage bientôt après, par l'éguillon de l'émulation, le plus puiſſant de ceux qui agiſſent ſur l'amour-propre: elle ſupplée dans les recherches mixtes ou compliquées, au défaut de certaines notions étrangères à leur objet principal, par où la diſcuſſion que des Savans, profonds d'ailleurs, ſe ſeroient propoſé de faire des matières ſur leſquelles elles rouleroient, auroit pu ſans ſon ſecours, être arrêtée pour long-temps; par elle enfin, on a vu des ſociétés littéraires exécuter facilement, au moyen de la réunion, des ouvrages qu'un ou deux des plus habiles même de ceux qui les compoſoient, auroient tenté vainement d'exécuter ſeuls.

Mais, ſemblable à toutes les autres inſtitutions & pratiques humaines, même les meilleures, elle paroît d'un autre côté avoir été juſqu'ici ſujette à un inconvénient propre à retarder à un égard, les progrès des Sciences, qu'elle auroit accélérés à tant d'autres, & contre lequel il eût été, ce ſemble, à

propos de ſe tenir plus en garde qu'on n'a fait. Ça été d'appeler, pour ainſi dire, un peu trop généralement, par l'attrait de la gloire, & peut-être même par celui d'une eſpèce de mode, les recherches de la plupart des Savans qui cultivent une même ſcience, dans les mêmes routes, ſur-tout dans les plus difficiles à tenir, & aux termes plus reculés deſquelles ils jugeroient dès-lors, qu'il y auroit plus de lauriers à cueillir; tandis qu'ils laiſſeroient derrière eux, en friche, des terreins qui auroient pu auſſi les dédommager amplement, des peines qu'ils auroient priſes pour en tirer parti, & dont l'état inculte, à l'entrée le plus ſouvent d'une ſcience, ſeroit de plus, peu honorable pour la ſcience même.

Le ſujet que je me propoſe de traiter dans ce Mémoire, offre, ſuivant que le titre le donne à entendre, un exemple bien frappant de ce que je remarque ici. Les figures ſolides rectilignes ne ſe réduiſent pas moins toutes, en tétraèdres, que les planes, en trilignes ou triangles: la théorie complète du triangle ayant donc donné naiſſance à une ſcience auſſi utile que l'eſt la Trigonométrie rectiligne, on pouvoit s'attendre qu'il en ſeroit à peu-près de même de celle du tétraèdre, une fois qu'on ſeroit parvenu à en former une; & la recherche qu'on pourroit en faire, devoit même vraiſemblablement devenir d'autant plus aiſée qu'on y ſeroit continuellement guidé par l'analogie des propriétés des ſurfaces à celles des ſolides; or comment étoit-il au contraire arrivé que ce dernier objet, qui préſentoit par lui-même, la perſpective de la plus grande utilité, dans la fouille, & le déblai & remblai des terres, tant pour l'Agriculture & l'Architecture civile & militaire, que pour la direction des rivières, & la conſtruction des canaux de navigation & d'arroſement; dans la coupe des pierres, dans la conſtruction des vaiſſeaux, & l'arrimage; dans l'exploitation des mines, & dans la recherche des peſanteurs ſpécifiques des divers corps naturels, eût été négligé au point qu'on en fût, même encore, à trouver ſur les bornes angulaires ſolides du tétraèdre, une propriété analogue à celle de l'égalité des

trois angles du triangle à deux angles droits, & sur ses bornes superficielles, ou ses faces, des propriétés analogues à celle du carré de l'hypothénuse du triangle rectangle à la somme des carrés de ses côtés, ou aux deux autres qu'on déduit de celle-là, par rapport aux triangles obliqu'angles ou obtus-angles? Pourquoi, la Planimétrie joignant depuis si long-temps, à la mesure de l'aire triangulaire, au moyen de la moitié du produit de la base par la perpendiculaire tirée du sommet sur cette base, deux autres mesures, l'une au moyen du quart de la racine carrée du produit de la somme des trois côtés, par les trois différences des sommes de deux quelconques de ces côtés au troisième, l'autre au moyen de la moitié du produit de deux côtés quelconques, l'un par l'autre, & par le sinus de l'angle compris entre ces côtés; s'étoit-on contenté, comme on a fait dans la Stéréométrie, d'assigner pour mesure de la solidité du tétraèdre, le seul tiers du produit d'une quelconque de ses faces prise pour base, par la perpendiculaire tirée de l'angle solide opposé à cette base, sur cette même base (perpendiculaire qu'il est même souvent difficile de construire ou de parvenir à connoître d'aucune autre manière); & ne s'étoit-on pas, au-lieu de cela, proposé de mesurer le même solide, soit d'après la connoissance de ses six arêtes seulement, soit d'après celle, ou des élémens angulaires plans d'un de ses angles solides, & des trois arêtes qui concourent à former cet angle, ou des perpendiculaires tirées des sommets de deux faces quelconques, sur l'arête qui en est la commune section, prise pour base commune aux deux, & de leur inclinaison mutuelle, ou bien encore de trois faces quelconques, & des élémens angulaires de l'angle solide dans lequel elles se réunissent? N'étoit-il pas enfin surprenant que connoissant, à dater de l'origine des Sciences, & vraisemblablement de celle même des premiers Arts, des moyens faciles d'élever d'un point donné sur une droite ou sur un plan, une perpendiculaire à cette droite ou à ce plan, ou d'abaisser d'un point donné hors d'une droite ou d'un plan,

une perpendiculaire ſur cette droite ou ſur ce plan, on n'eût point encore penſé à chercher une méthode générale pour tirer entre deux droites qui ne ſauroient concourir dans un même plan, la perpendiculaire unique qui peut toujours alors leur être commune; problème d'où dépend eſſentiellement la détermination de l'extériorité mutuelle des deux droites qu'on y conſidère, & de la ſolution duquel la recherche eſſentiellement relative à celle de la théorie du tètraèdre, auroit conduit à celle-ci?

Ces réflexions, qui comprennent l'objet entier de cinq paragraphes que ce Mémoire contiendra, s'étoient déjà préſentées à moi il y a près de trente ans; & m'étant livré dans ce temps-là, aux recherches qu'elles exigeoient, j'avois dès-lors réſolu les problèmes principaux du ſecond, du troiſième & du quatrième de mes paragraphes. Me trouvant bientôt après dans la néceſſité d'interrompre ce travail, & avec quelque crainte d'y être devancé par une autre perſonne qui paroiſſoit vouloir s'en occuper auſſi, je démontrai il y a très-long-temps, ſur la Planche de l'Académie, ces divers problèmes & quelques-uns de leurs corollaires, & requis alors, & obtins, que les titres & les énoncés en fuſſent inſérés dans nos regiſtres, avec mention de la démonſtration que je venois d'en faire : j'annonçai encore dès cette époque, le Mémoire que je comptois en compoſer après quelques additions, mais duquel diverſes circonſtances que j'ai dit ailleurs m'avoir diſtrait long-temps de l'étude des Mathématiques, ne m'ont permis de m'occuper de nouveau, que dans ces derniers temps; & j'ai jugé depuis, vu l'importance dont ce Mémoire, que voici enfin, m'a paru être par le grand nombre de vérités neuves & utiles, je pourrois dire de vraies découvertes élémentaires qu'il renferme, devoir en faciliter de plus en plus l'intelligence, en le faiſant précéder par mes deux Mémoires ſur la Trigonométrie ſphérique & ſur l'angle ſolide, que ce volume offre déjà, & à l'un & l'autre deſquels le premier, le ſecond, le quatrième & le cinquième de ſes paragraphes ont des rapports preſque continuels.

§. I.er

Sur la propriété du Tétraèdre, analogue à l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux angles droits.

De même que pour prouver l'égalité des trois angles du triangle rectiligne, à deux angles droits, on tire par un des angles du triangle pris pour sommet, une parallèle au côté opposé à cet angle ou à la base, & l'on rapporte ensuite à cette parallèle, les deux angles de la base, au moyen de leurs alternes, de manière à former de leur somme & de l'angle au sommet, deux droits; de même aussi j'ai jugé que pour découvrir dans le tétraèdre une propriété analogue à celle-là, il seroit à propos de tracer d'abord par un des angles solides du tétraèdre pris pour sommet, un plan parallèle à la face opposée à cet angle ou sommet, considérée comme base; & de faire en sorte de composer uniquement l'espace entier compris au-dessous de ce plan, ou quatre angles solides droits, d'élémens angulaires du tétraèdre proposé, que j'y rapporterois au moyen de leurs alternes.

Ayant donc fait passer par le sommet *O* (*Planche I, figure 4*) du tétraèdre *OPQR*, un tel plan *CAFODBG*, parallèle à la base *PQR* du même tétraèdre, & comprenant les droites *COD*, *AOB*, *FOG*, parallèles respectivement aux côtés *PQ*, *PR*, *QR*, de la base *PQR*, j'ai remarqué que l'espace entier inférieur au plan, & équivalent à quatre angles solides droits, renfermoit, outre l'angle solide *PO QOR*, qui lui étoit commun avec le tétraèdre, six autres angles solides, dont trois, savoir *COAOP*, *FODOQ* & *BOGOR*, à trois côtés, & les trois autres, savoir *AOFOPOQ*, *DOBOQOR* & *GOCOROP*, à quatre côtés; que de ces six angles solides, ceux à trois côtés étoient respectivement, & dans l'ordre selon lequel ils viennent d'être nommés, alternes & égaux aux trois angles en *P*, en *Q* & en *R* de la base, & qu'il ne restoit par conséquent, pour composer l'espace entier égal à quatre angles

ſolides droits, dont il étoit queſtion, des ſeuls élémens angulaires ſolides du tétraèdre, qu'à transformer la ſomme des trois angles à quatre côtés, reſtans, en ces mêmes élémens.

J'ai encore obſervé dans cette dernière vue, que chacun des mêmes angles à quatre côtés, joint aux deux à trois côtés entre leſquels il étoit ſitué, formeroit une inclinaiſon de plans alterne & égale à l'inclinaiſon des faces du tétraèdre, qui auroient pour commune ſection, le côté de la baſe du même tétraèdre, terminé par les deux côtés qui lui ſeroient communs avec ce même tétraèdre, par exemple, que l'angle à quatre côtés *AOFOPOQ*, joint aux angles à trois côtés *COAOP* & *FODOQ* ſes voiſins, formeroit l'inclinaiſon de plans *CAFDOCPOQ*, laquelle ſeroit alterne & égale à l'inclinaiſon des faces *POQ* & *QPR* du tétraèdre, qui ont pour commune ſection le côté *PQ* de la baſe *PQR* du même tétraèdre, terminé en *P* & en *Q* par les deux côtés *OP* & *OQ*, communs à l'angle à quatre côtés dont il eſt queſtion, & à ce même tétraèdre, & ainſi des autres; d'où s'enſuit que la ſomme des trois inclinaiſons de faces de la baſe *PQR*, du tétraèdre *OPQR*, eſt égale à celle des trois angles à quatre côtés dont nous parlons, jointe au double de celle des trois angles de la baſe du tétraèdre; & par conſéquent, que la même ſomme des trois angles à quatre côtés, eſt égale à celle des trois inclinaiſons de la baſe du tétraèdre, diminuée du double de celle des trois angles de la même baſe.

Or on peut conclure de ces deux obſervations réunies enſemble, que les quatre angles ſolides du tétraèdre, joints aux trois inclinaiſons de la baſe, moins le double des trois angles ſolides de la même baſe, compoſent enſemble quatre angles ſolides droits, ou enfin, cette première propoſition neuve, de tétraédrométrie, que *la ſomme des trois inclinaiſons de faces d'une des baſes quelconque de tout tétraèdre, moins celle des trois angles ſolides de la même baſe, plus l'angle ſolide du ſommet, forment toujours en total, quatre angles ſolides droits;* théorème aſſez curieux par lui-même, quoiqu'à raiſon de

ſe

ſe rapporter à une ſeule des baſes du tétraèdre, il n'offre pas encore l'expreſſion générale, & dès-lors la plus ſimple que nous cherchons principalement, du rapport mutuel des élémens angulaires ſolides du tétraèdre ; mais important ſur-tout, par les conſéquences nombreuſes qu'on en peut tirer immédiatement & facilement, & à la tête deſquelles la propriété qui énonce ce rapport va ſe trouver.

En effet, la propoſition que nous venons de démontrer ayant également lieu pour chaque face du tétraèdre priſe pour baſe, & pour chaque angle oppoſé pris pour ſommet, on pourra lui donner les quatre énoncés ſuivans :

Inclin. PQ + inclin. PR + inclin. QR — ang. P — ang. Q — ang. R + ang. O = 4 angles ſolides droits.

Inclin. PQ + inclin. QO + inclin. PO — ang. P — ang. Q — ang. O + ang. R = 4 ang. ſol. droits.

Inclin. QR + inclin. QO + inclin. RO — ang. Q — ang. R — ang. O + ang. P = 4 ang. ſol. droits.

Inclin. PR + inclin. PO + inclin. OR — ang. P — ang. R — ang. O + ang. Q = 4 ang. ſol. droits.

Or, 1.° ſi l'on ajoute enſemble ces quatre équations, il viendra 2 inclin. PQ + 2 inclin. PR + 2 inclin. PO + 2 inclin. QR + 2 inclin. QO + 2 inclin. RO — 2 ang. P — 2 ang. Q — 2 ang. R — 2 ang. O = 16 ang. ſol. dr.; ou diviſant par 2, cette ſeconde propoſition neuve, générale, & non moins ſimple que belle, énonçant en effet le rapport mutuel des élémens angulaires ſolides du tétraèdre, analogue par-là à l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux droits, & qu'on aura ſpécialement cherchée; que *la différence de la ſomme des ſix inclinaiſons de faces de tout tétraèdre, à celle de ſes quatre angles ſolides, eſt toujours égale à huit angles ſolides droits, & dès-lors, meſurée par la ſurface entière de la ſphère;* en ſorte que de ces deux quantités, la ſomme des inclinaiſons, & celle des angles ſolides, l'une étant connue, l'autre doit l'être auſſi ; que de ces dix quantités, les ſix inclinaiſons de faces & les quatre angles ſolides, neuf étant connues, la dixième doit l'être auſſi, &c.

2.° N'ajoutant enſemble que trois ſeulement de nos quatre égalités, par exemple, les trois premières, il viendroit 2 inclin. PQ + inclin. PR + 2 inclin. QR + 2 inclin. QO + inclin. PO + inclin. RO — ang. P — 3 ang. Q — ang. R — ang. O = 12 ang. ſol. dr. qui n'annonceroit par elle-même rien de ſimple; mais ſi de cette ſomme de trois égalités, on ôte l'égalité qui n'y eſt point entrée (ici la quatrième ci-deſſus), on aura; 2 inclin. PQ + 2 inclin. QR + 2 inclin. QO — 4 ang. Q = 8 ang. ſol. dr. & diviſant par 4, & tranſpoſant, pour obtenir par-là, une valeur de l'angle Q, on aura; ang. ſol. $Q = \frac{1}{2}$ incl. $PQ + \frac{1}{2}$ incl. $QR + \frac{1}{2}$ incl. QO — 2 ang. ſol. dr.; c'eſt-à-dire, que *chaque angle ſolide du tétraèdre eſt égal à la moitié de la ſomme des trois inclinaiſons qui le forment, diminuée de deux angles ſolides droits, ou d'une inclinaiſon à angles droits*, ou encore *au produit du diamètre, par la moitié du complément pris négativement, de la ſomme de ſes trois inclinaiſons de faces;* ce qui revient à la meſure de l'angle ſolide, donnée déjà, ſous un énoncé un peu différent, par Albert Girard & Cavallieri, qui le diſent égal au produit du rayon par la ſomme même de ſes trois inclinaiſons, moins deux droits, & en fait une troiſième démonſtration élémentaire, à joindre aux deux de Cavallieri & de M. l'abbé Boſſut, deſquelles j'ai parlé dans mon Mémoire précédent, & auſſi ſimple qu'aucune de ces deux-ci.

3.° Si l'on n'ajoute d'abord enſemble que deux des mêmes équations, par exemple, la première & la ſeconde; mais qu'on ajoute encore enſemble les deux autres, que la ſomme déja trouvée n'aura pas compriſes (dans notre exemple, la troiſième & la quatrième), ce qui donnera les deux ſommes 2 inclin. PQ + inclin. QR + inclin. PR + inclin. QO + inclin. PO — 2 ang. P — 2 ang. Q = 8 ang. ſol. dr., & inclin. PR + inclin. QR + inclin. PO + inclin. QO + 2 inclin. RO — 2 ang. R — 2 ang. O = 8 ang. ſol. dr.; & qu'on ôte après cela, l'une des ſommes trouvées de l'autre, par exemple, la ſeconde de la première, on aura; 2 inclin. PQ + 2 inclin. RO — 2 ang. P — 2

ang. Q + 2 ang. R + 2 ang. O = 0; ce qui, après transposition & division par 2, donnera cette quatrième proposition, neuve encore & assez curieuse, que *la différence de deux inclinaisons de faces opposées l'une à l'autre* (c'est-à-dire, qui n'aient point d'extrémité commune), *d'un tétraèdre quelconque, est toujours égale à celle de la somme des deux angles solides qui terminent la première, à la somme des deux angles solides qui terminent la seconde*, ou en d'autres termes, que *deux inclinaisons opposées quelconques, de tout tétraèdre, & les sommes des deux angles solides qui les terminent respectivement, forment toujours une proportion arithmétique;* en sorte que de ces quatre quantités, deux inclinaisons opposées, & les deux sommes des angles solides qui les terminent respectivement, trois quelconques étant données, on connoîtra facilement la quatrième; que de ces six quantités, deux inclinaisons opposées quelconques, & les quatre angles solides qui les terminent deux à deux, cinq quelconques étant données, on connoîtra la sixième, &c.

On pourra alléguer ici, que la seconde de mes propositions, celle de la recherche de laquelle je m'occupois principalement, auroit pu aussi, être facilement déduite de la mesure qu'on connoissoit déjà, de l'angle solide, appliquée successivement à chacun des angles du tétraèdre, & de l'équation qu'une telle application auroit offerte; ce qu'on prétendroit peut-être encore, devoir en diminuer beaucoup le prix : mais outre que sa nouveauté réelle & sa simplicité, réunies ensemble, & jointes même à la manière directe & analogue à la preuve de l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux angles droits, suivant laquelle je l'ai démontrée, me paroîtroient toujours devoir lui en laisser un assez grand; je croirois de plus, que le peu d'attention qu'on auroit fait jusqu'à présent, à l'homogénéité des inclinaisons de plans & des angles solides, si même, d'après les deux manières différentes l'une de l'autre, dont on s'étoit habitué à mesurer ces deux sortes de quantités, on ne l'avoit pas le plus souvent méconnue, a dû de tous les temps, apporter un grand

obſtacle à la découverte qu'il y avoit à faire de la déduction particulière qu'on auroit ici en vue.

En effet, les meſures *immédiates* des inclinaiſons de plans & des angles ſphériques, ſont également des portions de ſurfaces ſphériques, ſavoir, celles des inclinaiſons de plans dont la ſection commune eſt cenſée paſſer par le centre de la ſphère, ou eſt un des diamètres de la ſphère, les bandes ſphériques compriſes entre les deux plans, & celles des angles ſolides dont le ſommet eſt cenſé au centre de la ſphère, les aires triangulaires ſphériques qui terminent ces angles; & ces meſures ſuperficielles, *immédiates*, étant homogènes entr'elles, ou ayant entr'elles des rapports, les quantités qu'elles meſurent doivent en avoir auſſi, & être dès-lors ſemblablement homogènes les unes aux autres.

De plus, les bandes ſphériques étant toutes le produit de l'arc qui les partage également, ou de la portion d'équateur qu'elles comprennent, par le diamètre, on a pu prendre, comme on a fait réellement, pour meſures linéaires, mais *médiates*, des inclinaiſons de plans, ces arcs, ou ceux qui meſurent l'angle formé par les perpendiculaires élevées dans les deux plans, d'un même point de leur commune ſection, ſur cette commune ſection, tant au moins qu'il n'a été queſtion que de les comparer les unes aux autres.

De même, les aires triangulaires ſphériques ayant été, *de fait*, deſignées au moyen du produit de la ſomme des trois arcs qui meſurent leurs trois angles, diminuée de deux droits, par le rayon, on a pu & dû même en quelque ſorte, après cela, prendre pour meſure *médiate* & linéaire des aires des triangles ſphériques, & dès-lors des angles ſolides, tant au moins qu'il ne s'eſt agi que de comparer enſemble deux de ces quantités reſpectives, la ſomme des trois arcs qui meſurent leurs trois inclinaiſons, moins deux droits.

Mais ſaudroit-il en conſéquence, lorſqu'il ſera queſtion de comparer une inclinaiſon de plans & un angle ſolide, admettre que ces quantités ſoient entr'elles, comme l'arc qu'on prend généralement pour méſure *médiate* de la pre-

mière, eſt à celui qu'on aura pris généralement auſſi, pour meſure *médiate* de la ſeconde? non ſans doute; attendu que pour paſſer des meſures *immédiates* ou ſuperficielles ſphériques, juſtes quant à elles, à l'égard des deux, aux *médiates* ou linéaires, on auroit d'une part, diviſé par le diamètre, tandis qne de l'autre, on n'auroit diviſé que par le rayon.

Or, quoique rien n'eût été plus facile que de donner, au lieu de cela, aux inclinaiſons de plans & aux angles ſolides, une meſure médiate & linéaire commune; & qu'il n'eût fallu pour cet effet, que repréſenter, comme le calcul m'a conduit à faire, la ſurface triangulaire ſphérique, au moyen du produit, non de la ſomme des arcs qui meſurent ſes trois angles, diminuée de deux droits, par le rayon, mais de la demi-ſomme des mêmes arcs, diminuée d'un droit (ce qui revient au complément pris négativement de la même demi-ſomme), par le diamètre; d'après quoi on auroit pu dire généralement, qu'un angle ſolide quelconque eſt à une inclinaiſon de plans auſſi quelconque, comme le complément pris négativement de la demi-ſomme des arcs qui meſurent les trois inclinaiſons de l'angle ſolide, eſt à l'arc qui meſure l'inclinaiſon propoſée; cependant, ces remarques très-fondées, quelque ſubtiles qu'elles puiſſent être jugées, ne paroiſſant pas avoir encore été faites, & l'homogénéité des angles ſolides & des inclinaiſons de plans, n'ayant point, d'après cela, été explicitement, ou du moins généralement, reconnue, la déduction dont il vient d'être queſtion, pouvoit en conſéquence, n'être pas moins difficile à former que celle dont j'ai fait mention, ou l'être même davantage.

Ne ſeroit-il pas enfin aſſez juſte, de ſe rappeler, au ſujet du prix qu'on voudroit mettre à celles de mes trois dernières propoſitions qui ſont neuves, ſavoir, la ſeconde & la troiſième, le cas que j'ai dit au commencement de mon Mémoire précédent, avoir été fait de la ſeconde, leur compagne en quelque ſorte, à titre de conſéquence immédiate d'un même principe qu'elles, lorſque celle-ci fut découverte il y a environ un ſiècle & demi, n'importe par quelle voie?

§. II.

Sur les propriétés du Tétraèdre, analogues à celle du carré de l'Hypothénuse du triangle rectiligne, rectangle, à la somme des carrés de ses côtés, & aux deux autres qu'on infère de celle-là, par rapport aux triangles rectilignes, obliquangles & obtus-angles.

Pour parvenir, s'il étoit possible, à découvrir dans le tétraèdre, des propriétés de ces espèces, j'ai formé (*fig. 5*) un tétraèdre $OABC$, à angle solide droit en O; & ayant de plus nommé a, b & c les droites OA, OB & OC respectivement, j'ai eu pour valeurs des aires des trois faces latérales OAB, OAC, OBC, les expressions $\frac{1}{2}ab$, $\frac{1}{2}ac$ & $\frac{1}{2}bc$; & pour celle des carrés des nombres qui les désigneroient, $\frac{1}{4}a^2b^2$, $\frac{1}{4}a^2c^2$ & $\frac{1}{4}b^2c^2$,

Les hypothénuses des mêmes trois faces triangulaires rectangles, sont d'ailleurs évidemment représentées par

$$\sqrt{(aa+bb)},\ \sqrt{(aa+cc)}\ \&\ \sqrt{(bb+cc)},$$

respectivement.

Or, si l'on cherche d'après cela, & par la règle qui enseigne à trouver l'aire des triangles rectilignes dont on connoît les trois côtés, l'aire du triangle ABC, on trouvera que le carré en est aussi $= \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2$.

En effet, le produit de

$$[\sqrt{(aa+bb)} + \sqrt{(aa+cc)} + \sqrt{(bb+cc)}],$$

par

$$[\sqrt{(aa+bb)} + \sqrt{(aa+cc)} - \sqrt{(bb+cc)}],$$

est $[2\sqrt{(aa+bb)} \times \sqrt{(aa+cc)} + 2aa]$:

Le produit de

$$[\sqrt{(aa+bb)} - \sqrt{(aa+cc)} + \sqrt{(bb+cc)}],$$

par

$$[-\sqrt{(aa+bb)} + \sqrt{(aa+cc)} + \sqrt{(bb+cc)}],$$

eſt $[-2\sqrt{(aa+bb)}\times\sqrt{(aa+cc)}+2aa]$;
Et le 16.eme du produit de ces deux produits, l'un par l'autre, $=\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}a^2c^2+\frac{1}{4}b^2c^2$; d'où réſulte la première & principale propoſition, analogue à la 47.eme d'Euclide, laquelle il s'agiſſoit de trouver, ſavoir que *dans tout tétraèdre à un angle ſolide droit, la ſomme des carrés des trois nombres propres à exprimer les aires des trois faces triangulaires qui comprennent l'angle ſolide droit, & qu'on peut nommer latérales, eſt toujours égale au carré du nombre par lequel doit être exprimée l'aire de la face oppoſée à l'angle ſolide droit, & qu'on peut nommer hypothénuſale ;* en ſorte que des quatre faces d'un tétraèdre quelconque, trois, deux ou une, étant données, on peut reſpectivement connoître la dernière, ou les ſommes des deux ou trois dernières.

L'analogie parfaite de cette propoſition, la première de celles que je démontrai anciennement à l'Académie, & conſignai alors dans ſes Regiſtres, avec celle dont Pythagore fut l'inventeur, pourra porter à juger, ainſi qu'on auroit déjà fait à l'égard de la ſeconde du *paragraphe précédent*, qu'elle étoit fort aiſée à découvrir, une fois qu'on ſe ſeroit occupé d'en faire la recherche, je n'en diſconviendrai même pas; mais ſi l'on paſſoit de-là, juſqu'à prétendre, conſéquemment à une telle réflexion, la déprécier à un certain degré, on oublieroit donc qu'il ſe ſeroit néanmoins écoulé bien des ſiècles, avant que j'euſſe ſeul penſé à franchir, & franchi en effet, ce petit degré de difficulté, par où la découverte en a été pour ainſi dire ſéparée de celle qui valut autrefois un Hécatombe aux Dieux du Paganiſme, & à laquelle elle pourra dorénavant ſervir commme de pendant, ou bien encore, que la même remarque a ſouvent été faite à l'égard de diverſes autres inventions, auxquelles elle n'a pourtant rien fait perdre, ni de leur mérite, ni même de leur éclat.

Mais ſi l'on ſuppoſoit de plus, à ſon déſavantage, qu'on ne verroit pas de quel uſage elle pourroit être dans la Géométrie,

en comparaiſon de la fécondité ſi reconnue, de la quarante-ſeptième d'Euclide, je pourrois répondre;

Premièrement, que de toutes les parties de la Géométrie, la ſeule Stéréométrie peut préſenter de fréquentes occaſions d'en faire uſage; & que cette portion de ſcience devant encore être cenſée au berceau, ſuivant que ce Mémoire même en donnera la preuve, la conſidération que l'utilité dont une telle propoſition pourroit y être, ne ſe préſenteroit pas d'abord à l'eſprit, ne ſuffiroit pas pour conclure qu'elle ne devroit en effet être que peu utile.

En ſecond lieu, que l'application de la même propoſition devroit vraiſemblablement s'étendre plus loin encore que la Géométrie rectiligne; par exemple, qu'il ne ſeroit pas ſurprenant qu'on tirât un jour dans l'intégration des équations différentielles à trois variables, & contenant des ſecondes différences, quelque parti de la connoiſſance que la face hypothénuſale de ce qu'on auroit nommé le tétraèdre différentiel, ſeroit $= \frac{1}{4} \sqrt{(dx^2\, dy^2 + dx^2\, dz^2 + dy^2\, dz^2)}$; qu'il ne faudroit peut-être pas négliger dans l'analyſe, l'ouverture réſultante de la même propoſition, que, ſi l'on nomme a, b, & c, les trois racines d'une équation quelconque du troiſième degré, le coéfficient de ſon troiſième terme pourra toujours être exprimé par le produit qu'on formeroit en multipliant la ſomme des trois radicaux $2\sqrt{(a + b)}$, $2\sqrt{(a + c)}$, $2\sqrt{(b + c)}$, par les trois différences de deux quelconques de ces radicaux au troiſième; ou que, ſi le ſecond terme de la même équation manque, le coéfficient du troiſième ſera dès-lors repréſenté par le produit réſultant de la multiplication des trois radicaux imaginaires, $2\sqrt{(-a)}$, $2\sqrt{(-b)}$, $2\sqrt{(-c)}$, par les trois différences de deux quelconques de ces radicaux au troiſième, &c.

Quoi qu'il en ſoit au reſte, de ces conſidérations, je me crois en état d'établir déjà moi-même, un préjugé avantageux, concernant les connoiſſances ultérieures qui peuvent dériver de ma propoſition, en lui donnant une extenſion

analogue

analogue à celle que la proposition de Pythagore, présentée sous l'énoncé que la somme des carrés des deux côtés de tout triangle rectiligne rectangle, moins celui de l'hypothénuse, $=$ o, reçoit de cette autre plus générale, & en renfermant deux d'Euclide, que la somme des carrés des deux côtés quelconques d'un triangle rectiligne aussi quelconque, moins le carré du troisième côté, est égale au produit du rectangle formé sur les deux premiers côtés, & du double du quotient du cosinus de l'angle que comprennent ces côtés, divisé par le rayon, ou, prenant le rayon pour unité, au produit du même rectangle, & du double du cosinus même.

Représentons à cet effet les trois côtés *AO*, *BO*, *CO*, d'un tétraèdre quelconque *OABC* (*fig. 6*), par les lettres *a*, *b* & *c*; & nommons de plus le cosinus de l'angle *AOB*, *g*; le cosinus de l'angle *AOC*, *p*; & celui de l'angle *BOC*, *s*; en sorte que les sinus des mêmes angles soient respectivement, $\sqrt{(1 - gg)}$, $\sqrt{(1 - pp)}$ & $\sqrt{(1 - ss)}$; que les aires triangulaires des faces marquées par les mêmes lettres, soient respectivement aussi, $\frac{1}{2}ab\sqrt{(1-gg)}$, $\frac{1}{2}ac\sqrt{(1-pp)}$ & $\frac{1}{2}bc\sqrt{(1-ss)}$, & que la somme de leurs trois carrés soit par conséquent, $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}gg)\,a^2b^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}pp)\,a^2c^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}ss)\,b^2c^2$, ou (nommant γ, π & σ, les sinus correspondans respectivement, aux cosinus *g*, *p* & *s*) $= \frac{1}{4}\gamma^2a^2b^2 + \frac{1}{4}\pi^2a^2c^2 + \frac{1}{4}\sigma^2b^2c^2$.

Les trois côtés *AB*, *AC*, *BC*, de la base du tétraèdre, seront d'ailleurs respectivement, suivant les propositions 12 & 13 du 2.d livre d'Euclide, égaux à $\sqrt{(aa + bb - 2gab)}$, $\sqrt{(aa + cc - 2pac)}$ & $\sqrt{(bb + cc - 2sbc)}$; & prenant d'après cela, l'aire de cette base, d'une manière semblable à celle dont nous avons fait usage dans la proposition précédente, pour trouver celle de la face hypothénusale, désignée aussi par *ABC*, de la *figure 5*, & soustrayant le carré de la même aire de base, ainsi trouvée, de la

ſomme qu'on vient d'aſſigner, des carrés des trois faces *AOB*, *AOC* & *BOC*, le reſtant devra être =

$\frac{1}{2} abc \times [(g - ps)a + (p - gs)b + (s - gp)c]$;
d'où l'on conclura enfin, cette ſeconde propoſition, neuve comme la première, mais plus générale, & qui la renferme, que *dans un tétraèdre quelconque, la différence de la ſomme des carrés des trois faces ſituées autour d'un même angle ſolide, au carré de la face oppoſée à ce même angle ſolide, eſt toujours égale à la moitié du produit du parallélipipède formé ſur les trois côtés ſitués autour de l'angle ſolide, par la ſomme des trois produits qu'on trouvera en multipliant chacun de ces trois mêmes côtés, par la différence du coſinus de l'angle plan, qui, appartenant à l'angle ſolide, ſera oppoſé à ce côté, au produit des coſinus des deux autres angles-plans appartenans au même angle ſolide, leſquels comprendront entr'eux ce même côté.*

Puiſque d'ailleurs la Trigonométrie ſphérique nous apprend que nommant toujours γ, π & σ, les ſinus correſpondans reſpectivement, aux coſinus g, p & s, & déſignant par G, P & S, les coſinus des angles oppoſés aux côtés auxquels appartiennent reſpectivement les mêmes coſinus g, p & s, on aura $\pi \sigma G = g - ps$, $\gamma \sigma P = p - gs$, & $\gamma \pi S = s - gp$, nous pourrons tirer de-là une ſeconde expreſſion de la formule qui nous a fourni notre ſeconde propoſition, ſavoir, que le reſtant dont il y eſt queſtion, doit auſſi être $= \frac{1}{2} abc \times (\pi \sigma G a + \gamma \sigma P b + \gamma \pi S c)$, & en former dès-lors une troiſième propoſition analogue à la ſeconde, mais qu'il ſeroit peu utile de rapporter ici au long, après la précédente.

De même, le corollaire III du Mémoire précédent, ſur diverſes meſures de l'angle ſolide, montrant que la tangente de moitié de la meſure de l'angle ſolide aux angles plans duquel ſe rapportent les coſinus g, p & s, multipliée par $(1 + g + p + s)$, & par la cotangente de l'inclinaiſon oppoſée au côté qui a s pour coſinus,

$= \gamma \pi S$, & ainſi des autres lettres, nous pourrions tirer de-là une troiſième expreſſion de la formule dont nous venons de parler, ſavoir, que la différence dont il eſt queſtion $=$

$$\tfrac{1}{2} a b c \times (1 + g + p + s)$$

$\times$ (la tangente de $\frac{1}{2}$ de l'arc qui meſure l'angle ſolide), &
$\times$ (la ſomme des trois cotangentes des inclinaiſons de cet angle),

& en conclure une quatrième propoſition analogue encore à la ſeconde ; choſes ſur leſquelles je croirois de même ſuperflu de m'arrêter davantage.

J'obſerverai donc ſeulement ici, 1.° que ſi les trois côtés de l'angle ſolide étoient ſuppoſés égaux entr'eux, la différence en queſtion deviendroit égale à la quatrième puiſſance du nombre propre à déſigner chacun de ces côtés, par la moitié de la différence des deux ſommes de g, p & s linéaires & des mêmes lettres priſes deux à deux; 2.° que deux des angles plans, par exemple, AOB & BOC, qui entrent dans l'angle ſolide, étant ſuppoſés droits, ou leurs coſinus g & s devenant égaux à zéro, le facteur de abc, dans la différence des deux aires, ne ſeroit plus que $\frac{1}{2} p$; en ſorte que la formule de cette différence ſe réduiroit alors à $\frac{1}{2} pabc$.

Bien qu'au reſte ce paragraphe comprenne déjà, ou déſigne ſuffiſamment, le petit nombre en entier, de propoſitions neuves que je me ſuis propoſé d'y faire entrer, l'importance dont il m'a paru qu'il pourroit être, de préſenter, s'il étoit poſſible, un théorème auſſi ſimple & auſſi curieux que le premier des précédens, relatif au tétraèdre rectangle en particulier, de manière à pouvoir être inſéré dans les élémens même de Géométrie, m'ayant ſuggéré d'en chercher une démonſtration qui l'y rendît en effet propre, j'eſpère qu'on me ſaura gré de joindre ici celle que j'ai trouvée.

Du point O, ſommet de l'angle ſolide ſuppoſé droit *(Pl. II, fig. 7)*, & prenant pour intervalle, la diſtance de ce même point O, au ſommet C, de l'un des autres angles du tétraèdre $OABC$, ſoit donc décrit dans le plan de l'une des faces latérales, AOB, du même tétraèdre, un arc de cercle GH,

jusqu'auquel soient prolongés en *H* & *G* respectivement, les côtés *AO* & *BO*, comprenant l'angle droit *AOB*, dans le plan de la même face *ABO*; & du même point *O*, ainsi que de *C*, soient abaissées les perpendiculaires *OP*, *CP*, sur la droite *AB*, base commune, tant de la face latérale *AOB*, que de la face hypothénusale *ACB*, du même tétraèdre, lesquelles y tomberont en un même point *P*: soit de plus prolongée *AB*, de ses deux extrémités, en *N* & *M*; & qu'on lui mène par le point *O*, & par conséquent dans le plan *AOB*, la parallèle indéfinie *TOS*: qu'on joigne ensuite par les points *G* & *H*, *GA* & *HB*; & qu'on mène de plus sur *AB*, ou sur ses prolongations, les perpendiculaires *HK* & *GF*, qui coupent la parallèle *SOT*, de *AB*, en *L* & *I*.

Cela posé, les triangles *AOB*, *ACB*, qui forment l'une des faces latérales & la face hypothénusale du tétraèdre, seront évidemment des demi-rectangles, sur *AB* d'une part, & sur *OP* & *CP* respectivement, de l'autre.

De plus, les triangles *COA*, *COB*, qui forment les deux autres faces latérales du tétraèdre, seront par la construction, égaux respectivement, aux triangles *GOA*, *HOB*, dans le plan *AOB*; & ceux-ci seront les différences des triangles *GAB*, *HBA*, (égaux à des demi-rectangles formés sur *AB* d'une part, & sur *GF* & *HK* respectivement, de l'autre), à leur partie commune *AOB*, demi-rectangle sur *AB*, & sur *IF* ou *LK*; en sorte qu'ils seront respectivement égaux à des demi rectangles formés sur *AB* d'une part, & sur *GI* ou *HL* de l'autre; d'où s'ensuit d'abord que les quatre faces *AOB*, *AOC*, *BOC* & *ABC*, du tétraèdre, seront proportionnelles aux quatre droites *OP*, *GI*, *HL* & *CP*; & que les carrés des nombres propres à exprimer les dernières de ces quantités, seront aussi des carrés de nombres propres à représenter les premières.

Or, 1.° l'angle *HOG*, opposé par son sommet à *AOB*, étant droit, & les deux droites *HO*, *GO*, étant des rayons d'un même cercle, & par conséquent égales entr'elles, les angles *HOL*, *GOI*, seront complémens l'un de l'autre,

& les triangles HOL, IGO, feront de plus égaux entr'eux, à tous égards; en forte qu'on aura $HL = OI$, & $GI = OL$, & que d'après la propriété d'être rectangles de l'un & de l'autre, on pourra également conclure que la fomme des carrés de HL & de GI, eft égale au carré, foit de HO, foit de GO, ou, ce qui revient au même, au carré de OC: mais le triangle OCP étant rectangle en O, la fomme des carrés de OC & de OP, eft égal au carré de CP, & la fomme des trois carrés de HL, de GI & de OP, eft par conféquent égale au carré de CP.

Il s'enfuit donc élémentairement, de-là, & de ce qui avoit été remarqué déjà, que la fomme des carrés des trois nombres propres à exprimer les trois faces de tout tétraèdre à un angle folide droit, eft égale au carré du nombre propre à repréfenter en même temps, le carré de la face hypothénufale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dois enfin ne pas omettre ici, 1.° que lifant il y a quelques années le 9.me volume des Mémoires des Savans Etrangers à l'Académie, qui venoit alors de paroître, je trouvai que l'Auteur d'un des Mémoires de ce volume, M. Tinfeau, y avoit employé, *page 608*, dans un de fes Mémoires, la première des propofitions de ce §. comme un réfultat de fa théorie; 2.° que je ne doute point, que conformément à fon affertion, elle ne la lui ait en effet fournie; mais 3.° que ma date dans les regiftres de l'Académie, après démonftration faite en pleine affemblée, doit toujours m'affurer fur cet auteur, à l'égard dont il eft queftion, une priorité d'invention de plus de vingt années.

§. III.

Sur l'évaluation de la folidité d'un tétraèdre quelconque, d'après la connoiffance de fes fix côtés ou arêtes, feulement.

Soient les trois côtés ou arêtes OA, OB, OC, (*fig. 8*) qui defcendent du fommet O, du tétraèdre $OABC$, nom-

mées respectivement a, b & c, & les arêtes BC, AC & AB de la base ABC, qui leur sont respectivement opposées, nommées respectivement aussi, par les lettres grecques analogues, α, β & $\varkappa$: qu'on mène d'ailleurs du sommet O, du tétraèdre, sur la base, la perpendiculaire OP; du pied P de cette perpendiculaire, sur l'arête AC, la perpendulaire PQ, & du sommet O, sur la même arête, la perpendiculaire OQ, tombant, comme on le prouve dans les Élémens de Géométrie, sur le même point Q, que la précédente: soient encore, de l'angle B, de la base, opposé à l'arête AC, abaissée une autre perpendiculaire BT, sur le même côté AC, du point P, tirée la parallèle PR, à AC, & de B, en P, jointe la droite BP; qu'on appelle enfin BT & OQ respectivement, m & n, QT, h, & PQ, x; & l'on aura d'abord, $OP = \sqrt{(nn - xx)}$, & par conséquent $BP = \sqrt{(bb - nn + xx)}$, & $BR = \sqrt{(bb - nn + xx - hh)}$; d'où l'on conclura $\sqrt{(bb - nn + xx - hh)} + x = m$, ou $bb - nn + xx - hh = mm - 2mx + xx$, & par conséquent la hauteur OP du tétraèdre, ou $\sqrt{(nn - xx} = \frac{\sqrt{[4m^2n^2 - (mm + nn - bb + hh)^2]}}{2m})$; & multipliant la base ABC, $= \frac{1}{2}\beta m$, du même tétraèdre, par le tiers de cette valeur de sa hauteur, il viendra pour sa solidité, l'expression $\frac{1}{12}\beta \times \sqrt{[4m^2n^2 - (mm + nn - bb + hh)^2]}$, dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de mm, de nn & de hh, en a, b & c, & en α, β & $\varkappa$, pour déduire de-là, une formule propre à représenter en lettres supposées toutes connues, l'inconnue cherchée.

Or, 1.° mm est le quadruple du quotient du carré de l'aire de la base ABC, par AC, ou

$$= \frac{-\alpha^4 - \beta^4 - \varkappa^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\varkappa^2 + 2\beta^2\varkappa^2}{4\beta^2},$$

& $kk - mm$, ou AT^2, est d'après cela, $= \frac{(\beta^2 + \varkappa^2 - \alpha^2)^2}{4\beta^2}$; & $AT = \frac{\pm\beta^2 \pm \varkappa^2 \pm \alpha^2}{2\beta}$.

2.° nn eſt le quadruple du quotient du carré de l'aire de la face AOC, par AC, ou $= \frac{-a^4 - c^4 - \beta^4 + 2a^2c^2 + 2a^2\beta^2 + 2c^2\beta^2}{4\beta^2}$, & $cc - nn$ ou CQ^2, eſt par conſéquent, $= \frac{(\beta^2 + c^2 - a^2)^2}{4\beta^2}$, & $CQ = \frac{\pm \beta^2 + c^2 + a^2}{2\beta}$; & comme QT ou $h = AC - AT - CQ$, on aura $h = \pm \frac{-x^2 + \alpha^2 - c^2 + a^2}{2\beta}$, & par conſéquent, $hh = \frac{(-x^2 + \alpha^2 - c^2 + a^2)^2}{4\beta^2}$.

Subſtituant enfin toutes ces valeurs en la place de mm, de nn & de hh (ce que je m'abſtiens de faire ici, parce qu'une telle ſubſtitution conſiſteroit uniquement dans une opération de calcul, qui, ſans offrir aucune difficulté à vaincre, ſeroit fort longue à ſuivre), ne négligeant aucune réduction qui puiſſe ſe préſenter à faire en opérant, & arrangeant les termes du réſultat du calcul, ſuivant le meilleur ordre, on parviendra enfin à cette formule de la valeur de la ſolidité cherchée, que je ſuppoſe repréſentée par la lettre z,

$$z = \frac{1}{12} \sqrt{\left\{ \begin{array}{ll} a^2\alpha^2 \times (b^2 + \beta^2 + c^2 + x^2 - a^2 - \alpha^2) & - a^2 b^2 x^2 \\ + b^2\beta^2 \times (a^2 + \alpha^2 + c^2 + x^2 - b^2 - \beta^2) & - a^2 c^2 \beta^2 \\ + c^2 x^2 \times (a^2 + \alpha^2 + b^2 + \beta^2 - c^2 - x^2) & - b^2 c^2 \alpha^2 \\ & - \alpha^2 \beta^2 x^2 \end{array} \right\}};$$

d'où l'on conclura la règle neuve ſuivante.

On aſſignera la valeur de la ſolidité du tétraèdre dont on connoîtra les ſix arêtes ;

1.° en carrant tous les nombres qui exprimeront les arêtes, & multipliant les uns par les autres, les carrés de ceux qui repréſenteront des arêtes oppoſées entr'elles, ce qui donnera trois produits de quatre dimenſions chacun :

2.° en multipliant chacun de ces trois produits par la ſomme des quatre carrés qui n'y entreront point, moins celle des deux qui y entreront, & ajoutant enſemble les nouveaux produits, ce qui donnera une ſomme de produits de ſix dimenſions chacun :

3.° en prenant les carrés des quatre parallélipipèdes qu'on pourra former ſur les trois arêtes appartenantes à une quelconque des faces du tétraèdre, & ajoutant enſemble ces quatre carrés, ce qui donnera une ſomme de carrés de ſix dimenſions chacun:
4.° en ſouſtrayant cette ſomme de carrés de ſix dimenſions, trouvée par l'article troiſième, de celle de produits du même nombre de dimenſions, trouvée par l'article ſecond:

5.° en tirant la racine carrée du reſtant de la ſouſtraction précédente, & prenant le douzième de cette racine.

On trouveroit, par exemple, facilement, au moyen de cette règle, que, ſuivant qu'Euclide l'a démontré par une autre voie, le tétraèdre régulier eſt le tiers du cube dans lequel il peut être inſcrit, ou des faces duquel ſes ſix arêtes ſeroient les ſix diagonales; & elle apprendroit de plus (ce qui peut n'avoir pas encore été remarqué) qu'il règne entre le même tétraèdre régulier, & un cube qui auroit la même arête, le même rapport qu'entre la diagonale du cube, & la ſomme de ſes arêtes qui ſont au nombre de 12.

Mais il eſt ſur-tout important d'obſerver à ſon ſujet, qu'avant que de s'engager dans le calcul de la ſolidité d'un tétraèdre quelconque, propoſé par l'exhibition des ſix ſeules arêtes dont il ſeroit prétendu devoir être formé, il faut examiner avec ſoin, ſi la ſomme de deux arêtes d'une des faces quelconque, n'auroit pas été ſuppoſée mal-à-propos, plus petite que la troiſième de la même face; ce qui devroit rendre impoſſibles, & la face, & le tétraèdre, & conduire ainſi à une ſolution imaginaire.

Comme d'ailleurs la règle même n'eſt pas moins compliquée par ſa nature, qu'elle peut être utile dans la pratique, je penſe qu'il convient d'en joindre ici un exemple.

Soit donc propoſé de meſurer la ſolidité du tétraèdre dont les trois arêtes deſcendantes du ſommet à la baſe, ſeroient repréſentées par les nombres 20, 25, 25, & les trois de la baſe, oppoſées reſpectivement à celles-là, le ſeroient par

par les nombres 18, 15, 15; tétraèdre des faces duquel l'examen n'en fait trouver aucune impossible; & l'on aura

1.° & 2.° $(20 \times 18)^2$, ou $129,600 \times$
$(225 + 225 + 625 + 625 - 400 - 324)$,
ou $\times$ 976 . . . . = 126,489,600.
$(25 \times 15)^2$, ou $140,625 \times$
$(324 + 400 + 225 + 625 - 225 - 625)$,
ou $\times$ 724 . . . . = 101,812,500.
$(25 \times 15)^2$, ou $140,625 \times$
$(324 + 400 + 225 + 625 - 225 - 625)$,
ou $\times$ 724 . . . . = 101,812,500.

En sorte que la somme des trois produits, de laquelle il faudra soustraire, sera . . . . = ... 330,114,600.

3.° $(20 \times 15 \times 25)^2$, ou $3600 \times 15,625$ . . = 56,250,000.
$(20 \times 15 \times 25)^2$, ou $3600 \times 15,625$ . . = 56,250,000.
$(25 \times 25 \times 18)^2$, ou $15,625 \times 8100$ . . = 126,562,500.
$(15 \times 15 \times 18)^2$, ou 6561×2500 . . = 16,402,500.

En sorte que la somme des carrés de parallélipipèdes, ou le nombre à soustraire, sera. = ... 255,465,000.

4.° Le restant sera donc . . . . = ... 74,649,600.

5.° La racine carrée de ce restant est . . . . . . = ... 8,640.
dont le 12.eme, qui . . . . = ... 720.
exprimera la valeur cherchée du tétraèdre proposé.

En effet, les faces 20, 15, 25, sont des triangles rectangles, puisque $15^2 + 20^2$, ou $225 + 400 = 625 = 25^2$; le tétraèdre lui-même est donc rectangle par l'arête 20, & il est ainsi le produit du tiers de sa base, qui est l'aire du triangle 15, 15, 18, par la hauteur 20. Or l'aire du triangle 15, 15, 18

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(15 + 15 + 18) \times (15 + 15 - 18) \times (15 - 15 + 18) \times (-15 + 15 + 18)]}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(48 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18)} = \tfrac{18}{4}\sqrt{(48 \cdot 12)} = \frac{18 \cdot 12 \cdot 2}{4} = 108,$$

dont le tiers $= 36$; & $36 \times 20 = 720$, comme nous l'avons trouvé.

Mais ſi l'on nous eût propoſé au lieu de cela, d'évaluer la ſolidité d'un tétraèdre dont on auroit prétendu que les arêtes deſcendantes du ſommet, devroient être 4, 2 & 2, tandis que la baſe ſeroit un triangle équilatéral, qui auroit l'unité pour côté; l'obſervation que nous ferions, que l'une des faces d'un tel tétraèdre, & même deux, devroient avoir pour côtés 4, 2 & 1, des deux derniers deſquels la ſomme eſt plus petite que le 1.er ſeul, nous montrant qu'une telle face triangulaire ſeroit impoſſible, nous conclurions qu'il en devroit auſſi être de même du tétraèdre, & nous nous abſtiendrions dès-lors de la recherche de ſon évaluation, qui, faite au long comme la précédente, ne pourroit en effet aboutir qu'à nous offrir une ſolidité $= \sqrt{(r - 1)}$, ou impoſſible.

On peut encore remarquer au même ſujet, que l'équation qu'on auroit en égalant à zéro la valeur de z donnée par notre formule, ſeroit, comme elle devroit l'être, la même qui ſeroit propre auſſi à exprimer la relation des deux paires de côtés oppoſés, & de la paire de diagonales, d'un quadrilatère quelconque, leſquelles paires on ſuppoſeroit repréſentées par les trois paires de lettres latines & grecques ſemblables, qui ſont employées dans la formule.

C'eſt ainſi qu'en prenant dans la même formule a & α, & b & β, pour les paires de côtés oppoſés, & c & $\varkappa$ pour la paire de diagonales, & ſuppoſant de plus que $a = \alpha = b = \beta$, d'où il réſultera que le quadrilatere devra être un lozange, la formule nous donnera $2\,a^4 \times (c^2 + k^2) - 2\,a^4\,c^2 - c^2\,k^2 \times (4\,a^2 - c^2 - k^2) - 2\,a^4\,k^2 = 0$, ou bien $4\,a^2 - c^2 - k^2 = 0$; ce qui montre que dans le quadrilatère que l'on conſidère ici, ou le lozange, les deux diagonales peuvent être les deux côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuſe ſeroit le double du côté unique du même quadrilatère, comme la choſe doit en effet arriver; & que les deux diagonales venant d'ailleurs à être ſuppoſées égales l'une à l'autre, le triangle rectangle dont on parle,

deviendroit encore iſocèle, & le lozange ſe changeroit ainſi en carré.

On m'objectera peut-être ici, que bien que le quadrilatère en queſtion ſe montre clairement dans l'affaiſſement *(fig. 9)* du ſommet *O* du tétraèdre, ſur un point *P* du plan de la baſe, extérieur à cette baſe; il n'en eſt pas de même lorſque cet affaiſſement du ſommet vient à tomber, ou ſur un des côtés de la baſe *(fig. 10)*, ou dans cette baſe même *(fig. 11)*, & toujours aux points *P* de ces deux figures, dont la première paroît à l'inſpection, formée uniquement d'un triangle *ABPC*, lié à une droite *AP*, partant d'un de ſes angles *A*, & terminée au côté oppoſé *BC*, & la ſeconde repréſente le même triangle lié à trois droites, qui, partant toutes d'un même point de ſon aire, ſe terminent à chacun de ſes angles.

Mais une telle objection n'auroit ſa ſource que dans un défaut d'attention ou un préjugé ſans fondement, d'après leſquels on ſuppoſeroit implicitement & fauſſement, qu'il fût eſſentiel aux diagonales des quadrilatères de ſe croiſer l'une l'autre, ou à leurs angles, d'être tous ſaillans; & elle doit diſparoître à la ſeule lueur de la loi de continuité, d'abord de la *fig. 9* à la *fig. 10*, & puis de cette *fig. 10* à la *fig. 11*, ſuivant laquelle la *fig. 10* nous montre encore un quadrilatère, formé toujours, ainſi que celui de la *fig. 9*, des côtés *AB*, *AC*, *BP* & *CP* (derniers qui ſont ici un angle de 180°), & ayant toujours pour diagonales *AP* & *BC* (dernière qui coïncide avec la ſomme des deux derniers côtés, & ne croiſe pas *AP*, mais la termine en *P*); & la *figure 11* nous en montre encore un, formé toujours des côtés *AB*, *AC* & *BP*, *CP*, & ayant toujours pour diagonales *AP*, & *BC*, qui ne ſe croiſent plus ni ne ſe touchent, ce qui rend l'angle *BPC* rentrant.

Il y a plus, l'admiſſion néceſſaire dans le quadrilatère, des angles rentrans, ainſi que des ſaillans, nous autoriſeroit ici, à prendre à volonté pour diagonales, des droites que nous aurions priſes auparavant pour côtés, & réciproquement.

Ainſi la même figure 11 peut être encore conſidérée comme repréſentant, par exemple, le quadrilatère formé des côtés *BA*, *BC*, *AP* & *CP*, dont le 2.[d] & le 3.[me] étoient employés dans l'autre pour diagonales, & ayant pour diagonales *AC* & *BP*, c'eſt-à-dire, deux des côtés de l'autre Z. Et c'eſt ce qui fait que les ſix lignes que comprend l'équation du quadrilatère, y dépendent toutes d'une manière ſemblable, les unes des autres, en tant que pouvant toutes également, déſigner les mêmes fonctions de cette figure.

La comparaiſon enfin, d'une première idée qui m'étoit d'abord venue inutilement à l'eſprit, pour la recherche que comprend ce paragraphe, avec celle au moyen de laquelle j'y ai enſuite réuſſi, & que je viens d'expoſer, m'ayant fourni quelques autres réflexions que je juge aſſez utiles, j'eſpère qu'on me ſaura gré de les préſenter ſuccinctement en cet endroit.

Ayant donc tiré *(fig. 12)* du ſommet *O* du tétraèdre, ſur la baſe *ABC*, la perpendiculaire *OP*; & du pied *P*, de cette perpendiculaire, à chaque angle *A*, *B* & *C*, de la baſe, les droites *PA*, *PB* & *PC*, & nommé *OP*, *y*, j'avois penſé que les triangles *OPA*, *OPB* & *OPC*, rectangles en *P*, & les côtés *OA*, *OB* & *OC*, connus, devant faire connoître *PA*, *PB* & *PC*, en *y*, & les aires des triangles *APB*, *APC* & *BPC*, ainſi que leur ſomme, devant auſſi être connues en *y*; l'égalité de la ſomme, avec l'expreſſion toute connue de la baſe *ABC*, qu'on peut tirer des trois côtés connus de cette baſe, donneroit le moyen de connoître *y*, hauteur du tétraèdre, & d'après la multiplication de la même baſe *ABC*, par le tiers de cette ligne, d'évaluer la ſolidité du tétraèdre même.

Mais je m'aperçus incontinent après, que cette méthode me jetteroit dans de trop longs calculs, pour me permettre de continuer à la ſuivre : j'allai plus loin ; curieux de pouvoir préſumer juſqu'à quel point ces calculs devroient s'étendre, & quel temps ils demanderoient, je fis des calculs particuliers qu'il ſeroit inutile de rapporter ici, ſur l'un &

l'autre de ces objets, & trouvai que le résultat (aux réductions près, qui auroient pu se présenter dans les élévations successives de polynomes irrationnels à des carrés, & dans les additions ou soustractions mutuelles de ces carrés, en quoi ils auroient consisté) auroit dû comprendre 60, 626, 968 membres de 32 dimensions chacun, & n'auroit pu être obtenu (sauf les mêmes réductions) par les plus prompts calculateurs, qu'en se remplaçant un à un successivement, dans un travail continu de dix heures au moins par jour, durant plus de seize siècles: conclusion plus que suffisante pour le regarder comme physiquement impossible, malgré même les réductions auxquelles il donneroit lieu.

La règle que je découvris ensuite pour la mesure que je cherchois, ou celle que je viens d'exposer, m'ayant alors bien prouvé que la longueur immense d'un tel calcul n'étoit pourtant pas essentielle à la question à laquelle je me proposois de satisfaire, & que la nature de la même question le rendoit au lieu de cela, susceptible d'une grande abréviation, je m'attachai à reconnoître, si je le pouvois, pourquoi il en devoit être ainsi; & à cette occasion, & par induction de cet exemple, je cherchai même la solution de ce problème bien plus général & vraiment philosophique : *parvenir dans tous les cas où la chose se trouveroit praticable, aux solutions abrégées de tous les problèmes dont d'autres solutions conduiroient à des énoncés fort compliqués, mais pourroient en même temps paroître susceptibles d'une simplification plus ou moins grande.*

Pour résoudre donc celui-ci, qu'on pourra envisager comme aussi important dans l'Analyse, que nouveau, & prendre même daus bien des circonstances, pour clé d'une des parties de ce grand art trop peu connu encore, je me représentai d'abord la déduction qu'on peut faire des données de tout problème, à l'inconnue dont la solution du problème doit faire trouver la valeur, sous l'apparence d'une espèce de distance que je me permettrai ici, d'appeler *logique*, & que mon esprit auroit à franchir.

Or, en ſuppoſant que mon eſprit ſe trouvât hors d'état de s'élever, pour ainſi dire, d'un ſeul vol, au terme de la même diſtance logique, que pourrois-je avoir alors de mieux à faire que de rechercher avec ſoin, ſi dans tous les moyens qui ſeroient dès auparavant à ma diſpoſition, il ne s'en trouveroit pas de propres à me tranſporter tout d'un coup, à un point de cette même diſtance, d'où il ne m'en reſtât plus à parcourir qu'une portion beaucoup moins conſidérable, & par conſéquent, d'autant moins diſproportionnée à mes forces?

La ſolution de ce problème me ſembla donc devoir ſe réduire à faire une revue exacte de toutes les connoiſſances relatives à ſon objet, deſquelles je pourrois être antérieurement muni, & que j'aurois acquiſes en les déduiſant, du moins en partie, de principes ſur leſquels le calcul que l'autre ſolution auroit exigé, & que la trop grande longueur dont il auroit dû être, auroit fait juger impoſſible dans l'exécution, ne porteroit nullement ; à diſcerner après cela, entre de telles connoiſſances, celles qui pourroient auſſi dériver des principes du même calcul, mais ſeulement avec le ſecours d'autres calculs qui devroient eux-mêmes devenir très-longs, à eſſayer enfin ſi l'emploi de celles-ci, obtenues & démontrées déjà par d'autres voies, ne ſeroit pas propre à réduire la ſolution cherchée à des bornes de calcul qui ne fuſſent plus hors de la portée, ni de mes forces, ni de ma patience.

Bien qu'on démontre aiſément (pour nous en tenir à notre exemple) dans les élémens de Géométrie, par la voie du mouvement, de la ſuperpoſition & de la réduction à l'abſurde, non-ſeulement la première propoſition de la Géométrie plane, que *ſi une droite ſituée hors d'un plan, eſt perpendiculaire à deux autres droites ſituées dans ce plan, & ſe croiſant au point où elle y tombe, elle doit dès-lors l'être auſſi à toutes les autres droites ſituées dans le plan, & paſſant par le même point;* mais encore cette conſéquence de la même propoſition, que *les perpendiculaires tirées du ſommet & du pied d'une perpendiculaire à un plan, ſur une même droite de ce plan, tombent en un même point de cette droite;* la déduction de la première

de ces propositions, que j'employois dans la solution à laquelle j'avois d'abord pensé, à la seconde dont je n'y faisois point usage, ne sauroit cependant se faire algébriquement d'une manière complète, qu'au moyen d'une très-longue combinaison ou répétition de calculs & réductions, très-simples à la vérité les uns & les autres en particulier, telle que la suivante.

Soit OP (*fig. 13*) perpendiculaire sur le plan $PRTQS$, & PQ perpendiculaire sur RS; soit de plus OT, perpendiculaire sur la même RS, supposée tomber en un point T de cette dernière droite, différent de Q; en sorte que nommant OP, a, PQ, b, & QS, f, on pût avoir $TQ =$ à une quantité x; & on conclura de ces suppositions, 1.° par le triangle OPQ rectangle en P, $OQ^2 = aa + bb$; 2.° par le triangle OQT, supposé rectangle en T, $OT^2 = aa + bb + xx$; 3.° par le triangle OST rectangle en T, $OS^2 = aa + bb - xx + ff + 2fx + xx$, & par une première réduction $OS^2 = aa + bb + ff + 2fx$; 4.° par le triangle OPS rectangle en P, $PS^2 = aa + bb + ff + 2fx - aa$, & par une seconde réduction $PS^2 = bb + ff + 2fx$; 5.° par le triangle RSQ rectangle en Q, $bb + ff + 2fx = bb + ff$; 6.° par une troisième & dernière réduction, $2fx = 0$, ou $x = 0$; d'où s'ensuivra que nous avions supposé mal-à-propos que x fût une quantité, ou qu'il y eût un intervalle x, entre les points T & Q, de la droite $RTQS$, & nous pourrons conclure que les points T & Q doivent coïncider, ou tomber exactement l'un sur l'autre.

Or, ce calcul assez long, y compris ses réductions, & sans compter la réduction de $aa + bb + 2ab = cc + 2ab$ en $aa + bb = cc$, ou quelqu'autre semblable, que supposeroit d'ailleurs, toute démonstration de la 47.me d'Euclide, de laquelle on y a fait cinq fois usage, m'a paru en effet propre à m'avoir offert par sa combinaison avec un autre, plus long encore, mais non immense, le résultat de calcul immense dans lequel je m'étois d'abord trouvé engagé; & j'ai jugé d'après cela, que c'étoit en même

temps l'emploi que j'avois fait dans ma démonstration, de la seule conclusion à laquelle ce calcul menoit, ou de la seconde des propositions élémentaires rapportées plus haut, qui avoit dû faire disparoître de cette démonstration, la partie la plus grande, sans comparaison, de la difficulté de la recherche que je m'étois proposée; opinion que des réflexions ultérieures sur la même démonstration, ne pourroient que confirmer.

§. IV.

Sur l'évaluation d'un Tétraèdre quelconque, d'après la connoissance, soit de trois de ses arêtes, jointe à celle des élémens angulaires solides de l'angle solide où ces arêtes se réunissent, soit d'une arête seulement, du sinus de l'inclinaison des deux faces dont cette arête forme la commune section, & des perpendiculaires tirées dans les deux faces, de l'angle opposé à cette commune section, sur la même commune section, soit enfin de trois faces quelconques, & des élémens angulaires de l'angle solide dans lequel elles concourent.

Pour remplir d'abord la première partie de l'objet de ce paragraphe, nous conserverons les noms que nous avons donnés dans le paragraphe précédent, aux diverses lignes de la *figure 8*, dont nous continuerons aussi à y faire usage; nous nommerons de plus, comme nous avons fait à l'égard de la seconde proposition du §. II, les cosinus des angles plans AOB, AOC & BOC du sommet, g, p & s respectivement; & les trois arêtes AB, AC & BC, ou $\varkappa$, β & α, de la base, seront, d'après les propositions 12 & 13 du 2.[d] Livre des élémens d'Euclide, égales respectivement aux radicaux suivans,

$$\sqrt{(aa + bb - 2gab)},$$

$$\sqrt{(aa + cc - 2pac)},$$

$$\& \sqrt{(bb + cc - 2sbc)};$$

en sorte

en ſorte qu'on aura

$$x^2 = aa + bb - 2gab,$$
$$\beta^2 = aa + cc - 2pac,$$
$$\& \ \alpha^2 = bb + cc - 2sbc.$$

Or, ſubſtituant ces valeurs dans la formule du paragraphe précédent, je ſuis parvenu, au moyen d'un calcul un peu long, mais facile, & qu'il ſeroit par conſéquent inutile de rapporter ici, à la nouvelle formule aſſez ſimple,

$$z = \frac{1}{6} abc \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps)};$$

& dès-lors à cette première propoſition ou règle; qu'*on aura la ſolidité de tout tétraèdre dont on ſera ſuppoſé connoître trois arêtes ſituées autour d'un même angle ſolide, & les trois angles plans compris entre ces arêtes; 1.° en formant un parallélipipède des trois arêtes, & en en prenant le ſixième; 2.° en formant un autre parallélipipède ſur les trois coſinus des angles plans donnés, le doublant & y ajoutant l'unité; 3.° en ſouſtrayant de la ſomme trouvée, celle des carrés des trois mêmes coſinus; 4.° en tirant la racine carrée du reſtant; 5.° enfin en multipliant par cette racine, le ſixième de parallélipipède trouvé dans l'article premier.*

Mes deux Mémoires précédens, compris dans ce même Volume, offriront d'ailleurs une conſéquence bien ſimplifiée encore de cette règle, pour le cas où les élémens angulaires donnés de l'angle ſolide formé par les trois arêtes données auſſi, conſiſteroient en deux angles plans, & l'inclinaiſon mutuelle de leurs plans.

En effet, le polynome $1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps$, repréſentant également

$$(1 - gg) \times (1 - pp) - (s - gp)^2,$$
$$(1 - gg) \times (1 - ss) - (p - gs)^2,$$
$$\& \ (1 - pp) \times (1 - ss) - (g - ps)^2;$$

& ces quantités étant chacune, ſuſceptibles d'autres énoncés, par la ſubſtitution aux coſinus g, p & s, de leurs valeurs;

en ſinus correſpondans, nommés dans le §. II, γ, π & σ, la première, par exemple, prenant de-là, cette forme, $\gamma^2 \pi^2 - (s - gp)^2$; il en réſulte d'abord, $z = \frac{1}{6}\, abc \times \sqrt{[\gamma^2 \pi^2 - (s - gp)^2]}$; & cette dernière équation ſe transforme, au moyen de la diviſion ſous le ſigne, par $\gamma^2 \pi^2$, & de la multiplication hors du ſigne par $\gamma \pi$, en $z = \frac{1}{6}\, abc \times \gamma \pi \sqrt{[1 - \frac{(s - gp)^2}{\gamma^2 \pi^2}]}$. La remarque tirée de la Trigonométrie ſphérique, que $\frac{s - gp}{\gamma \pi}$ eſt égale au coſinus, que nous avons nommé ci-deſſus S, de l'inclinaiſon des faces OAB, OAC, dans l'arête OA, & que $\sqrt{[1 - \frac{(s - gp)^2}{\gamma^2 \pi^2}]}$, eſt par conſéquent l'expreſſion du ſinus de la même inclinaiſon, nommé ci-deſſus Σ, change de plus, celle-ci en $z = \frac{1}{6}\, abc \gamma \pi \Sigma$. Tout cela enfin, donne lieu de conclure en quantités toutes données par l'énoncé du problème, ou par les Tables des ſinus, la règle ſeconde ſuivante, d'une ſimplicité vraiment étonnante, eu égard au grand nombre de données qu'elle emploie, & à la complication eſſentielle, autant que j'ai pu en juger, des calculs dont elle eſt le réſultat.

Pour trouver la ſolidité d'un tétraèdre quelconque, dont on ſera ſuppoſé connoître trois arêtes ſituées autour d'un même angle ſolide, ainſi que deux des trois angles plans compris entre ces arêtes, & l'inclinaiſon des plans de ces angles ; il ſuffira de former deux parallélipipèdes, l'un ſur les trois arêtes, l'autre ſur les ſinus de deux quelconques des trois angles plans, & celui de l'inclinaiſon mutuelle de leurs plans, de multiplier le premier de ces parallélipipèdes par le ſecond, & de prendre le ſixième du produit.

Les énoncés de ces deux premières règles, relatives au premier objet de notre problème, ſont d'ailleurs l'un & l'autre trop ſimples pour avoir beſoin d'être éclaircis par des exemples.

Paſſant donc à la ſeconde partie du même objet, je remar-

querai que la valeur de z tirée de la dernière de nos transformations, pouvant s'exprimer ainsi $z = c \times \gamma a \times \pi b \times \frac{1}{6} \Sigma$, & les valeurs de γa & de πb désignant évidemment *(pl. III, fig. 14)* les perpendiculaires *AR, BS*, tirées de *A* & de *B* sur *OC*, il s'ensuit de-là ;

1.° Cette troisième proposition ou règle, qu'*on trouvera aussi la solidité du tétraèdre, en formant un parallélipipède de la commune section de deux faces quelconques, & des perpendiculaires tirées dans les deux faces, de l'angle opposé à la commune section, sur cette commune section, & le multipliant par* $\frac{1}{6}$ *du sinus de l'inclinaison des deux faces.*

2.° Que pour construire la solidité du tétraèdre, il suffira *de tracer* (fig. 15) *un triangle* $\varphi\lambda\psi$, *dont les côtés* $\varphi\lambda$ *&* $\lambda\psi$, *soient égaux aux perpendiculaires* AR, BS, *& comprennent entr'eux un angle* $\varphi\lambda\psi$, *égal à celui qui mesurera l'inclinaison des plans*, AOC, BOC, *& d'élever sur l'aire de ce triangle, prise pour base, un prisme triangulaire droit, dont la hauteur soit* $= \frac{1}{3}$OC, *ou* $= \frac{1}{3}$c.

3.° Que la même solidité étant aussi égale à un prisme triangulaire droit, qui auroit la même base *ABC (fig. 16)* que le tétraèdre, & pour hauteur, le tiers de la hauteur *OP* du même tétraèdre, *on construira facilement cette hauteur* OP, *en prenant une quatrième proportionnelle aux aires triangulaires* ABC *&* $\varphi\lambda\psi$, *& au côté* OC.

Quant au troisième objet de ce paragraphe, ou à l'évaluation de la solidité du tétraèdre, d'après la connoissance de trois de ses faces, ainsi que des trois angles plans situés autour de l'angle solide dans lequel elles se réunissent, c'est une suite de la seconde évaluation comprise dans ce paragraphe, ou de celle qui suppose que l'on connoisse trois arêtes, deux angles plans intermédiaires & l'inclinaison de leurs plans.

En effet, soient nommées les trois faces qu'on supposera connues, *ee, ff* & *ll*; & conservant les noms donnés déjà aux cosinus & sinus des angles plans connus aussi, on aura

$\frac{1}{2}\gamma ab = ee$, ou $ab = \frac{2ee}{\gamma}$, & de même $ac = \frac{2ff}{\pi}$, & $bc = \frac{2ll}{\sigma}$; d'où l'on conclura $a^2 b^2 c^2 = \frac{8 e^2 f^2 l^2}{\gamma \pi \sigma}$, & $abc = \frac{2\sqrt{2}.efl}{\sqrt{(\gamma\pi\sigma)}}$; valeur qui, étant ſubſtituée dans la formule de notre ſeconde règle, donnera pour la formule qu'on chercheroit, de celle-ci, $z = \frac{1}{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\gamma\pi}}{\sqrt{(\sigma)}} \times \Sigma \times efl$, ou, ſubſtituant ſi l'on vouloit, pour $\gamma\,\pi\,\Sigma$, ſa valeur

$$\sqrt{[\gamma^2\pi^2 - (gp - s)^2]},$$

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{[\gamma^2\pi^2 - (gp - s)^2]}}{\sqrt{(\gamma\pi\sigma)}} \times efl;$$

Mais ces formules, bien que repréſentant l'une & l'autre, dans les conditions ſuppoſées, la ſolidité cherchée, donneroient en même-temps, à la quatrième règle qu'elles pourroient fournir, des énoncés trop compliqués, pour que j'aie dû juger utile de les expoſer ici au long.

Obſervation ſur le Paragraphe précédent & celui-ci.

Durant la lecture que je fis de ce Mémoire, à l'Académie, on m'obſerva avec raiſon, que M. de la Grange avoit traité dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, de l'année 1773, la même matière qui fait l'objet de ces deux paragraphes; & je ne doutai guère dès-lors, qu'un Géomètre d'un ſi grand mérite, ne fût tombé ſur les mêmes formules que moi, & que, frappé de leur utilité & de leur ſimplicité réunies enſemble, il ne les eût rendues publiques avant moi; en ſorte qu'il ne me ſeroit reſté à cet égard, que le ſeul droit de réclamer en ma faveur, d'après nos anciens regiſtres, la très-grande antériorité de date de l'invention qui nous auroit été commune.

Je fus donc avec empreſſement, conſulter ſur cela, le volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, qui m'avoit été indiqué, & que je n'avois point en ma poſſeſſion, &

n'avois d'ailleurs pas lû dans la très-longue interruption de mes travaux mathématiques; mais je trouvai au contraire,

Premièrement, que M. de la Grange n'avoit employé dans le Mémoire dont il étoit question, que la méthode transcendante, & indirecte à un tel égard, des différences finies; & qu'il y avoit dès-lors lieu de croire que les problèmes qu'il s'étoit proposé d'y résoudre, ne lui avoient paru, ni soumis à des recherches élémentaires, ni susceptibles de solutions très-simples; sans quoi il n'auroit pas manqué de préférer celles-ci, dans une matière que les fréquens & importans usages, auxquels elle devroit s'étendre, demandoient qu'on mît autant qu'il seroit possible, à la portée des Géomètres de la moindre force, & de sujets même qui ne seroient en ce genre que praticiens seulement;

En second lieu, qu'il ne développoit pas en élémens propres & directs du tétraèdre, tels que ses côtés ou arêtes, ses faces, &c. les résultats, un peu obscurs en eux-mêmes, auxquels sa méthode l'avoit conduit;

3.° Que si, pour développer de la sorte, ces résultats, on représentoit la formule qu'il donne de la solidité du tétraèdre, par les lettres que j'ai employées dans mes deux paragraphes, on ne retrouveroit même pas la formule que j'ai de mon côté, déduite élémentairement & avec la plus grande évidence, des principes les plus clairs, & vérifiée d'ailleurs, dans un cas d'un calcul assez long.

§. V.

Sur la manière de tirer entre deux droites qui ne soient point situées dans un même plan, la perpendiculaire unique qui peut toujours alors leur être commune.

CETTE recherche, qu'autant que je puis savoir, aucun Géomètre ne s'est encore proposée, bien que ce soit de-là que dépende essentiellement, l'habitude ou extériorité mutuelle de deux droites situées chacune hors de tout plan où l'autre puisse se trouver, paroîtra peut-être d'abord, étrangère

à la théorie du tétraèdre; mais elle n'en a pas moins pour cela un rapport immédiat & direct à l'examen de ce solide.

En effet (*fig. 17*) les droites ωn, & $\delta\gamma$, étant données de position, on peut 1.° prendre à volonté, sur chacune respectivement, deux points *O* & *C*, *A* & *B*, dont les distances *O C*, & *A B*, seront par conséquent, données aussi ; 2.° unir les deux extrémités de chacune aux deux extrémités de l'autre, par quatre nouvelles droites, *O A* & *O B*, *C A* & *C B*, qui seront aussi données, ainsi que leurs positions respectives, & leurs angles & leurs inclinaisons sur d'autres droites données semblablement.

Or, les six droites qui se trouveront ainsi tracées, & les faces, les angles & les inclinaisons de plans, qui résulteront de-là, formeront dès-lors un tétraèdre *OABC*, tout donné, & duquel *O C* & *A B*, seront une paire d'arêtes, opposées l'une à l'autre; en sorte que la recherche dont on s'occupera, reviendra à celle des *moyens de tirer dans un tétraèdre quelconque, la perpendiculaire unique qui peut toujours être commune, à deux quelconques de ses arêtes, opposées l'une à l'autre.*

Pour réussir donc, dans l'une ainsi que dans l'autre, j'ai pris d'abord sur *O C*, première des deux droites de directions données, une abscisse quelconque *OX*, que j'ai nommée x, & de l'extrémité *X* de laquelle j'ai supposé menées sur *AB*, seconde des droites de directions données, des perpendiculaires variables *XZ*, que j'ai nommées z; & j'ai désigné les arêtes *O A* & *O B*, par a & b, & les cosinus & sinus des angles *A O C*, *B O C* & *A O B*, par les lettres g & γ, p & π, & s & σ, respectivement.

J'ai de plus remarqué que la plus courte des distances d'un point quelconque de l'une des droites données d'abord, à un point quelconque de l'autre, ne pouvoit manquer d'être en même-temps la perpendiculaire commune cherchée, puisque prenant *KZ* pour la plus courte distance de On & δB, il faudroit, pour que *KZ* ne fût pas en même-temps perpendiculaire à On & δB, qu'on pût tirer de *K* & de *Z*, sur δB & On respectivement, des perpendiculaires

différentes de XZ, c'eſt-à-dire, des droites plus courtes que XZ, ce qui contrediroit à notre ſuppoſition.

Ayant donc, d'après cela, réduit la recherche propoſée à celle de la plus courte diſtance de $O\eta$ & de δB; 1.° dans la vue d'exprimer la perpendiculaire XZ, ou z, en connues & en x, j'ai fait attention que les côtés AX, BX & AB du triangle variable AXB, ſont reſpectivement égaux à $\sqrt{(aa + 2gx + xx)}$, $\sqrt{(bb + 2px + xx)}$, & $\sqrt{(aa + 2sab + bb)}$, & que le double de la valeur de l'aire de ce triangle, en conſtantes & en x, laquelle on peut conclure de-là, diviſé par la conſtante AB, ou par la baſe $\sqrt{(aa + 2sab + bb)}$ du même triangle, doit d'ailleurs donner cette perpendiculaire z.

2.° Après avoir trouvé par un calcul aſſez long, mais trop facile pour devoir être rapporté ici, cette dernière valeur, je l'ai différenciée, j'en ai fait la différence $= 0$, j'ai tiré de-là, par un autre calcul qui auroit pu être long encore, mais que j'ai trouvé moyen d'abréger un peu, la valeur de x propre à faire devenir XZ un *minimum*, & cette valeur de x s'eſt trouvée être $\frac{(ga + pb)s - (pa + gb)}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}}$.

3.° J'ai ſubſtitué par un autre calcul qu'il n'a pas été hors de propos de venir à bout d'abréger auſſi un peu, cette valeur de x dans celle de z, ou de la perpendiculaire à la ſeconde $\delta\gamma$ des droites données, afin de reſtreindre d'abord celle-ci à ne pouvoir plus convenir qu'à la ſeule perpendiculaire aux deux droites à-la-fois, & il m'eſt venu

$$z = \frac{\sqrt{(1 - gg - pp - ss + 2gps)}.ab}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}},$$

ou, d'après la réduction employée déjà dans la 3.e propoſition du paragraphe précédent, $z = \frac{\gamma\pi\Sigma ab}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}}$.

4.° Pour conſtruire plus aiſément ces deux valeurs, j'ai commencé par exprimer le polynome qui ſe trouve dans les dénominateurs des deux, en cette ſorte

$$(\gamma a)^2 + 2\frac{(gp - s)}{\gamma\pi}\gamma a.\pi b + (\pi b)^2,$$

& y ſubſtituer, ſuivant que la Trigonométrie ſphérique y autoriſe, au lieu du coéfficient numérique $2\,\frac{(gp - s)}{\gamma\,\pi}$, du terme du milieu, le double du coſinus S, de l'inclinaiſon des plans AOC, BOC, ou de l'angle plan $\varphi\lambda\psi$ *(fig. 14)* tracé ci-deſſus, vers la fin du paragraphe précédent; d'après quoi ce même polynome m'a évidemment repréſenté le carré du côté $\varphi\psi$, oppoſé au même angle $\varphi\lambda\psi$, dans le triangle rectiligne de même dénomination, & ſa racine ce côté même.

5.° Nommant θ ce côté $\varphi\psi$ conſtruit ci-deſſus, la valeur de z ſera $= \frac{\gamma\varpi\Sigma ab}{\theta}$; & ſa conſtruction ſe réduira en conſéquence à des conſtructions réitérées de quatrièmes proportionnelles.

6.° Si, pour la conſtruction de x, on tire *(fig. 18)*, dans les faces AOC, BOC, & des points A & B reſpectivement, ſur l'arête OC, de ces deux faces, des perpendiculaires AR, BS, ſur la même arête, elles intercepteront évidemment ſur OC, à prendre de O, des portions OR, OS, qui ſeront reſpectivement, $= ga$ & $= pb$; & ſi, ayant pris de plus, ſur la direction OA, la quantité OB, & ſur la direction OB, la quantité OA, on tire des extrémités b & a, auxquelles on aura abouti dans les deux directions, d'autres perpendiculaires bf, ar, ſur OC, elles intercepteront ſemblablement ſur cette arête, d'autres portions $= pa$ & $= gb$. Or, portant enſuite la ſomme $ga + pb$ des premières portions, ſur OA juſqu'en e, ou ſur OB juſqu'en f, & tirant de l'une à volonté, des extrémités auxquelles on aura abouti, dans l'une des faces AOB, AOC, reſpectivement, par exemple, de e dans AOB, une nouvelle perpendiculaire ſur l'arête oppoſée, ici eg, ſur OB, l'interceptée, à prendre de O juſqu'en g, ſur la dernière ligne, repréſentera $(ga + pb)\,s$, dont ſouſtrayant $pa + gp$, ou Om, priſe égale à cette ſomme, on aura enfin conſtruit par le reſtant $- mg$, le coéfficient polynome total du

numérateur

numérateur de x; en ſorte que déſignant ce coéfficient par la lettre n, ce qui donnera $x = \frac{n a b}{\beta^2}$, le reſte de la conſtruction ſe réduira, ainſi qu'il eſt arrivé de la précédente, à de ſeules conſtructions ſucceſſives de quatrièmes proportionnelles; & toutes les parties de conſtruction des valeurs, tant de z que de x, aſſignées ci-deſſus, ſe trouveront de plus, n'avoir été que très-peu compliquées.

On pourroit du reſte trouver d'autres expreſſions de z, ſoit en comptant l'abſciſſe x, à commencer de l'origine C, & non de l'origine O, ſoit en la prenant ſur la direction $\rho\,\gamma$, à commencer, tant de A que de B, & tirant, dans ces deux derniers cas, des extrémités des x, les perpendiculaires ſur la droite On; diverſes expreſſions dont les comparaiſons donneroient des équations d'où réſulteroient peut-être, au moyen de réductions algébriques, des propriétés ultérieures, ſimples & belles, du tétraèdre; on en concluroit vraiſemblablement d'autres non moins curieuſes, de la comparaiſon des perpendiculaires ſur les trois paires différentes d'arêtes oppoſées d'un même tétraèdre; & peut-être en découvriroit-on une plus ſimple & plus belle encore, en comparant au parallélipipède qu'on formeroit ſur ces trois perpendiculaires, la ſolidité du tétraèdre auquel elles ſe rapporteroient.

La recherche de démonſtrations uniquement élémentaires des propriétés curieuſes du tétraèdre, que M. de la Grange a données à la fin du Mémoire que j'ai cité de lui, ou celles d'autres analogues, ſeroient encore des objets dont il pourroit être utile de s'occuper; & pourquoi la ſolution de ces divers problèmes ou d'autres, que la comparaiſon des angles ſolides au centre & à la ſurface de la ſphère, auroit facilitée, ne pourroit-elle pas être de quelque uſage dans la ſolution la meilleure à trouver, du problème important des trois corps.

Mais les mêmes raiſons qui m'ont décidé à abandonner à d'autres tous les points que le ſujet de mon Mémoire précédent auroit encore offerts à traiter, me déterminent à en faire autant à l'égard de celui-ci.

ÉCLAIRCISSEMENS sur deux endroits du premier des trois Mémoires précédens.

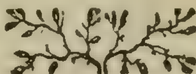
LES quatre fractions rapportées, tant dans le corollaire VII, *page 316*, que dans le corollaire XI, *page 327*, ayant toutes pour dénominateurs un même radical pair; les trois premières de la *page 316*, & la première & les deux dernières du haut de la *page 327*, étoient également susceptibles du même signe +, & du même signe —; & nous ne nous sommes bornés à les représenter comme positives, qu'en sous-entendant que le Lecteur appliqueroit aisément nos principes aux cas où elles seroient supposées négatives, lesquels ne produiroient dans nos conclusions, que des changemens de certains nombres de degrés, en d'autres > ou < de 90° ou de 180°.

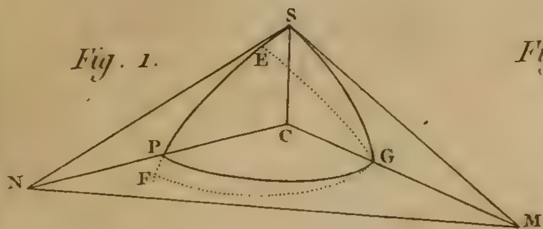
Nous pouvions d'ailleurs prendre aussi-bien les deux premières fractions de la *page 316*, & les deux dernières du haut de la *page 327*, pour sinus que pour cosinus des deux parties des nombres de degrés cherchés à chacune de ces deux pages; & en les prenant de préférence pour cosinus, nous avons eu principalement pour objet, d'introduire dans nos solutions, des sinus négatifs, ainsi que des positifs, ou des arcs plus grands que 180°, ainsi que de plus petits; chose dont nous avions annoncé à la fin de l'observation sur notre deuxième demande, devoir donner des exemples; mais ayant réfléchi depuis l'impression de ces Mémoires, que la supposition contraire auroit pu être plus du goût des Lecteurs, en ce que n'admettant que des sinus positifs, elle auroit offert d'une manière plus à leur portée, des résultats partiels, au moyen de règles analogues à celles qui sont admises; nous croyons à propos d'observer, qu'il suffira encore pour obtenir ces derniers résultats, de prendre pour sinus des parties des nombres de degrés cherchés, les mêmes expressions que nous en avons adoptées préférablement pour cosinus, & réciproquement.

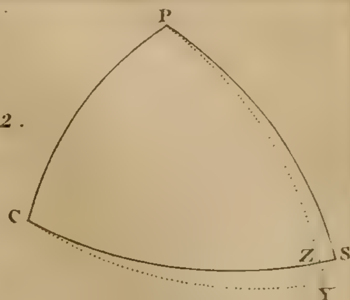
Ces remarques enfin doivent s'étendre des corollaires septième & onzième, aux huitième & douzième.

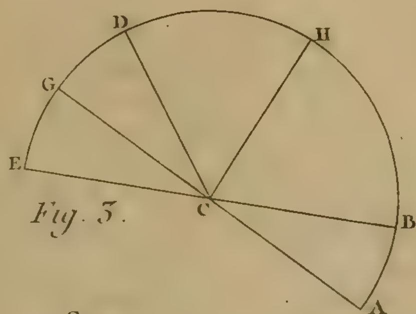
Errata du même premier Mémoire.

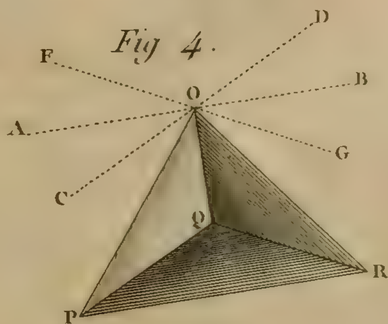
Page 316, depuis la ligne *6*, *&* *pages 307 & 308*, arcs ou angles; *rayez* ou angles.
Page 328, au lieu de ⅂φ⅂*p*, *lisez* ⅂φ⅂*s*: & au lieu de ⅂φ⅂*s*; *lisez* ⅂φ⅂*p*.

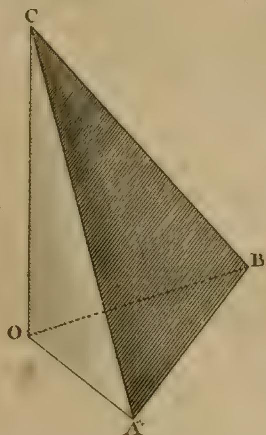


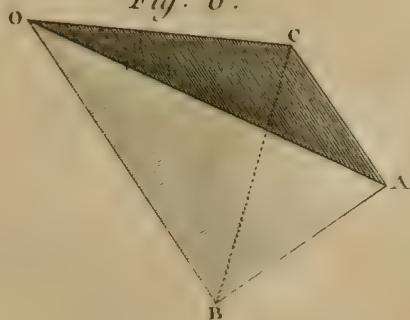

Fig. 1.
S
E
C
P
G
N
F
M


Fig. 2.
P
C
Z
S
Y

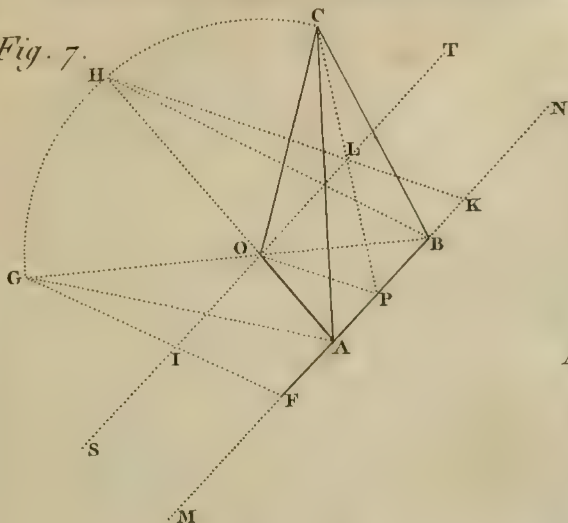

D
H
G
E
Fig. 3.
C
B
A

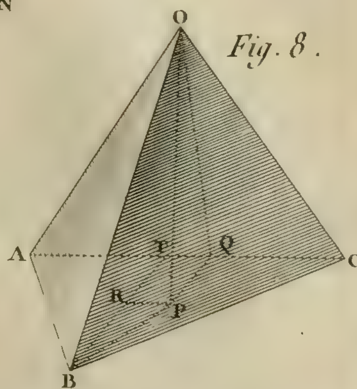

Fig 4.
D
F
B
O
A
G
C
Q
R
P

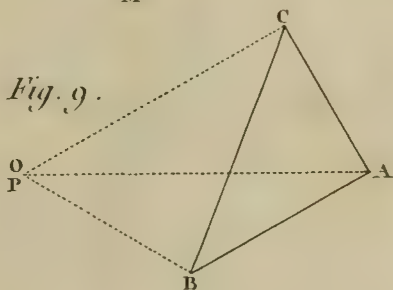

C
Fig. 5.
B
O
A

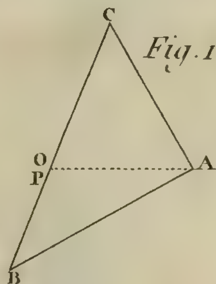

Fig. 6.
O
C
A
B

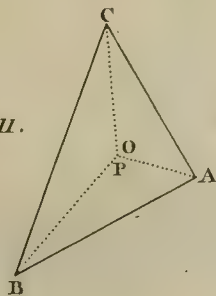
Y. le G. Sculp.

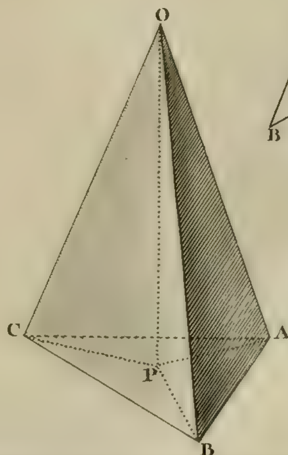

Fig. 7.
C
T
H
N
L
K
B
O
G
P
A
I
F
S
M


O
Fig. 8.
A
T
Q
C
R
P
B


C
Fig. 9.
O
P
A
B

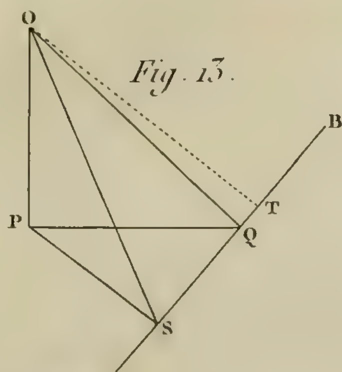

C
Fig. 10.
O
P
A
B

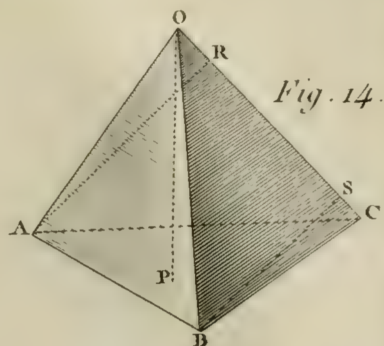

C
Fig. 11.
O
P
A
B

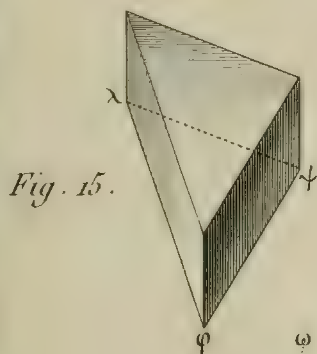

O
C
A
P
B
Fig. 12.

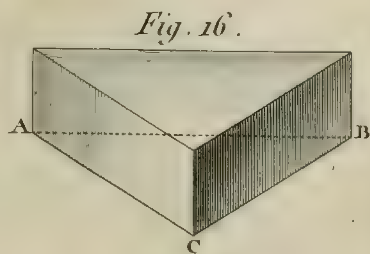
Y. le G. Sculp.

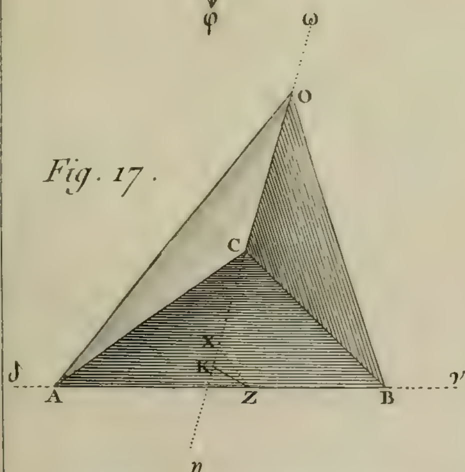


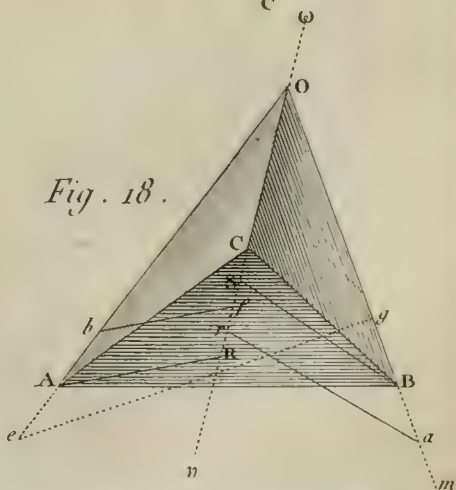

O
Fig. 13.
B
T
P
Q
S


O
R
Fig. 14.
S
A
C
P
B


λ
Fig. 15.
ψ
φ


Fig. 16.
A
B
C


ω
O
Fig. 17.
C
X
K
A
Z
B
n


ω
O
Fig. 18.
C
S
f
g
h
F
R
A
B
e
a
n
m

Y. le G. Sculp

MÉMOIRE
SUR LA
DIFFÉRENCE DU VINAIGRE RADICAL ET DE L'ACIDE ACÉTEUX.

Par M. BERTHOLLET.

PLUSIEURS Chimiſtes, & en particulier M. de Laſſone, ont obſervé que le vinaigre radical avoit beaucoup plus d'action que le vinaigre diſtillé le plus concentré, mais l'on a attribué cette propriété à un plus grand degré de pureté & de concentration; j'ai examiné s'il n'y avoit pas des différences réelles entre ces deux liqueurs, & à quoi pouvoient tenir ces différences. La peſanteur ſpécifique d'un vinaigre diſtillé très-concentré par la gelée, & que M. Vandermonde a eu la bonté de déterminer, étoit à celle de l'eau diſtillée, comme 1,0178 à 1,0000; & celle du vinaigre radical qui a ſervi à mes expériences, comme 1,0404: il ſeroit peut-être poſſible de donner un plus grand degré de concentration au vinaigre diſtillé, mais il ne paroît pas qu'on pût l'amener au degré du vinaigre radical.

J'ai étendu d'eau diſtillée le vinaigre radical, & je lui ai donné, par le moyen d'un pèſe-liqueur, la même peſanteur ſpécifique qu'au vinaigre diſtillé; malgré cet affoibliſſement, j'ai trouvé dans le vinaigre radical, un piquant de ſaveur & d'odeur qui le faiſoit diſtinguer facilement du vinaigre diſtillé.

M. de Laſſone avoit obſervé que le vinaigre radical criſtalliſoit avec l'alkali volatil; j'ai fait la même obſervation ſur l'alkali fixe végétal: le ſel qui réſulte de cette combinaiſon, forme des aiguilles aplaties & tranſparentes appliquées les unes aux autres, & flexibles comme celles du ſel ammoniac: ce ſel attire lentement l'humidité, & ſe réſout en liqueur

ſi on le laiſſe expoſé à l'air; il ſe diſſout dans l'eſprit-de-vin comme la terre foliée de tartre.

J'ai ſaturé trois gros d'alkali végétal criſtalliſé de vinaigre radical, & trois gros du même alkali de vinaigre diſtillé; j'ai mis l'une & l'autre combinaiſons dans des capſules ſemblables ſur le même bain de ſable, & je les ai fait évaporer juſqu'à ſiccité; du point de criſtalliſation à celui de ſiccité, le ſel radical perd beaucoup d'eau.

Le ſel acéteux a peſé trois gros moins dix-huit grains, le ſel radical a peſé trois gros; le premier a verdi le ſirop violat; le ſecond ne l'a point altéré, & même il faut qu'il éprouve un degré de feu aſſez conſidérable pour qu'il abandonne une partie de ſon acide. Il eſt dans cet état beaucoup plus blanc que le premier; il a une ſaveur beaucoup moins âcre, il criſtalliſe ſans difficulté ſi on lui rend de l'eau.

J'ai verſé de l'acide radical ſur le ſel acéteux, la diſſolution s'en eſt faite promptement, il s'en eſt ſéparé un dépôt brun; j'ai décanté la liqueur, & je l'ai fait un peu évaporer; il s'eſt formé, par le refroidiſſement, des criſtaux parfaitement ſemblables à ceux que j'avois formés immédiatement par la combinaiſon de l'alkali & de l'acide radical, ils étoient ſeulement un peu jaunes; l'odeur qui s'exhaloit pendant l'évaporation, étoit celle de l'acide acéteux ſans mélange de celle d'acide radical.

J'ai fait la même opération en retenant l'acide qui ſe dégageoit: j'ai mis pour cela deux onces de terre foliée dans une petite cornue, avec une once d'acide radical & une once d'eau; & j'ai diſtillé à une légère chaleur, juſqu'à ce que j'aie aperçu dans le récipient, environ une once de liqueur. J'ai ſaturé cette liqueur d'alkali; j'ai fait évaporer cette combinaiſon qui s'eſt trouvée de la véritable terre foliée de tartre.

La liqueur qui étoit reſtée dans la cornue, étoit d'un jaune foncé, il s'y eſt même fait un dépôt charbonneux, ce qui dépendoit ſans doute d'une partie du vinaigre qui ſe décompoſe & ſe réduit en charbon dans la deſſiccation trop forte de la terre foliée de tartre.

Ces expériences me paroiſſent prouver que l'acide radical a des différences eſſentielles qui le diſtinguent de l'acide acéteux, qu'il a avec les alkalis une affinité ſupérieure, qu'il forme avec eux une combinaiſon plus parfaite, & qu'il réſiſte mieux à l'action de la chaleur; je vais tâcher de déterminer comment l'acide acéteux peut acquérir ces propriétés, lorſqu'il ſe convertit en vinaigre radical.

Le cuivre ne ſe diſſout dans l'acide acéteux qu'en ſe réduiſant en chaux; de-là vient la difficulté qu'on a de diſſoudre immédiatement ce métal dans cet acide, mais ſi l'on prend la chaux ou un précipité de cuivre, tel que le précipité du vitriol bleu par l'alkali fixe, la combinaiſon ſe fait très-facilement, & l'on a par ce moyen un ſel parfaitement ſemblable aux criſtaux de verdet. M. Monnet a fait cette combinaiſon avant moi; ce ſavant Chimiſte attribue la diſſolution qui ſe fait par les manipulations dont on ſe ſert pour former ce ſel, à une eſpèce de fermentation qu'excite, ſelon lui, l'acide du vinaigre dans les parties de ce métal, fermentation qui diviſe les parties métalliques, & les met en état d'être diſſoutes enſuite facilement. *Traité de la diſſolution des Métaux, page 112.*

Mais puiſqu'on fait immédiatement avec la chaux de cuivre un ſel acéteux, c'eſt l'état métallique qui s'oppoſe à la diſſolution du cuivre dans les opérations dont on ſe ſert pour faire le verdet, & dont on a ignoré l'éthiologie juſqu'à préſent; on réduit le cuivre dans l'état de chaux dans lequel ſeulement il eſt diſſoluble dans les acides végétaux. Pour confirmer cette théorie, & pour établir d'une façon poſitive la nature du vert-de-gris ou verdet, dont la fabrication ſe fait à Montpellier, & dont il ſe fait un aſſez grand uſage dans les Arts, j'ai fait bouillir dans de l'eau diſtillée une once de cette ſubſtance, & j'ai ſéparé par le filtre la partie qui étoit diſſoute de celle qui ne l'étoit pas, la dernière a peſé, après la deſſiccation, près de 2 gros, elle s'eſt diſſoute dans l'acide nitreux ſans dégager de gaz nitreux; c'étoit une chaux de cuivre d'une couleur noire, & ſemblable à celle du départ de l'argent dont je parlerai plus bas.

La partie qui s'est dissoute a donné, par l'évaporation, des cristaux absolument semblables à ceux que m'a donné une dissolution acéteuse de chaux de cuivre, & de la même nature que les cristaux de verdet.

Le verdet est donc composé d'environ trois quarts de sel de cuivre acéteux & d'un quart de chaux de cuivre.

Lors donc qu'on le dissout dans le vinaigre distillé pour former les cristaux de verdet qu'on appelle improprement *verdet distillé*, on ne fait que donner l'eau nécessaire à la cristallisation de la partie saline, & l'on réduit, par le moyen du vinaigre, en sel acéteux, celle qui étoit en chaux.

3 gros 10 grains de précipité de la dissolution nitreuse du cuivre par l'alkali fixe effervescent, m'ont donné 5 gros 24 grains de sel cuivreux; mais il faut soustraire du poids de la chaux de cuivre, un peu d'acide crayeux qui s'en dégage pendant sa dissolution. Lorsqu'on distille les cristaux de verdet pour en retirer le vinaigre radical, le résidu cuivreux ne se trouve plus dans l'état de chaux, il refuse de se dissoudre dans l'acide acéteux concentré, quoique l'état de division où il est, égale celle du précipité; il donne du gaz nitreux avec l'acide nitreux; enfin il jouit des propriétés métalliques. Il a donc reçu du phlogistique de l'acide acéteux; & en même temps il a perdu le principe aérien qui se trouve dans les chaux métalliques; mais il ne peut devoir le phlogistique au charbon d'une partie de l'acide acéteux qui se décompose dans cette opération, & qu'on peut séparer en dissolvant le résidu dans de l'acide nitreux, car la revivification de la chaux de cuivre ne se fait pas sans fusion; j'en ai mêlé avec du charbon, & j'ai tenu ce mélange à une chaleur beaucoup plus forte que celle que l'on emploie dans la distillation des cristaux de verdet, sans qu'elle ait pris les propriétés métalliques (*a*).

Il paroît donc que lorsqu'on forme l'acide radical dans la

(*a*) Je reviens à cet objet dans un Mémoire sur l'eau regale, que j'ai lû le 25 Avril 1785.

distillation des cristaux de verdet, il se fait un échange entre la chaux de cuivre & l'acide acéteux, que celui-ci donne du phlogistique à la chaux de cuivre, qu'il en reçoit du principe aérien; & que par-là ses propriétés acides se trouvent rehaussées.

Puisque le sel cuivreux qui constitue le verdet, est une combinaison de chaux de cuivre & d'acide acéteux, on pourroit abandonner les longs procédés qu'on emploie pour le former, & qui tendent à réduire par l'action combinée de l'air & de l'acide acéteux, les lames de cuivre en chaux soluble dans cet acide. On pourroit employer, outre le précipité du vitriol bleu, des chaux de cuivre que l'on forme dans d'autres Arts, telle que la chaux du cuivre qui a servi à la précipitation de l'argent dans l'opération du départ, & dont on a retiré l'acide nitreux par la distillation. On pourroit même se servir des mines de cuivre en chaux, pourvu toutefois qu'elles se trouvassent dans un assez grand degré de pureté. Il est probable que le verdet qu'on auroit par-là à bas prix, seroit préférable à celui dont on fait usage, parce que ce dernier contient, comme on l'a vu, une partie de chaux de cuivre qui n'est pas dans l'état salin. On peut aussi se passer de cristaux de verdet pour faire l'acide radical, & se contenter, comme je l'ai éprouvé, de mettre de la chaux de cuivre dans du vinaigre distillé, de faire évaporer la combinaison qui se forme, jusqu'à une dessiccation convenable, & de la soumettre alors à la distillation.



MÉMOIRE

SUR LA
PRÉPARATION DE L'ALKALI CAUSTIQUE,
Sa cristallisation, & son action sur l'Esprit-de-vin.

Par M. BERTHOLLET.

PLUS la Chimie acquiert de précision dans ses recherches, plus elle doit s'occuper à se procurer des agens, dont les propriétés ne soient point modifiées par des mélanges étrangers. L'alkali caustique est un de ceux dont on fait le plus d'usage, mais tel qu'il a été employé jusqu'à présent, il contient une portion d'alkali effervescent, de la terre calcaire, & ordinairement du fer & de la terre siliceuse.

J'avois imaginé, dans un Mémoire que je lûs à l'Académie au mois de Février 1778, qu'en distillant dans une cornue de verre une solution d'alkali rendue caustique par suffisante quantité de chaux, & filtrée, on auroit un alkali caustique pur, parce que je supposois que ce qui empêchoit de l'obtenir tel, lorsqu'il étoit préparé à la manière ordinaire, n'étoit que l'acide crayeux que lui rendoit, dans l'évaporation, l'air atmosphérique avec lequel il se trouvoit en contact, mais quoique par ce moyen l'alkali soit plus caustique, il est cependant bien loin d'être dans l'état de pureté.

L'on sait que l'esprit-de-vin dissout l'alkali caustique, mais l'on n'a observé qu'imparfaitement les propriétés de cette dissolution; j'ai pensé que l'alkali devoit s'y trouver dégagé des autres principes sur lesquels s'étoit exercée son action dissolvante, & de cette idée j'ai été conduit aux observations suivantes.

J'ai préparé une lessive caustique avec du sel de tartre

&

& de la chaux dans un vaisseau de fer, je l'ai filtrée & je l'ai fait évaporer : quand elle a été rapprochée au point de prendre un peu de consistance, je l'ai mêlée avec de l'esprit-de-vin, & j'ai retiré une partie de cette liqueur par la distillation; la cornue étant refroidie, j'ai trouvé au fond, des cristaux bien formés, mêlés à une terre noirâtre, dans un peu de liqueur d'une couleur foncée qui étoit séparée de la teinture d'alkali caustique; celle-ci surnageoit comme une huile.

Les cristaux étoient de l'alkali saturé d'acide crayeux, la terre étoit composée d'une quantité assez considérable de terre calcaire, d'un peu de terre siliceuse & d'un peu de fer.

L'alkali effervescent avoit été séparé, parce que ce sel est insoluble dans l'esprit-de-vin; la liqueur dans laquelle il étoit cristallisé, étoit de l'eau saturée du même sel, & par-là immiscible à l'esprit-de-vin : la terre siliceuse du dépôt étoit fournie par le sel de tartre qui en contient une certaine quantité, lorsqu'il n'a pas été préparé avec des soins particuliers, comme M. Bergman l'a observé; la terre calcaire s'étoit combinée avec l'alkali caustique dans sa préparation, parce qu'aussitôt qu'il est privé d'acide crayeux, il tend fortement à se combiner avec d'autres substances; cette terre est précipitée dans la liqueur aqueuse, sous la forme effervescente, en raison de l'affinité supérieure qu'elle a avec l'acide crayeux, relativement à celle que l'alkali a avec ce même acide. Les parties de fer étoient dûes au vaisseau dans lequel s'étoit faite la préparation : une partie de ce fer s'est trouvée soluble dans l'acide acéteux, mais l'autre partie n'a pu se dissoudre que dans l'acide marin, & étoit par conséquent dans un état de chaux parfaite, je l'ai précipité de ces acides par l'alkali prussien : telles sont les parties étrangères que l'alkali caustique a abandonnées en s'unissant à l'esprit-de-vin. Je vais examiner à présent cette dissolution.

Elle ne faisoit point effervescence avec les acides, & elle ne précipitoit pas l'eau de chaux, mais elle ne résistoit pas à une épreuve plus délicate; elle troubloit la dissolution de

terre peſante par l'acide marin, & elle y formoit un petit précipité efferveſcent, de ſorte qu'elle contenoit encore une petite portion d'acide crayeux : j'en continuai la diſtillation, & je la ſuſpendis, lorſqu'une partie de l'eſprit-de-vin eut paſſé dans le recipient : je trouvai alors la liqueur de la cornue diviſée en deux portions, dont l'une ſurnageoit & avoit l'apparence d'une huile jaune qui demeuroit conſtamment ſéparée, même après une forte agitation ; je ſéparai ces deux portions, la ſupérieure ne donnoit plus aucun indice d'acide crayeux, elle précipitoit à la vérité l'eau de chaux, mais ce précipité ſe rediſſolvoit dans l'eau, ce qui prouve que la chaux avoit été ſéparée de l'eau par l'eſprit-de-vin, & non précipitée en terre calcaire efferveſcente par l'acide crayeux ; & effectivement, en mêlant la diſſolution alkaline avec une certaine quantité d'eau, elle ne précipitoit plus l'eau de chaux ; cette liqueur étendue d'eau diſtillée, ne troubloit plus la diſſolution de terre peſante ; lorſqu'elle étoit pure elle y formoit un précipité, mais il ſe rediſſolvoit entièrement dans l'eau diſtillée, de ſorte que dans cette occaſion c'eſt le ſel de terre peſante qui eſt ſéparé de l'eau qui le tenoit en diſſolution, & non la terre peſante qui eſt précipitée de ſon acide. L'on voit par-là, que l'alkali cauſtique a plus d'affinité avec l'eau que la chaux, & le ſel muriatique de terre peſante.

Je fis évaporer la liqueur dont je viens de parler, dans un petit matras : ſa couleur ſe fonçoit de plus en plus ; j'en arrêtai l'évaporation, dans le deſſein d'examiner les changemens qui y étoient ſurvenus. Le lendemain, je trouvai des criſtaux très-tranſparens mêlés à un peu de liqueur d'un jaune-foncé que j'en ſéparai, je les examinai, & je trouvai que c'étoit l'alkali cauſtique pur qui avoit pris cette forme.

Ces criſtaux prennent différentes figures, ils ſont quelquefois en aiguilles, le plus ordinairement lamelleux ; mais l'on reconnoît dans ceux qui ſont iſolés, qu'ils ſont formés de petites pyramides quadrangulaires implantées les unes ſur les autres ; alors ils reſſemblent aſſez aux criſtaux de ſel ammoniac ; ils ſe réſolvent promptement en liqueur à l'air, ils

ſe diſſolvent facilement dans l'eau & dans l'eſprit-de-vin, on peut, en évaporant ce dernier, les ramener à l'état de criſtaux, ils produiſent du froid en ſe diſſolvant comme ceux des autres ſels.

La liqueur inférieure précipitoit la terre peſante : je l'ai fait évaporer, elle a également criſtalliſé, mais d'une façon moins régulière, & les criſtaux paroiſſoient moins purs; ſi l'on diſtille cette liqueur, c'eſt de l'eau qui paſſe pour la plus grande partie dans le récipient, ſur-tout ſur la fin.

J'ai diſſous les premiers criſtaux d'alkali cauſtique dans l'eſprit-de-vin, la liqueur étoit claire & ſans couleur, je l'ai fait bouillir, elle eſt devenue d'un jaune d'autant plus foncé que l'ébullition a été plus longue, à un certain degré elle reſſembloit entièrement à la liqueur jaune dans laquelle l'alkali cauſtique avoit criſtalliſé; après une longue ébullition, elle n'a pu criſtalliſer, l'ayant évaporé juſque près de la deſſiccation, & y ayant mêlé de l'eau diſtillée, il s'en eſt ſéparé des molécules d'un jaune-brun, & qui ne ſe rediſſolvoient qu'en partie dans l'eſprit-de-vin.

Si l'on diſtille à ſiccité la diſſolution cauſtique qui a l'apparence d'huile, elle devient noirâtre & efferveſcente, mais ſi les criſtaux ſont purs, ils ne prennent ni cette couleur ni la propriété de faire efferveſcence; il eſt vrai cependant que dans cet état l'alkali a tant d'activité, qu'il n'eſt pas poſſible de le priver de la liqueur qu'avoient retenue ſes criſtaux, ſans qu'il attaque la cornue ſi elle eſt de verre, & alors il fait une gelée avec les acides.

L'eſprit-de-vin qu'on diſtille avec l'alkali cauſtique, en entraîne un peu avec lui, & verdit le ſirop violat; il paroît en même temps devenir plus aqueux qu'il n'étoit.

Il réſulte des expériences précédentes, 1.° que lorſqu'on mêle une leſſive cauſtique avec l'eſprit-de-vin, celui-ci s'empare de l'alkali cauſtique, que cette diſſolution retient une partie de l'eau, & par ſon moyen une partie d'alkali efferveſcent, & que l'autre partie de l'eau ſe ſépare & tient en diſſolution la plus grande partie de l'alkali efferveſcent,

ainsi que les sels étrangers qui auroient pu s'y trouver mêlés, pendant que les terres & le fer se précipitent.

2.° Qu'il se fait dans la solution d'alkali caustique, en la concentrant par la distillation, une nouvelle séparation, que la liqueur qui surnage est une solution d'alkali très-pur dans l'esprit-de-vin, & que la liqueur inférieure est un mélange de cette dissolution avec une dissolution aqueuse d'un peu d'alkali effervescent; cependant, si l'on distille la première liqueur, il s'y fait encore une séparation, & il paroît que l'alkali dégage de l'eau de l'esprit-de-vin. Si l'on distille la liqueur inférieure, c'est de l'eau qui passe pour la plus grande partie dans le récipient.

3.° Que l'alkali caustique décompose, par le moyen de la chaleur, l'esprit-de-vin, & qu'il en sépare une partie que j'appelerai *résineuse*, quoique j'en connoisse peu les propriétés; c'est cette partie qui colore la teinture d'alkali caustique, & c'est probablement elle qui a formé les cristaux d'acide saccharin que M. Bergman a retirés, en traitant l'esprit-de-vin avec l'acide nitreux.

4.° Que l'alkali caustique privé d'eau par l'esprit-de-vin, prend une forme cristalline, comme la plupart des autres substances salines. Il est assez difficile d'avoir immédiatement ses cristaux, sans que leur pureté soit ternie par une portion de la résine: on peut les purifier par une nouvelle dissolution dans l'esprit-de-vin, & par une évaporation conduite de manière qu'il reste un peu d'eau-mère; mais pour les expériences, dont une très-petite portion de substance résineuse ne peut troubler la précision, on peut se servir de la liqueur qui a l'apparence d'huile, sans se donner la peine de la faire cristalliser. J'ai manqué assez souvent cette cristallisation, parce qu'elle n'est point annoncée par une pellicule, ni par les autres qualités de la liqueur.

Si l'on varie les circonstances de l'opération, l'on trouve aussi quelques variétés dans les apparences de la dissolution; ainsi, si l'on verse peu d'esprit-de-vin sur la lessive caustique amenée au point de dessiccation, cet esprit-de-vin prend une

couleur plus foncée, & il ne s'y fait de séparation de deux liqueurs qu'au moment où la cristallisation va commencer.

Meyer a observé une partie des phénomènes que je viens de décrire, mais le *causticum pingue* dont cet excellent Observateur étoit préoccupé, l'a empêché de bien voir ce qui se présentoit à lui; il a pris, par exemple, l'alkali saturé d'acide crayeux & cristallisé, pour un nitre imparfait, il a observé la teinture caustique que nous avons vu prendre une apparence d'huile, & il l'a décrite comme une matière épaisse rouge-obscure, qui a l'apparence d'une résine à demi-fluide, qu'il regarde comme formée par la décomposition totale de l'esprit-de-vin.

Une observation intéressante de Meyer, que j'ai vérifiée, c'est que si l'on met des fleurs de soufre dans la teinture alkaline, il s'en dissout promptement une partie considérable sans le secours de la chaleur.

M. Macquer a observé, avec encore plus d'exactitude, les phénomènes que présente l'alkali fixe qu'on traite avec l'esprit-de-vin, & il les a décrits dans un Mémoire imprimé dans le cinquième *Volume des mélanges de la Société de Turin;* après avoir fait bouillir de l'esprit-de-vin sur du sel de tartre fortement desséché, il en a fait évaporer une partie, & il en a obtenu des cristaux dont il décrit la figure, & qui sont précisément des cristaux d'alkali caustique; l'alkali qui s'étoit dissous par l'action de la chaleur, au-dessous de l'esprit-de-vin, s'est coagulé par le refroidissement en une masse blanche saline cristallisée confusément, qu'il a redissout dans l'eau, & dont il a obtenu une cristallisation plus régulière.

Il a fait évaporer une préparation, nommée en Pharmacie, *Teinture de sel de tartre*, & qui n'est qu'une dissolution d'alkali caustique dans l'esprit-de-vin; après que la liqueur a été évaporée à peu-près aux trois quarts, il a observé qu'elle paroissoit un mélange de deux liqueurs très-différentes & très-distinctes; l'une sans couleur, comme de l'eau, & l'autre d'un jaune-foncé qu'il compare à une huile; après l'évaporation totale, il est resté dans la capsule un enduit d'un jaune-brun cristallisé confusément. Mais cet illustre Chimiste explique

tous les faits qu'il avoit obſervés, par une altération & une décompoſition réciproque de l'eſprit-de-vin & de l'alkali fixe.

Des deux criſtaliiſations qu'il a obtenues, l'une étoit la partie cauſtique du ſel de tartre qui s'étoit diſſoute dans l'eſprit-de-vin, & l'autre l'alkali ſaturé d'acide crayeux qui avoit été ſéparé de la partie cauſtique; la première s'eſt faite par le moyen de l'eſprit-de-vin, & la ſeconde par le moyen de l'eau.

J'ai cru qu'on pourroit, par l'eſprit-de-vin, ſe procurer en même temps une teinture cauſtique & de l'alkali ſaturé d'acide crayeux, mais juſqu'à préſent l'expérience ne m'a réuſſi qu'imparfaitement. L'alkali ſur lequel on a fait bouillir de l'eſprit-de-vin, diſſous après cela dans l'eau, criſtalliſe effectivement d'une façon régulière; mais ſes criſtaux expoſés à l'air, tombent en déliqueſcence, parce qu'ils retiennent une portion d'alkali cauſtique dont je n'ai pu les priver, même en les faiſant bouillir une ſeconde fois dans l'eſprit-de-vin *(a)*.

Si c'eſt un moyen de diminuer les incertitudes de la Médecine, que d'employer des agens uniformes & dont on puiſſe apprécier exactement les effets généraux, on pourra faire une application utile des obſervations que je viens de préſenter, en ſubſtituant une teinture cauſtique, dont la force déterminée par un aréomètre, ſeroit conſtante, à la teinture des métaux ou *lilium de Paracelſe*, à la teinture de régule d'antimoine, à celle d'antimoine diaphorétique, à celle de tartre, & à pluſieurs autres préparations pharmaceutiques dont les noms ont ſouvent induit en erreur les Praticiens qui ont cru ſatisfaire par leur moyen à différentes indications: quoique toutes ces teintures ne ſoient, dans la réalité, qu'une diſſolution d'alkali cauſtique par l'eſprit-de-vin, plus ou moins chargée, ſelon le procédé & ſelon les circonſtances inégales

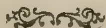
(a) Je n'ai parlé juſqu'à préſent que de l'alkali végétal; j'ai tenté pareillement de faire criſtalliſer, par l'eſprit-de-vin, l'alkali minéral cauſtique, mais cette opération réuſſit beaucoup plus difficilement, la ſéparation des deux liqueurs ne ſe fait que ſur la fin de l'évaporation, celle qui prend l'apparence d'huile eſt proportionnellement en beaucoup plus petite quantité, & je n'en ai obtenu qu'une criſtalliſation confuſe.

de l'opération. Il me paroît qu'on doit attribuer peu d'effets à la résine séparée de l'esprit-de-vin qui colore ces teintures, que M.rs Macquer, Spielman & Meyer ont vue se déposer sur les parois des vaisseaux dans lesquels on conserve la teinture de tartre *(Spiel. & Boehm exam. acid. ping.)*, & à laquelle M. Monnet a attribué toutes les propriétés médicales du *lilium de Paracelse (Journal de Médecine, 1764).*

Il seroit peut-être avantageux de substituer encore la teinture alkaline, rapprochée à un point déterminé, à la pierre à cautère, qui a dissout plus ou moins du creuset, dans lequel on l'a fondue, & qui est plus ou moins effervescente: on pourroit modérer à volonté la causticité très-grande de cette teinture, par différentes proportions d'argile.

J'ai essayé sur d'autres sels déliquescens, le moyen dont je me suis servi pour faire cristalliser l'alkali caustique; & j'ai obtenu facilement la cristallisation de quelques-uns de ces sels: par exemple, j'ai saturé de terre calcaire l'acide nitreux, j'ai fait évaporer jusqu'à siccité, le résidu dissous dans l'esprit-de-vin & évaporé jusqu'au point convenable, m'a donné des cristaux réguliers qui forment une prisme tétraèdre, dont deux faces paroissent divisées par un sillon, & terminé par deux sommets dièdres: le sel muriatique calcaire, traité de même, a cristallisé en aiguilles fines transparentes, & qui paroissent pyramidales, il tombe plus promptement en déliquescence que le nitre calcaire; le sel muriatique de fer donne, par ce moyen, des cristaux jaunes & transparens, ce sont des prismes tétraèdres dont les bases sont inclinées.

Cependant tous les sels déliquescens ne cristallisent pas par ce procédé; ainsi je n'ai pu faire cristalliser la terre foliée de tartre, elle s'est seulement coagulée en formant des couches peu distinctes & qu'on ne peut regarder comme le résultat de la cristallisation. La différence que j'ai établie entre le sel formé avec l'alkali fixe & les acides acéteux & radical, *page 403*, est donc confirmée par cette épreuve: je n'ai pu pareillement obtenir des cristaux de la dissolution muriatique du zinc.



NOUVELLES RÉFLEXIONS

Sur l'augmentation de poids qu'acquièrent, en brûlant, le Soufre & le Phosphore ; & sur la cause à laquelle on doit l'attribuer.

Par M. LAVOISIER.

LORSQU'ON brûle du phosphore dans une quantité d'air vital renfermée par du mercure, il y a pendant la combustion une absorbtion considérable de cet air, & on retrouve dans l'acide phosphorique qui s'est formé, une augmentation de poids fort exactement correspondante à la quantité d'air vital qui a été absorbée.

Si l'air vital qu'on a employé étoit parfaitement pur, la portion qui reste après la combustion est encore à peu-près du même degré de pureté qu'auparavant ; & si on laisse condenser les vapeurs acides qui se sont formées, on peut y brûler une nouvelle quantité de phosphore, & ainsi successivement jusqu'à ce que la totalité de l'air vital ait disparu.

J'ai conclu de ces expériences, dans différens Mémoires imprimés dans les Recueils de 1776, 1777 & 1778, que dans l'acte de la combustion il se combinoit une portion considérable d'air vital avec le phosphore, que ce principe devenoit une partie constituante de l'acide phosphorique, & que c'étoit principalement & peut-être uniquement à lui qu'il devoit sa qualité acide.

M. Bergman, dans une nouvelle édition de son Mémoire sur les Attractions électives, qu'il a inséré dans le troisième volume de ses Opuscules, cite les expériences que je viens de rapporter, mais il combat les conséquences que j'en ai tirées ; il convient bien que le phosphore, ainsi que le soufre & plusieurs autres substances, acquièrent du poids en brûlant ; mais

mais il obſerve en même temps que la chaleur ſpécifique des acides qui ſe ſont formés, eſt plus grande que n'étoit celle du phoſphore, & en général de la ſubſtance brûlée, & c'eſt à cette augmentation de chaleur ſpécifique qu'il attribue l'augmentation de poids qu'on obſerve.

A l'égard de la diminution qui a lieu dans la quantité d'air vital dans lequel s'opère la combuſtion, il l'attribue, avec M. Schéele, à la combinaiſon qui s'eſt faite de l'air vital avec le phlogiſtique pour former la chaleur.

Je ferai d'abord remarquer que M. Bergman, en paroiſſant s'éloigner de mon opinion, ſe trouve cependant forcé de l'adopter en partie. En effet, j'attribue l'augmentation de poids qu'acquiert le phoſphore en brûlant, à l'abſorbtion & à la fixation de l'air vital; M. Bergman au contraire l'attribue à la fixation de la chaleur : or, puiſque dans le ſyſtème de M. Bergman l'air vital eſt un des élémens du principe de la chaleur, mon aſſertion eſt implicitement contenue dans la ſienne. Il n'eſt donc plus queſtion entre nous de diſcuter ſi l'air vital ſe fixe dans les acides pendant leur combuſtion, puiſque nous ſommes d'accord ſur ce point, mais s'il ſe combine auparavant avec le phlogiſtique pour ſe changer en chaleur.

La queſtion ramenée à ce point de ſimplicité, m'a paru ſuſceptible d'être terminée par des expériences déciſives: d'abord, en ſuppoſant même avec M. Bergman, qu'une portion de chaleur ſpécifique ſe fixe dans l'acide phoſphorique pendant la combuſtion du phoſphore, on ne peut ſe diſpenſer de convenir avec M. Schéele, qu'une portion très-conſidérable de cette même chaleur ſe diſſipe & s'échappe à travers les pores des vaiſſeaux : le témoignage des ſens ſuffit ſeul pour établir cette vérité; nous avons d'ailleurs fait voir, M. de la Place & moi, dans un Mémoire lû à l'Académie, & imprimé dans le Recueil de 1780, comment il étoit poſſible de retenir cette chaleur, & d'en meſurer la quantité par le poids de la glace qu'elle peut fondre; nous avons reconnu que celle qui s'échappe d'une once de phoſphore qui brûle,

pouvoit fondre 6 livres 4 onces 0 gros 48 grains de glace.

Mais si l'on admettoit, avec M. Bergman, que la chaleur a une pesanteur appréciable & sensible, comme on est forcé de convenir qu'une partie s'échappe à travers les pores des vaisseaux pendant la combustion, il s'ensuivroit, par une conséquence nécessaire, qu'en opérant une combustion de soufre & de phosphore dans des vaisseaux scellés hermétiquement, on devroit observer une diminution de poids à mesure que la chaleur se dégage & se met en équilibre avec les corps environnans. Si donc l'expérience & l'observation démentent cette conséquence, il faudra en conclure que le principe dont elle a été déduite est faux : c'est cette vérification du principe par la conséquence que j'ai eu en vue dans l'expérience suivante.

J'ai introduit dans un flacon de cristal très-fort, une petite capsule d'agate qui contenoit 6 grains de phosphore ; j'ai bouché très-exactement le vaisseau avec un bouchon de cristal que j'ai ficelé solidement avec du fil de laiton : j'ai pesé le tout avec une grande exactitude, puis j'ai allumé le phosphore par le moyen des rayons du soleil, avec une petite lentille de verre : lorsque la combustion a été finie & que le vaisseau a été refroidi, je l'ai repesé, & j'ai retrouvé très-exactement le même poids qu'auparavant; la balance dont je me suis servi trébuchoit très-sensiblement à un quart de grain.

Je préviens ceux qui pourroient se proposer de répéter cette expérience, qu'elle doit être faite avec beaucoup de précautions, qu'on doit employer un vaisseau très-fort & capable de résister à la dilatation de l'air qui est très-considérable; qu'il faut bien prendre garde qu'il ne s'éclabousse, pendant la combustion, de petits morceaux de phosphore allumé, qui, s'attachant aux parois du vase, le feroient immanquablement casser, & occasionneroient une explosion dangereuse *.

* On prévient une partie de ce danger, en mettant au fond du flacon un peu de sablon très-pur & très-sec, ou de verre pilé.

Quoique d'après cette expérience il parût suffisamment prouvé que la chaleur n'a pas de pesanteur sensible, j'ai bien conçu que pour avoir un résultat plus satisfaisant, il seroit important d'opérer sur des quantités plus considérables. Le premier moyen qui se présentoit, étoit d'employer des vaisseaux plus grands, & de substituer l'air vital à l'air commun; alors j'aurois pu opérer la combustion d'une quantité beaucoup plus grande de phosphore, & avoir un résultat plus sensible: mais d'un autre côté le risque de l'explosion auroit considérablement augmenté, & l'expérience auroit été très-dangereuse: d'ailleurs, en augmentant la grandeur des vaisseaux, leur poids seroit devenu plus grand; j'aurois été obligé de me servir d'une balance moins sensible, & j'aurois perdu d'un côté plus que je n'aurois gagné de l'autre: j'ai donc été obligé d'adopter un autre plan.

Il résulte des expériences faites par M. de la Place & par moi, que la quantité de chaleur qui se dégage de 92 grains de phosphore qui brûle, est capable de faire fondre juste une livre de glace; ainsi la différence de chaleur qui se trouve entre une livre de glace à zéro du thermomètre, & une livre d'eau également à zéro, est égale à celle qui se dégage de 92 grains de phosphore qui brûle; donc par une conséquence nécessaire, si la chaleur avoit une pesanteur appréciable, en enfermant une livre d'eau dans un vaisseau de verre scellé hermétiquement, & en la faisant geler, j'aurois dû obtenir une diminution de poids égale à celle que j'aurois éprouvée en brûlant 92 grains de phosphore.

Pour vérifier ce fait, j'ai pris de petits matras de verre très-minces, dont j'ai tiré le col à la lampe d'émailleur, pour le réduire en un tube très-fin; j'y ai introduit une livre d'eau, puis j'ai fondu avec un chalumeau l'extrémité du tube, pour sceller hermétiquement le vaisseau; j'ai ensuite pesé avec une scrupuleuse exactitude le vase & l'eau qu'il contenoit: je me suis servi à cet effet d'une balance de Meignié, qui, chargée

de 18 à 20 onces, trébuche au dixième de grain. Ce poids bien déterminé, j'ai fait geler l'eau du matras en le plaçant dans un bain de ſel & de glace, puis l'ayant repeſé bien ſec en dehors, j'ai retrouvé exactement le même poids qu'auparavant : ayant refondu & reformé la glace à pluſieurs repriſes, je n'ai pas éprouvé la plus légère différence de poids, ſoit que je la peſaſſe dans l'état d'eau, ſoit que je la peſaſſe dans l'état de glace.

Puiſque d'après l'exactitude de ma balance, je puis répondre des peſées à un dixième de grain près, il en réſulte que la chaleur qui ſe dégage d'une livre d'eau à zéro, lorſqu'elle ſe convertit en glace, ou ce qui eſt la même choſe, que la quantité de chaleur qui ſe dégage de 92 grains de phoſphore qui brûle, ne pèſe pas un dixième de grain, & que par conſéquent la matière de la chaleur peut être conſidérée comme n'ayant pas de peſanteur ſenſible dans les expériences de Chimie.

Il eſt vrai que dans cette expérience on ne pèſe que la quantité de chaleur qui ſe dégage pendant la combuſtion : M. Bergman pourroit donc encore objecter que la chaleur qui ſe dégage eſt infiniment moindre que celle qui ſe fixe, & qu'il n'eſt par conſéquent pas extraordinaire que ſa peſanteur ſoit au-deſſous d'un dixième de grain, tandis que celle qui ſe fixe pèſe beaucoup davantage ; mais cette dernière aſſertion ne cadre pas mieux avec les faits, & c'eſt ce dont on peut s'aſſurer par un calcul fort ſimple.

92 grains de phoſphore acquièrent, en brûlant, une augmentation de poids de 1 gros 62 grains $\frac{1}{6}$, ou de 134 grains $\frac{1}{6}$, en ſuppoſant donc que la peſanteur de la chaleur qui s'échappe ſoit d'un dixième de grain, il faudroit ſuppoſer que celle qui reſte dans l'acide eſt treize cents quarante-deux fois plus conſidérable ; or, nos expériences, celles de M. Crawford, celles de M. Wilke, prouvent que la chaleur qui ſe fixe dans les acides, loin d'être plus forte, eſt au contraire beaucoup moindre que celle qui ſe dégage dans l'acte de la combuſtion.

Concluons de tout ceci, que la quantité de chaleur qui s'échappe de 92 grains de phoſphore qui brûle, quelque conſidérable qu'elle paroiſſe à nos ſens, n'a point de peſanteur ſenſible, ou au moins que cette chaleur ne pèſe pas $\frac{1}{10}$ de grain; que le principe de la chaleur n'eſt pas par conſéquent compoſé, comme le ſuppoſe M. Schéele, & d'après lui M. Bergman, d'air vital & de phlogiſtique, puiſqu'un corps qui pèſe ne peut pas entrer dans la compoſition d'un corps qui ne pèſe pas :

Que l'augmentation très-conſidérable & de près de cent cinquante pour cent que prend le phoſphore en brûlant, & celle qu'acquiert le ſoufre ainſi que pluſieurs autres corps, ne peuvent pas être expliquées par la fixation de la chaleur, à moins qu'on ne parte de ſuppoſitions évidemment fauſſes & démenties par les faits :

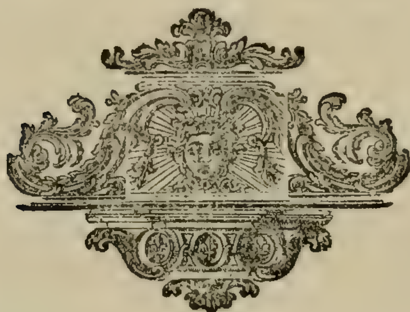
Qu'il faut donc en revenir aux conſéquences que j'ai déduites dès mes premiers Mémoires, & reconnoître que le ſoufre & le phoſphore abſorbent, en brûlant, de l'air vital, ou plutôt qu'ils le décompoſent; qu'ils s'emparent de ſa baſe que j'ai déſignée dans de précédens Mémoires, ſous le nom de *principe oxygine ;* & que la matière de la chaleur qui exiſte en une extrême abondance dans l'air vital, devenue libre par la nouvelle combinaiſon que ſa baſe a ſubie, ſe répand dans tous les corps environnans.

Ces explications ſi ſimples, ſi naturellement liées avec les faits, ſeroient adoptées depuis long-temps, ſi les Chimiſtes préoccupés de l'exiſtence d'un principe phlogiſtique dont on n'a pu donner juſqu'ici que des idées très-confuſes, que chacun définit à ſa manière, ou plutôt que le même Chimiſte définit ſouvent très-différemment, ſuivant la nature des faits qu'il veut expliquer, ſi les Chimiſtes, dis-je, n'avoient fait les plus grands efforts pour accorder la théorie ancienne avec les expériences modernes.

Ce qui s'obſerve au ſurplus dans la combuſtion du ſoufre

& du phoſphore, arrive également dans toutes les combuſtions, mais avec cette différence que dans celles où le réſultat demeure dans l'état de gaz, par exemple dans toutes les combuſtions que je nomme *charbonneuſes*, il faut, pour retrouver l'augmentation de poids qui réſulte de la fixation de l'air, tenir compte du poids de l'air fixe ou acide crayeux qui s'eſt formé, & qui reſte dans l'état gazeux.

J'ai détaillé ailleurs les phénomènes qui accompagnent la combuſtion de l'air inflammable, & de celles en général dont le réſultat eſt de l'eau.



SUITE DU MÉMOIRE

Sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands Nombres.

Par M. DE LA PLACE.

CE Mémoire étant une suite de celui qui a paru sur le même objet, dans le Volume précédent, je conserverai l'ordre des articles & des numéros. J'ai donné dans le premier article, une méthode générale pour réduire en séries très-convergentes, les fonctions différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. Dans le second article, j'ai ramené à ce genre d'intégrales, toutes les fonctions données par des équations linéaires aux différences ordinaires ou partielles, finies & infiniment petites; & je suis ainsi parvenu dans le troisième article, à déterminer les valeurs approchées de plusieurs formules qui se rencontrent fréquemment dans l'analyse, mais dont l'application devient très-pénible, lorsque les nombres dont elles sont fonctions, sont considérables. Il me reste présentement à faire voir l'usage de cette analyse dans la théorie des hasards.

ARTICLE IV.

Application de l'analyse précédente à la théorie des hasards.

XXXII.

TOUS les évènemens, ceux même qui, par leur petitesse & leur irrégularité, semblent ne pas tenir au système général de la Nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du Soleil. Nous les attribuons au hasard, parce que nous ignorons les causes qui les produisent & les loix qui les

enchaînent aux grands phénomènes de l'Univers: ainsi l'apparition & le mouvement des Comètes, que nous savons aujourd'hui dépendre de la même loi qui ramène les saisons, étoient regardés autrefois comme l'effet du hasard, par ceux qui rangeoient ces astres parmi les météores. Le mot *hasard* n'exprime donc que notre ignorance sur les causes des phénomènes que nous voyons arriver & se succéder sans aucun ordre apparent.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connoissances. Nous savons, par exemple, que sur trois, ou un plus grand nombre d'évènemens, un seul doit exister; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il est impossible de prononcer avec certitude sur leur existence. Il nous paroît cependant probable qu'un de ces évènemens, pris à volonté, n'existera pas; parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste donc à réduire tous les évènemens qui peuvent avoir lieu relativement à un objet, dans un certain nombre de cas également possibles, c'est à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence, & à déterminer le nombre des cas favorables à l'évènement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité.

Tous nos jugemens sur les choses qui ne sont que vraisemblables, sont fondés sur un pareil rapport : la différence des données que chaque homme a sur elles, & les erreurs que l'on commet en évaluant ce rapport, donnent naissance à cette foule d'opinions que l'on voit régner sur les mêmes objets : les combinaisons en ce genre sont si délicates, & les illusions si fréquentes, qu'il faut souvent une grande attention pour échapper à l'erreur.

La théorie des hasards offre un grand nombre d'exemples, dans lesquels les résultats de l'analyse sont entièrement contraires

contraires à ceux qui se présentent au premier coup-d'œil, ce qui prouve combien il est utile d'appliquer le calcul aux objets importans de la vie civile; & quand même la possibilité de ces applications obligeroit de faire des hypothèses qui ne seroient qu'approchées, la précision de l'analyse en rendroit toujours les résultats préférables aux raisonnemens vagues que l'on emploie souvent pour traiter ces objets.

La notion précédente de la probabilité, donne une solution fort simple d'une question agitée par quelques Philosophes, & qui consiste à savoir si les évènemens passés influent sur la probabilité des évènemens futurs. Supposons qu'au jeu de *croix & pile*, on ait amené *croix* plus souvent que *pile;* par cela seul nous serons portés à croire que, soit dans la constitution de la pièce, soit dans la manière de la projeter, il existe une cause constante qui favorise le premier de ces évènemens; les coups passés ont alors une influence sur la probabilité des coups futurs: mais si nous sommes assurés que les deux faces de la pièce sont parfaitement semblables, & si d'ailleurs les circonstances de sa projection sont à chaque coup, variées de manière que nous soyons ramenés sans cesse à l'état d'une indécision absolue sur ce qui doit arriver; le passé ne peut avoir aucune influence sur la probabilité de l'avenir, & il seroit évidemment absurde d'en tenir compte.

Lorsque la possibilité des évènemens simples est connue, la probabilité des évènemens composés peut souvent se déterminer par la seule théorie des combinaisons; mais la méthode la plus générale pour y parvenir, consiste à observer la loi des variations qu'elle éprouve par la multiplication des évènemens simples, & à la faire dépendre d'une équation aux différences finies ordinaires ou partielles; l'intégrale de cette équation donnera l'expression analytique de la probabilité cherchée. Si l'évènement est tellement composé que l'usage de cette expression devienne impossible, à cause du grand nombre de ses termes & de ses facteurs; on aura sa valeur approchée par la méthode exposée dans les articles précédens. Nous en verrons un exemple à la fin de ce Mémoire.

Dans un grand nombre de cas, & ce ſont les plus intéreſſans de l'analyſe des haſards, les poſſibilités des évènemens ſimples ſont inconnues, & nous ſommes réduits à chercher dans les évènemens paſſés, quelques indices qui puiſſent nous guider dans nos conjectures ſur l'avenir. Mais de quelle manière ces évènemens nous dévoilent-ils, en ſe développant, leur poſſibilité reſpective? ſuivant quelles loix influent-ils ſur la probabilité des évènemens futurs? ce ſont des queſtions difficiles, dont la ſolution exige des conſidérations métaphyſiques très-délicates & une analyſe épineuſe. La difficulté de les réſoudre ſe fait principalement ſentir lorſqu'il s'agit de conſtater de légères différences par les obſervations; car alors un nombre conſidérable d'évènemens obſervés, peut n'indiquer ces différences qu'avec une très-petite probabilité; & ſi l'on emploie ces évènemens en très-grand nombre, on eſt conduit à des formules dont il eſt impoſſible de faire uſage. Il eſt donc indiſpenſable alors d'avoir un moyen ſimple d'obtenir la loi ſuivant laquelle la probabilité d'un réſultat indiqué par les obſervations, croît avec elles, & le nombre auquel les évènemens obſervés doivent s'élever, pour que ce réſultat acquérant une grande vraiſemblance, on ſoit fondé à rechercher les cauſes qui le produiſent. J'ai donné ailleurs les principes & la méthode néceſſaires pour cet objet, & cette méthode a l'avantage d'être d'autant plus préciſe, que les évènemens obſervés ſont en plus grand nombre: l'analyſe expoſée dans les articles précédens, m'ayant conduit à la généraliſer & à la ſimplifier; je vais la préſenter ici dans un nouveau jour, en donnant des formules très-commodes pour déterminer, d'après l'obſervation de réſultats compoſés d'un grand nombre d'évènemens ſimples, les poſſibilités de ces évènemens, les différences que le temps, le climat, ou d'autres cauſes peuvent y produire, & la probabilité des évènemens futurs.

Pour éclaircir cette méthode par un exemple, je l'appliquerai à quelques problèmes ſur les naiſſances; c'eſt un objet important dans l'hiſtoire naturelle de l'homme, & l'obſervation offre à cet égard des variétés remarquables relativement à la

différence des sexes & des climats: mais elles sont si petites en elles-mêmes, qu'elles ne peuvent devenir sensibles que par un grand nombre de naissances. En comparant celles qui ont été observées dans les grandes villes, je trouve que du nord au midi de l'Europe, elles indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des garçons que dans celles des filles, avec une probabilité si fort approchante de la certitude, qu'il n'existe dans la philosophie naturelle, aucun résultat mieux établi par les observations. Cette supériorité dans la possibilité des naissances des garçons, est donc une loi générale de la Nature, du moins dans la partie du Globe que nous habitons; & si l'on considère qu'elle subsiste malgré la grande variété des climats & des productions, qui a lieu de Naples à Pétersbourg, il paroîtra vraisemblable que cette loi s'étend à la Terre entière.

Un résultat également intéressant, & que les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance, est que la possibilité des naissances des garçons, relativement à celle des naissances des filles, n'est pas par-tout la même. C'est ici sur-tout qu'il importe d'avoir une méthode facile, pour comparer un très-grand nombre de naissances, & pour déterminer la probabilité qui en résulte, que les différences observées ne sont pas dûes au hasard: ces différences sont si peu considérables, qu'il faut souvent plusieurs millions de naissances pour constater qu'elles sont le résultat de causes toujours agissantes, & qu'on doit les distinguer de ces petites variétés que le hasard seul amène dans la succession des évènemens également possibles. Je donne, pour obtenir cette probabilité, des formules très-simples, au moyen desquelles on pourra sur le champ juger de sa grandeur: ces formules appliquées aux naissances observées à Londres & à Paris, donnent une probabilité de plus de quatre cents mille contre un, que la possibilité des naissances des garçons, comparée à celle des naissances des filles, est plus grande dans la première de ces deux villes que dans la seconde; d'où il suit qu'il existe très-probablement à Londres une cause de plus qu'à Paris,

qui rend les naiſſances des garçons ſupérieures à celles des filles. Les naiſſances obſervées dans le royaume de Naples, ſemblent indiquer pareillement dans ce royaume, une plus grande poſſibilité qu'à Paris, dans les naiſſances des garçons; mais quoique la ſomme des naiſſances obſervées dans ces deux endroits, s'élève à plus de deux millions; ce réſultat eſt à peine indiqué avec une probabilité de cent contre un; ainſi pour prononcer irrévocablement ſur cet objet, il faut attendre un plus grand nombre de naiſſances.

XXXIII.

Quelle que ſoit la manière dont deux évènemens ſont liés l'un à l'autre, il eſt clair que la probabilité de leur ſomme eſt égale à la probabilité du premier, multipliée par la probabilité que, celui-ci ayant lieu, le ſecond doit pareillement exiſter; on aura donc cette dernière probabilité, en déterminant *à priori* la probabilité de la ſomme de deux évènemens, & en la diviſant par la probabilité du premier évènement, déterminée *à priori.*

Pour exprimer analytiquement ce réſultat, nommons E & e les deux évènemens; $E + e$ leur ſomme, V la probabilité de E, v celle de $E + e$, & p la probabilité de e, en ſuppoſant que E exiſte; nous aurons, cela poſé,

$$p = \frac{v}{V}.$$

Cette équation fort ſimple eſt la baſe des recherches ſuivantes, & toute la théorie de la probabilité des cauſes & des évènemens futurs, priſe des évènemens paſſés, en découle avec une grande facilité. Voyons d'abord comment elle donne les probabilités reſpectives des différentes cauſes auxquelles on peut attribuer un évènement obſervé.

XXXIV.

SOIT E cet évènement, & ſuppoſons qu'il puiſſe être attribué aux n cauſes e, $e^{(1)}$, $e^{(2)} \ldots e^{(n-1)}$; ſi l'on nomme $p^{(r)}$ la probabilité de la cauſe $e^{(r)}$ priſe de l'évènement E, V

la probabilité de E, & v celle de $E + e^{(r)}$; on aura par le *n.° précédent*,

$$p^{(r)} = \frac{v}{V}.$$

Il faut maintenant déterminer v & V; pour cela nous observerons que la probabilité *à priori* de l'existence de la cause $e^{(r)}$ est $\frac{1}{n}$; en nommant donc a, $a^{(1)}$, $a^{(2)} \ldots a^{(n-1)}$ les probabilités respectives que les causes e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, &c. étant supposées exister, l'évènement E aura lieu; $\frac{a^{(r)}}{n}$ sera la probabilité de $E + e^{(r)}$ déterminée *à priori*, c'est la quantité que nous avons nommée v.

La somme de toutes ces probabilités relatives à chacune de n causes, sera évidemment la probabilité de E, puisque cet évènement ne peut arriver que par une de ces causes; on aura donc

$$V = \frac{1}{n} \cdot [a + a^{(1)} \ldots + a^{(n-1)}];$$

partant

$$p^{(r)} = \frac{a^{(r)}}{a + a^{(1)} + a^{(2)} \ldots \ldots a^{(n-1)}},$$

c'est-à-dire, que l'on aura la probabilité d'une cause, prise de l'évènement, en divisant la probabilité de l'évènement, prise de cette cause, par la somme de toutes les probabilités semblables.

Supposons, par exemple, qu'une urne renferme trois boules qui ne puissent être que blanches ou noires; qu'après en avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, & qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches: il est visible que l'on ne peut faire *à priori* que quatre hypothèses; car les boules seront toutes blanches ou toutes noires, ou deux seront blanches, & une noire, ou deux seront noires, & une blanche. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes différentes e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, de l'évènement observé; les probabilités respectives de cet

évènement, prises de ces causes, seront 1, $(\frac{2}{3})^m$, $(\frac{1}{3})^m$, 0; ce sont les quantités que nous avons nommées a, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$; les probabilités respectives de ces hypothèses, prises de l'évènement, seront donc, par la formule précédente,

$$\frac{3^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{2^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{1}{3^m + 2^m + 1}, \quad 0.$$

On voit au reste qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'évènement, parce que la probabilité de l'évènement, résultante de ces hypothèses, étant nulle, leur omission ne change point la valeur de $p^{(r)}$.

XXXV.

La possibilité de la plupart des évènemens simples est inconnue, & considérée *à priori*, elle nous paroît également susceptible de toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité; mais si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces évènemens, la manière dont ils y entrent, rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres; ainsi à mesure que le résultat observé se compose par le développement des évènemens simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connoître, & il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui se resserrent sans cesse, & finissent par coïncider, lorsque le nombre des évènemens simples est infini. Pour déterminer les loix suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x; la théorie connue des hasards donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x; soit y cette fonction. Si l'on regarde les différentes valeurs de x, comme autant de causes du résultat observé, la probabilité de x sera, par le *n.° 34*, égale à une fraction dont le numérateur est y, & dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y; en multipliant donc les deux termes de cette fraction par ∂x, cette probabilité sera $\frac{y\,\partial x}{\int y\,\partial x}$, l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La probabilité que x eſt compris entre les deux limites $x = \theta$ & $x = \theta'$, eſt par conſéquent égale à $\frac{\int y \partial x}{\int y \partial x}$, l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $x = \theta$ juſqu'à $x = \theta'$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$.

La valeur de x, la plus probable eſt celle qui rend y un *maximum*; nous la déſignerons par a: les valeurs les moins probables ſont celles qui rendent y nul; dans preſque tous les cas, cela arrive aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$; ainſi nous ſuppoſerons y nul à ces limites, & alors chaque valeur de y, aura une valeur correſpondante qui lui ſera égale, de l'autre côté du *maximum*.

Si les valeurs de x, conſidérées indépendamment du réſultat obſervé, ne ſont pas toutes également poſſibles, mais que leur probabilité ſoit exprimée par une fonction z, de x; il ſuffira de changer dans les formules précédentes, y dans yz; ce qui revient à ſuppoſer toutes les valeurs de x également poſſibles, & à conſidérer le réſultat obſervé, comme étant formé de deux réſultats indépendans, dont les probabilités ſont y & z. On peut donc ramener de cette manière tous les cas, à celui où l'on ſuppoſe une égale poſſibilité aux différentes valeurs de x; & par cette raiſon, nous adopterons cette hypothèſe dans les recherches ſuivantes.

XXXVI.

CONSIDÉRONS un réſultat compoſé d'un très-grand nombre d'évènemens ſimples, & ſuppoſons que d'après l'obſervation de ce réſultat, on veuille avoir la probabilité que la poſſibilité x de ces évènemens ne ſurpaſſe pas une quantité quelconque θ, moindre que a; cette probabilité eſt par le *numéro précédent*, égale à la fraction $\frac{\int y \partial x}{\int y \partial x}$, l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \theta$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à

$x = 1$. On aura ces intégrales en séries très-convergentes, par les formules du *n.° 6*. Si l'on fait d'abord $-\frac{y\partial x}{\partial y} = v$, & que l'on désigne par U & J ce que deviennent v & y, lorsqu'on y change x en θ; la formule *(a)* de ce numéro donnera pour l'expression en série, de l'intégrale $\int y\partial x$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$,

$$\int y\partial x = -UJ.[1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{\partial(U\partial U)}{\partial \theta^2} + \&c.]$$

Si l'on nomme ensuite Y, le *maximum* de y, ou ce que devient cette fonction lorsqu'on y change x en a; que l'on fasse

$$\frac{x - a}{\sqrt{(\log. Y - \log. y)}} = u,$$

ces logarithmes étant hyperboliques; & que l'on désigne par U, $\frac{\partial . U^2}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2}$, &c. ce que deviennent u, $\frac{\partial u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 . u^3}{\partial x^2}$, &c. lorsqu'on y change x en a; la formule *(d)* du même numéro donnera pour l'expression en série, de l'intégrale $\int y\partial x$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int y\partial x = Y.\sqrt{(\pi)}.[U + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 . U^3}{1.2.\partial x^2} + \frac{1.3}{2^2}.\frac{\partial^4 U^5}{1.2.3.4.\partial x^4} + \&c.]$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. La probabilité que x est égal ou moindre que θ, sera donc

$$\frac{-UJ.[1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{\partial(U\partial U)}{\partial \theta^2} + \&c.]}{Y.\sqrt{(\pi)}.[U + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} + \frac{1.3}{2^2}.\frac{\partial^4 U^5}{\partial x^4} + \&c.]}; \quad (a')$$

Le numérateur de cette série forme une suite divergente, si θ est très-voisin de a; dans ce cas, on aura l'intégrale $\int y\,\partial x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$, par la formule *(c)* du

du *n.° 6* ; & l'on trouvera pour l'expreſſion en ſérie de cette intégrale,

$$\int y\,\partial x = Y.\left(u + \tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 u^3}{1.2.\partial x^2} + \frac{1.3}{2^2}.\frac{\partial^4 u^5}{\partial x^4} + \&c.\right)$$

$$.\int \partial t.e^{-t^2} - \frac{Ye^{-T^2}}{2}.\left(\frac{\partial.u^2}{\partial x} + T.\frac{\partial^2 u^3}{1.2.\partial x^2} + \&c.\right),$$

l'intégrale relative à t, étant priſe depuis $t = T$ juſqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \text{log.}\ Y - \text{log.}\ y,$$

dans laquelle les logarithmes ſont hyperboliques ; & e, étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. La probabilité que x eſt égal ou moindre que θ, ſera donc alors donnée par cette formule,

$$\frac{\int \partial t.e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{e^{-T^2}.\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + T.\frac{\partial^2 u^3}{1.2.\partial x^2} + \&c.\right)}{2\sqrt{(\pi)}.\left(u + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 u^3}{1.2.\partial x^2} + \&c.\right)}\ ;\ (b')$$

On pourra dans tous les cas, déterminer au moyen des formules (a') & (b'), la probabilité que x eſt égal ou moindre que θ, θ étant plus petit que a.

Si θ ſurpaſſe a, on fera $1 - \theta = \theta'$; $1 - x = x'$, & en nommant y' ce que devient y, on cherchera la probabilité que x' eſt égal ou moindre que θ', par la formule $\frac{\int y'\,\partial x'}{\int y'\,\partial x'}$, dans laquelle l'intégrale du numérateur eſt priſe depuis $x' = 0$ juſqu'à $x' = \theta'$, celle du dénominateur étant priſe depuis $x' = 0$, juſqu'à $x' = 1$. Les formules (a') & (b'), donneront cette probabilité, en changeant y, u, v, θ, en y', u', v', x', θ' ; en la retranchant enſuite de l'unité, on aura la probabilité que x eſt égal ou moindre que θ.

L'intégrale $\int \partial t.e^{-t^2}$ ſe rencontre fréquemment dans cette analyſe, & par cette raiſon, il ſeroit très-utile de

former une table de ſes valeurs depuis $t = \infty$, juſqu'à $t = 0$. Lorſque cette intégrale eſt priſe depuis $t = T$, juſqu'à $t = \infty$, T étant égal ou plus grand que 3, on pourra faire uſage de la formule,

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T} . \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{4T^4} - \frac{1.3.5}{8T^6} + \&c.\right); \quad (c')$$

qui donnera une valeur alternativement plus grande & plus petite que la véritable.

XXXVII.

DÉTERMINONS maintenant la probabilité que la valeur de x, eſt compriſe entre les deux limites $a - \theta$, & $a + \theta'$, qui embraſſent la valeur de a, correſpondante au *maximum* de y. Cette probabilité eſt égale à $\frac{\int y \partial x}{\int y \partial x}$; l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $x = a - \theta$, juſqu'à $x = a + \theta'$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$, juſqu'à $x = 1$.

Suppoſons θ & θ' très-petits & tels que les deux valeurs de y, correſpondantes à $x = a - \theta$, & à $x = a + \theta'$, ſoient égales à une même quantité que nous déſignerons par J; la formule (c) du *n.° 6* donnera à très-peu-près

$$\int y \partial x = Y . u . \int \partial t . e^{-t^2};$$

l'intégrale relative à x, étant priſe depuis $x = a - \theta$, juſqu'à $x = a + \theta'$; & l'intégrale relative à t, étant priſe depuis $t = -\sqrt{(\log. Y - \log. J)}$, juſqu'à $t = \sqrt{(\log. Y - \log. J)}$; la probabilité cherchée ſera donc égale à $\frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}$.

y étant ſuppoſé avoir pour facteurs, des puiſſances très-élevées; les expoſans de ces puiſſances deviennent coéfficiens dans ſon logarithme, en ſorte que ſi l'on déſigne par α, une très-petite fraction, $\log. y$ ſera de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, &

$\sqrt{(\log. Y - \log. J)}$ ſera de l'ordre $\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$; à moins que J ne ſoit très-peu différent de Y.

Suppoſons qu'il en diffère aſſez peu pour que $\sqrt{(\log. Y - \log. J)}$ ſoit égal à $\frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$, λ étant poſitif, & moindre que l'unité; ſi l'on réduit $\log. J$ dans une ſuite ordonnée par rapport aux puiſſances de θ, la fonction $\sqrt{(\log. Y - \log. J)}$ deviendra de cette forme $\frac{\theta . Q}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$; ainſi pour qu'elle ſoit de l'ordre $\frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$, il faut que θ ſoit fort petit de l'ordre $\alpha^{\frac{1 - \lambda}{2}}$; on prouvera la même choſe relativement à θ'. L'intervalle $\theta + \theta'$ compris entre les deux limites $a - \theta$ & $a + \theta'$, ſera donc de l'ordre $\alpha^{\frac{1 - \lambda}{2}}$; il ſera par conſéquent d'autant moindre, que les évènemens ſe multiplieront davantage, en ſorte qu'il deviendra nul, ſi leur nombre eſt infini, & dans ce cas, les deux limites ſe confondront avec la valeur de a, qui répond au *maximum* de y.

Pour avoir la probabilité que la valeur de x eſt compriſe dans ces limites, il faut déterminer l'intégrale $\int \partial t\, e^{-t^2}$ depuis $t = - \frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$ juſqu'à $t = \frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$. Cette intégrale eſt évidemment le double de l'intégrale $\int \partial t . e^{-t^2}$, priſe depuis $t = 0$ juſqu'à $t = \infty$, moins le double de cette

même intégrale prise depuis $t = \frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$ jusqu'à $t = \infty$;

or, on a par le *n.° 4*, $\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi)}$, l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$; on a d'ailleurs, par la formule (c^1) du *numéro précédent*,

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{1}{2} . \alpha^{\frac{\lambda}{2}} . e^{-\frac{1}{\alpha^{\lambda}}} . \left(1 - \frac{\alpha^{\lambda}}{2} + \frac{3 . \alpha^{2\lambda}}{4} - \&c.\right);$$

l'intégrale $\int \partial t . e^{-t^2}$, prise depuis $t = -\frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$ jusqu'à $t = \frac{1}{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}$, sera donc

$$\sqrt{(\pi)} - \alpha^{\frac{\lambda}{2}} . e^{-\frac{1}{\alpha}} + \&c.$$

En la divisant par $\sqrt{(\pi)}$, on aura la probabilité que x est compris entre les limites $a - \theta$ & $a + \theta'$; l'expression de cette probabilité sera par conséquent,

$$1 - \frac{\alpha^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} . e^{-\frac{1}{\alpha^{\lambda}}} + \&c. \quad (\partial')$$

Lorsque $\frac{\ }{\alpha}$ est un grand nombre, cette formule converge rapidement vers l'unité, principalement à cause du facteur $e^{-\frac{1}{\alpha^{\lambda}}}$, qui devient très-petit, lorsque α est une très-petite fraction : de-là résulte ce théorème.

« La probabilité que la possibilité des évènemens simples est comprise entre des limites qui se resserrent de plus en plus, « approche sans cesse de l'unité, de manière que dans la sup- « position d'un nombre infini d'évènemens simples, ces deux « limites venant à se réunir, & la probabilité se confondant « avec la certitude, la véritable possibilité des évènemens « simples est exactement égale à celle qui rend le résultat « observé, le plus probable. »

On voit ainsi comment les évènemens, en se multipliant, nous découvrent leur possibilité respective; mais on doit observer qu'il y a dans cette analyse, deux approximations dont l'une est relative aux limites qui comprennent la valeur de x, & qui se resserrent de plus en plus, & dont l'autre est relative à la probabilité que x se trouve entre ces limites, probabilité qui approche sans cesse de l'unité ou de la certitude. C'est en cela que ces approximations diffèrent des approximations ordinaires, dans lesquelles on est toujours assuré que le résultat est compris dans les limites qu'on lui assigne.

Il importe principalement dans ces recherches, de pouvoir juger sur le champ si un résultat est indiqué par les observations, avec une grande vraisemblance; car il suffit souvent d'être assuré qu'il est très-probable, sans qu'il soit besoin de connoître avec beaucoup de précision la valeur de sa probabilité; en supposant donc qu'il s'agisse de déterminer s'il est très-probable que la possibilité d'un évènement simple, est comprise dans des limites données, on pourra facilement y parvenir par la formule suivante.

On a, par ce qui précède,

$$\log. Y - \log. J = \frac{1}{\alpha^{\lambda}};$$

d'ailleurs, si l'on suppose θ très-petit, on a

$$\log. J = \log. Y + \theta . \frac{\partial . \log. Y}{\partial x} + \frac{\theta^2}{1.2} . \frac{\partial^2 . \log. Y}{\partial x^2} + \&c.$$

mais la condition du *maximum* donne

$$\frac{\partial . \log . Y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 . \log . Y}{\partial x^2} = \frac{\partial\partial Y}{Y \partial x^2};$$

on aura donc

$$- \theta^2 . \frac{\partial\partial Y}{Y \partial x^2} = \frac{1}{\alpha^\lambda};$$

ainſi la probabilité que la poſſibilité x de l'évènement ſimple eſt compriſe entre les limites $a - \theta$ & $a + \theta$, ſera par la formule (∂')

$$1 - \frac{1}{\theta . \sqrt{(-\pi . \frac{\partial\partial Y}{Y\partial x^2})}} . e^{\theta^2 . \frac{\partial\partial Y}{Y\partial x^2}} + \&c.$$

d'où l'on voit que cette probabilité ſera fort grande, ſi $- \theta^2 . \frac{\partial\partial Y}{Y\partial x^2}$ eſt un nombre un peu conſidérable, tel que 11 ou 12; ce qui donne un moyen très-ſimple de juger de la grandeur de cette probabilité.

XXXVIII.

La poſſibilité des évènemens ſimples peut n'être pas la même à différentes époques, ou dans des pays différens; le climat, les productions & mille autres cauſes phyſiques ou morales peuvent y produire des différences qu'un grand nombre d'obſervations rend ſenſibles; mais comme les ſeules combinaiſons du haſard ſuffiſent pour introduire de légères différences dans le réſultat des obſervations, on voit qu'il en faut un très-grand nombre, pour être aſſuré que les différences obſervées, lorſqu'elles ſont très-petites, ſont dûes à des cauſes toujours agiſſantes. Ce problème, un des plus importans de la théorie des haſards, exige une analyſe délicate; en voici une ſolution fort ſimple.

Suppoſons que l'on ait obſervé dans deux lieux différens, deux réſultats compoſés d'un très-grand nombre d'évènemens ſimples du même genre; ſoit x la poſſibilité de l'évènement

ſimple dans le premier lieu; y la fonction de x qui exprime la probabilité du réſultat obſervé dans ce lieu ; a la valeur de x qui répond au *maximum* de y. Soit pareillement x', la poſſibilité de l'évènement ſimple dans le ſecond lieu ; y' la fonction de x' qui exprime la probabilité du réſultat obſervé dans ce lieu, & a' la valeur de x' qui répond au *maximum* de y'; a & a' ſont les poſſibilités des évènemens ſimples, qui rendent les réſultats obſervés les plus probables; & ces quantités ſeroient, par le *numéro précédent*, les vraies poſſibilités des évènemens ſimples, ſi les réſultats obſervés étoient compoſés d'un nombre infini de ces évènemens. Suppoſons a' très-peu différent de a, & qu'il ſoit un peu plus grand; enfin nommons P la probabilité que la poſſibilité de l'évènement ſimple, eſt plus grande dans le premier lieu que dans le ſecond : cela poſé; on aura par des conſidérations analogues à celle du *n.° 35*,

$$P = \frac{\int\int yy' . \partial x . \partial x'}{\int\int yy' . \partial x . \partial x'},$$

les intégrales du numérateur étant priſes depuis $x' = 0$ juſqu'à $x' = x$, & depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant priſes depuis $x' = 0$ juſqu'à $x' = 1$, & depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$.

Pour avoir ces intégrales, nous ſuppoſerons $x' = u\,x$, & nous nommerons z, ce que devient alors xyy'; nous aurons

$$P = \frac{\int\int z \partial x \partial u}{\int\int z \partial x \partial u},$$

les intégrales du numérateur étant priſes depuis $u = 0$ juſqu'à $u = 1$, & depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant priſes depuis $u = 0$ juſqu'à $u = \frac{1}{x}$, & depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Déterminons d'abord les intégrales du numérateur.

Pour cela, nous obſerverons que y étant nul aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$, z eſt pareillement nul à ces deux limites; ſoit donc Z ce que devient cette fonction lorſqu'on

y ſubſtitue pour x ſa valeur en u, donnée par l'équation $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$; on aura à très-peu-près par le *n.° 6*,

$$\int z \partial x = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot Z}{\sqrt{\left(-\frac{\partial\partial Z}{Z \partial x^2}\right)}};$$

partant

$$\int\int z \partial u \cdot \partial x = \sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{Z \cdot \partial u}{\sqrt{\left(-\frac{\partial\partial Z}{Z \partial x^2}\right)}}.$$

L'intégrale relative à u doit être priſe depuis $u = 0$ juſqu'à $u = 1$; mais au *maximum* de la fonction différentielle $yy' \cdot \partial x \partial x'$, on a $x = a$ & $x' = a'$, & par conſéquent $u = \frac{a'}{a}$; la valeur de u, correſpondante à ce *maximum*, excède donc très-peu l'unité; ainſi l'on doit dans ce cas, faire uſage de la formule *(c)* du *n.° 6*. Soit

$$\partial u' = \frac{\partial u}{\sqrt{\left(-\frac{\partial\partial Z}{Z \partial x^2}\right)}},$$

& nommons Z' ce que devient Z au point où l'on a $0 = \left(\frac{\partial Z}{\partial u'}\right)$; nommons enſuite S ce que devient Z lorſqu'on y fait $u = 1$; la formule citée donnera, à fort peu-près,

$$\int Z \partial u' = \frac{Z' \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\partial Z'}{Z' \partial u'^2}\right)}},$$

l'intégrale relative à t étant priſe depuis $t = T$ juſqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \log. Z' - \log. S.$$

L'équation $0 = \left(\frac{\partial Z}{\partial u'}\right)$ peut être miſe ſous cette forme, $0 = \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)$; d'où l'on tire $0 = \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)$, &

$$\left(\frac{\partial\partial Z'}{\partial u'^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z'}{\partial u^2}\right) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} = - \frac{\left(\frac{\partial\partial Z'}{\partial u^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial\partial Z'}{\partial x^2}\right)}{Z'};$$

on aura donc

$$\int Z \partial u' = \frac{Z'}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\partial Z'}{Z' \cdot \partial u^2} \cdot \frac{\partial\partial Z'}{Z' \partial x^2}\right)}} \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2}.$$

Le numérateur de l'expreſſion de P ſera par conſéquent, à très-peu-près égal à

$$\frac{2\sqrt{(\pi)} \cdot Z'}{\sqrt{\left(\frac{\partial\partial Z'}{Z' \partial x^2} \cdot \frac{\partial\partial Z'}{Z' \partial u^2}\right)}} \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2};$$

déterminons maintenant ſon dénominateur.

y' étant nul aux deux limites $x' = 0$ & $x' = 1$, il eſt clair que z eſt nul aux deux limites $u = 0$ & $u = \frac{1}{x}$; il eſt pareillement nul aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$; en nommant donc U ce que devient z, lorſqu'on y ſubſtitue pour u & pour x leurs valeurs données par les équations $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, on aura, par le *n.°* 7,

$$\iint z \partial u . \partial x = \frac{2\pi . U}{\sqrt{\left(\frac{\partial\partial U}{U . \partial u^2} \cdot \frac{\partial\partial U}{U . \partial x^2}\right)}};$$

c'eſt la valeur très-approchée du dénominateur de P. Il eſt aiſé de voir que $Z' = U$, puiſque l'une & l'autre de ces quantités eſt ce que devient z, lorſqu'on y ſubſtitue pour u & x leurs valeurs tirées des équations $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$; la valeur de P ſera par conſéquent donnée par cette formule très-ſimple,

$$P = \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}.$$

Les deux limites entre leſquelles l'intégrale relative à t doit s'étendre, ſont $t = T$ & $t = \infty$, T^2 étant égal à

log. Z' — log. S.. Le *maximum* de z ou de xyy' eſt Z; le *maximum* de y répond à $x = a$; celui de xy répond à une valeur de x, qui n'en diffère que d'une quantité de l'ordre α, & comme au point du *maximum*, les grandeurs ne varient que d'une manière inſenſible, on peut ſuppoſer $x = a$, au *maximum* de xy. Soit Y ce que devient y dans ce cas, le *maximum* de xy ſera aY. Le *maximum* de y' répond à $x' = a'$; ſoit Y' ce que devient alors y', on aura donc $Z' = a \,.\, Y \,.\, Y'$. S eſt le *maximum* de xyy' lorſque $u = 1$, ou, ce qui revient au même, lorſqu'on fait $x' = x$ dans y'; ſoit a'' la valeur de x, qui dans ce cas rend yy' un *maximum*, & nommons Y'' ce *maximum*, on aura $S = a'' \,.\, Y''$; partant

$$T^2 = \log. Y + \log. Y' - \log. Y'' + \log. \frac{a}{a''}.$$

La valeur de a'' eſt moyenne entre a & a'; & puiſque ces deux dernières quantités ſont ſuppoſées très-peu différer entr'elles, on aura à très-peu-près, $\frac{a}{a''} = 1$, & par conſéquent on pourra négliger le terme $\log. \frac{a}{a''}$.

Si T^2 eſt un nombre un peu grand, tel que 11 ou 12; P ſera une très-petite fraction moindre que $\frac{1}{500000}$; il ſera donc très-peu probable que la poſſibilité de l'évènement ſimple eſt plus grande dans le premier lieu que dans le ſecond, ou, ce qui revient au même, il ſera très-probable que dans le ſecond lieu où a' ſurpaſſe a, la poſſibilité des évènemens ſimples eſt plus grande que dans le premier. Les obſervations indiqueront alors avec beaucoup de vraiſemblance, qu'il exiſte dans le ſecond lieu, une cauſe de plus que dans le premier, qui y facilite la production de l'évènement ſimple. L'analyſe ſuivante donnera la loi ſuivant laquelle cette probabilité croît par le développement des évènemens ſimples.

Pour cela, nous obſerverons que a'' étant très-peu différent de a & de a', on aura à fort peu-près,

$$\log. Y'' = \log. Y + \log. Y' + \tfrac{1}{2}(a'' - a)^2 . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \tfrac{1}{2} . (a'' - a')^2 . \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2},$$

ce qui donne

$$T^2 = -\tfrac{1}{2}(a'' - a)^2 . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} - \tfrac{1}{2} . (a'' - a')^2 . \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

mais a'' eſt donné par l'équation

$$0 = \frac{\partial y}{y \partial x} + \frac{\partial y'}{y' \partial x'};$$

x' devant être changé en x dans $\frac{\partial y'}{y' \partial x'}$. Si l'on ſuppoſe enſuite $x = a'' = a + (a'' - a)$, on a

$$\frac{\partial y}{y \partial x} = \frac{\partial Y}{Y \partial x} + (a'' - a) . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2};$$

d'ailleurs on a $0 = \frac{\partial Y}{\partial x}$. On aura donc

$$\frac{\partial y}{y \partial x} = (a'' - a) . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2}:$$

on trouvera pareillement

$$\frac{\partial y'}{y' \partial x'} = (a'' - a') . \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

on aura donc

$$0 = (a'' - a) . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + (a'' - a') . \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

d'où l'on tire

$$a'' = \frac{a . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + a' \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}};$$

on aura ainſi à peu-près

$$T^2 = -\frac{\tfrac{1}{2} . (a' - a)^2 . \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} . \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}}.$$

On pourra facilement juger par cette valeur de T^2, de la probabilité avec laquelle les obſervations indiquent une différence entre les poſſibilités des évènemens ſimples; car cette probabilité étant, par ce qui précède, égale à $1 - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\surd(\pi)}$, l'intégrale étant priſe depuis $t = T$ juſqu'à $t = \infty$; une table des valeurs de cette intégrale depuis $t = \infty$ juſqu'à $t = 0$, donnera ſur le champ la probabilité cherchée, avec une préciſion ſuffiſante.

Les évènemens ſimples, en ſe développant, font croître les valeurs de $\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2}$ & de $\frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}$, & par conſéquent auſſi celle de T^2; ce qui montre clairement la loi qui exiſte entre leur développement & la probabilité des réſultats qu'ils paroiſſent indiquer. La valeur de T^2, fait voir encore que plus les différences entre a & a' ſont petites, plus il faut d'évènemens ſimples obſervés, pour conſtater que ces différences ne ſont pas l'effet du haſard, ce qui d'ailleurs eſt évident *à priori*, & il en réſulte que pour une différence deux fois moindre, il faut environ quatre fois plus d'obſervations.

XXXIX.

APPLIQUONS les formules des *n.*[os] *précédens*, aux naiſſances; pour cela ſuppoſons que ſur $p + q$, naiſſances obſervées, il y ait eu p garçons & q filles, p étant plus grand que q, & cherchons la probabilité que la poſſibilité des naiſſances des garçons ne ſurpaſſe pas une quantité quelconque θ. Il faut dans ce cas faire uſage des formules du *n.*[o] *36*; ſi l'on déſigne par x la poſſibilité des naiſſances des garçons, & que l'on nomme $\mathfrak{C}$ la quantité $\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}$; la probabilité que ſur $p + q$, naiſſances, il y aura p garçons, & q filles ſera $\mathfrak{C} . x^p . (1 - x)^q$, c'eſt la quantité que nous avons nommée y dans le *n.*[o] *cité*; la quantité que nous avons

nommée v deviendra ainsi $\frac{x.(1-x)}{(p+q)x-p}$, & la fonction

$$U.J.[1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \&c.]$$

deviendra

$$\frac{c.\theta^{p+1}.(1-\theta)^{q+1}}{(p+q).\theta-p}.\left\{1 - \frac{[(p+q).\theta^2 + p.(1-2\theta)]}{[(p+q)\theta-p)]^2} + \&c.\right\}$$

Maintenant, la quantité que nous avons nommée u dans le *n.° 36*, est par le *n.° 6* égale à $\sqrt{(-\frac{2Y\partial x^2}{\partial\partial Y})}$, Y & $\partial\partial Y$ étant ce que deviennent y & $\partial\partial y$ lorsque $x = a$; d'ailleurs a étant la valeur de x qui répond au *maximum* de y, il est déterminé par l'équation $0 = \frac{\partial y}{y\partial x}$, d'où l'on tire $a = \frac{p}{p+q}$, & par conséquent

$$Y = \frac{c.p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}, \quad -\frac{\partial\partial Y}{Y.\partial x^2} = \frac{(p+q)^3}{pq};$$

la fonction

$$Y.\sqrt{(\pi)}.(u + \tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 u^3}{1.2.\partial x^2} + \&c.)$$

deviendra donc, en observant qu'elle se réduit à très-peu-près à son premier terme, lorsque p & q sont de grands nombres,

$$\frac{c.p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}.\sqrt{(2\pi)}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}};$$

la formule *(a')* du *numéro cité*, donnera ainsi pour la probabilité que x ne surpasse pas θ,

$$\frac{\theta^{p+1}.(1-\theta)^{q+1}.(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi)}.[p-(p+q).\theta].p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}}.\left\{1 - \frac{[(p+q).\theta^2 + p.(1-2\theta)]}{[p-(p+q).\theta]^2} + \&c.\right\}$$

Si l'on fait $\theta = \frac{1}{2}$, on aura pour la probabilité que x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, ou ce qui revient au même, que la possibilité des naissances des garçons est moindre que celle des naissances des filles,

$$\frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{(p-q) \cdot 2^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\pi)}} \cdot \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \&c.\right]; \quad (e')$$

en retranchant cette formule de l'unité, on aura la probabilité avec laquelle les naiſſances obſervées indiquent une plus grande poſſibilité dans les naiſſances des garçons que dans celles des filles.

Parmi les naiſſances obſervées en Europe, nous conſidérerons celles qui l'ont été à Londres, à Paris, & dans le royaume de Naples.

Dans l'eſpace des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis le commencement de 1664 juſqu'à la fin de 1758, il eſt né à Londres 737629 garçons & 698958 filles, ce qui donne à peu-près $\frac{19}{18}$, pour le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles.

Dans l'eſpace des vingt-ſix années écoulées depuis le commencement de 1745 juſqu'à la fin de 1770, il eſt né à Paris 251527 garçons & 241945 filles, ce qui donne $\frac{26}{25}$ à peu-près, pour le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'eſpace des neuf années écoulées depuis le commencement de 1774 juſqu'à la fin de 1782, il eſt né dans le royaume de Naples, la Sicile non compriſe, 782352 garçons & 746821 filles, ce qui donne $\frac{22}{21}$ à peu-près, pour le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles.

Le moins conſidérable de ces trois nombres de naiſſances, eſt celui des naiſſances obſervées à Paris; d'ailleurs, c'eſt dans cette ville, que les naiſſances des garçons & des filles s'éloignent le moins de l'égalité: par ces deux raiſons, la probabilité que la poſſibilité des naiſſances des garçons ſurpaſſe $\frac{1}{2}$, doit y être moindre qu'à Londres & dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Il eſt néceſſaire pour cela d'avoir juſqu'à douze décimales, les logarithmes tabulaires de p, q, $p+q$ & 2; parce que

ces nombres ſont élevés dans la formule (e') à de grandes puiſſances; or on a

$$\begin{aligned}
\text{Log. } p &= \text{log. } 251527 = 5{,}4005\ 8461\ 0947, \\
\text{Log. } q &= \text{log. } 241945 = 5{,}3837\ 1665\ 1469, \\
\text{Log. } p + q &= \text{log. } 493472 = 5{,}6932\ 6251\ 5480, \\
\text{Log. } 2 &= 0{,}3010\ 2999\ 5664;
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{Log. } \frac{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{(p-q) \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot 2^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\pi)}} = -41{,}9384918.$$

En nommant donc μ, le nombre auquel ce logarithme appartient, & qui eſt exceſſivement petit, puiſqu'il eſt égal à une fraction dont le numérateur étant l'unité, le dénominateur eſt le nombre 8 ſuivi de 41 chiffres, la formule (e') deviendra

$$\mu \cdot [1 - 0{,}0053747 + \&c.]$$

En la retranchant de l'unité, on aura la probabilité qu'à Paris, la poſſibilité des naiſſances des garçons ſurpaſſe celle des naiſſances des filles; d'où l'on voit que cette probabilité diffère ſi peu de l'unité, que l'on peut regarder comme certain, que l'excès des naiſſances des garçons ſur celles des filles, obſervé à Paris, eſt dû à une plus grande poſſibilité dans les naiſſances des garçons.

Si l'on applique pareillement la formule (e') aux naiſſances des garçons obſervées dans les principales villes de l'Europe, on trouvera que la ſupériorité dans les naiſſances des garçons, comparées à celles des filles, obſervée par-tout, depuis Naples juſqu'à Péterſbourg, indique une plus grande poſſibilité dans les naiſſances des garçons, avec une probabilité très-approchante de la certitude. Ce réſultat paroît donc être une loi générale, du moins en Europe; & ſi dans quelques petites villes où l'on n'a obſervé qu'un nombre peu conſidérable de naiſſances, la Nature ſemble s'en écarter, il y a tout lieu de croire que cet écart n'eſt qu'apparent, & qu'à la longue, les naiſſances obſervées dans ces villes, offriroient, en ſe multipliant, un réſultat ſemblable à celui des grandes villes.

Plusieurs philosophes trompés par ces anomalies apparentes, ont cherché les causes de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de semblables recherches, par celle de la probabilité avec laquelle le phénomène dont on veut déterminer la cause, est indiqué par les observations : l'exemple suivant confirmera cette remarque.

Sur 415 naissances observées durant cinq ans dans la petite ville de Viteaux en Bourgogne, il y a eu 203 garçons & 212 filles, ce qui donne à peu-près $\frac{23}{22}$ pour le rapport des naissances des filles à celles des garçons. L'ordre naturel paroît ici renversé, puisque les naissances des filles surpassent celles des garçons: voyons avec quelle probabilité ces observations indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des filles.

p ayant été supposé plus grand que *q*, dans les formules précédentes, il représente dans ce cas le nombre des filles, & *q* celui des garçons; la formule *(e')* donnera la probabilité que les naissances des garçons surpassent celles des filles; mais cette formule étant divergente, il faut employer la formule *(b')* du *n.° 36*, & l'on trouvera, après toutes les réductions, que si l'on y fait $y = 6 . x^p . (1 - x)^q$, & $\theta = \frac{1}{2}$, elle deviendra

$$\frac{\int dt . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} + \frac{(p - q) . e^{T^2}}{3 . \sqrt{[\frac{1}{2}\pi . pq . (p + q)]}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = \infty$, T^2 donné par l'équation

$$T^2 = p . \log. p + q . \log. q - (p + q) . \log. \frac{p + q}{2},$$

dans laquelle les logarithmes sont hyperboliques. Cette formule est l'expression de la probabilité que la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles: si l'on y substitue, au lieu de *p* & de *q*, leurs valeurs précédentes relatives à la ville de Viteaux, on trouvera 0,329802 pour cette probabilité; en la retranchant de l'unité,

la

la différence 0,670198 ſera la probabilité qu'à Viteaux, la poſſibilité des naiſſances des filles eſt ſupérieure à celle des naiſſances des garçons : cette plus grande poſſibilité n'eſt donc indiquée qu'avec une probabilité de deux contre un, ce qui eſt beaucoup trop foible pour balancer l'analogie qui nous porte à penſer qu'à Viteaux, comme dans toutes les villes où l'on a obſervé un nombre conſidérable de naiſſances, la poſſibilité des naiſſances des garçons eſt plus grande que celle des filles.

X L.

On a vu dans le *n.° précédent*, que le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles, eſt environ $\frac{19}{18}$ à Londres, tandis qu'il n'eſt à Paris que $\frac{26}{25}$; cette différence ſemble indiquer dans la première ville, une poſſibilité dans les naiſſances des garçons, plus grande que dans la ſeconde ville : déterminons avec quelle vraiſemblance les obſervations indiquent ce réſultat.

Ce problème eſt un cas particulier de celui que nous avons réſolu dans le *n.° 38*, ainſi nous ferons uſage des formules que nous y avons données; pour cela il faut connoître les quantités que nous avons nommées y & y'. Soit p le nombre des naiſſances des garçons obſervé à Paris, q celui des naiſſances des filles, & x la poſſibilité des naiſſances des garçons dans cette ville; ſi l'on fait $\mathfrak{C} = \frac{1.2.3 \ldots (p+q)}{1.2.3 \ldots p, 1.2.3 \ldots q}$, la probabilité du réſultat obſervé à Paris, ſera $\mathfrak{C}.x^p.(1-x)^q$; c'eſt la quantité y.

Si l'on nomme pareillement p', le nombre des naiſſances des garçons obſervé à Londres; q' celui des naiſſances des filles, & x' la poſſibilité des naiſſances des garçons dans cette ville; ſi l'on fait enſuite

$$\mathfrak{C}' = \frac{1.2.3 \ldots (p'+q')}{1.2.3 \ldots p'.1.2.3 \ldots q'};$$

la probabilité du résultat observé à Londres sera

$$\mathfrak{C}^{\text{I}}.x^{\text{I}\,p^{\text{I}}}(1 - x^{\text{I}})^{q^{\text{I}}};$$

c'est la quantité y^{I}.

En désignant donc par P la probabilité qu'à Paris la possibilité des naissances des garçons est plus grande qu'à Londres, on aura par le *n.° 38*,

$$P = \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}};$$

l'intégrale étant prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$. Voyons ce que devient T, dans le cas présent.

On a par le *n.° cité*,

$$T^2 = \log. Y + \log. Y^{\text{I}} - \log. Y^{\text{II}} + \log. \frac{a}{a^{\text{II}}}.$$

Y est le *maximum* de y, ou de $\mathfrak{C}.x^p.(1 - x)^q$; la valeur de x qui répond à ce *maximum*, est $\frac{p}{p+q}$: c'est la quantité que nous avons nommée a; on aura donc

$$Y = \frac{\mathfrak{C}.p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}};$$

on aura de la même manière,

$$Y^{\text{I}} = \frac{\mathfrak{C}^{\text{I}}.p^{\text{I}\,p^{\text{I}}}.q^{\text{I}\,q^{\text{I}}}}{(p^{\text{I}}+q^{\text{I}})^{p^{\text{I}}+q^{\text{I}}}}.$$

Y^{II} est le *maximum* de $y.y^{\text{I}}$, lorsqu'on fait $x^{\text{I}} = x$, dans y^{I}, ce qui donne

$$y\,y^{\text{I}} = \mathfrak{C}\,\mathfrak{C}^{\text{I}}.x^{p+p^{\text{I}}}.(1 - x)^{q+q^{\text{I}}};$$

la valeur de x correspondante au *maximum* de cette fonction, est $\frac{p+p^{\text{I}}}{p+p^{\text{I}}+q+q^{\text{I}}}$; c'est la quantité que nous avons nommée a^{II}; on aura ainsi

$$Y^{\text{II}} = \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}^{\text{I}}.(p+p^{\text{I}})^{p+p^{\text{I}}}.(q+q^{\text{I}})^{q+q^{\text{I}}}}{(p+p^{\text{I}}+q+q^{\text{I}})^{p+p^{\text{I}}+q+q^{\text{I}}}};$$

ces valeurs donnent

$$T^2 = (p + p^1 + q + q^1 + 1) . \log. (p + p^1 + q + q^1) - (p + p^1 + 1) . \log. (p + p^1) - (q + q^1) . \log. (q + q^1) - (p + 1) . \log. p - q . \log. q + (p + q + 1) . \log. (p + q) - p^1 . \log. p^1 - q^1 . \log. q^1 - (p^1 + q^1) . \log. (p^1 + q^1).$$

Maintenant on a, par le *n.° précédent*,

$$p = 251527;\quad p^1 = 737629;$$
$$q = 241945;\quad q^1 = 698958;$$

d'où l'on tire en logarithmes tabulaires,

$$\log. p = 5{,}4005\ 8461\ 0947;$$
$$\log. q = 5{,}3837\ 1665\ 1469;$$
$$\log. (p + q) = 5{,}6932\ 6251\ 5480;$$
$$\log. p^1 = 5{,}8678\ 3798\ 2735;$$
$$\log. q^1 = 5{,}8444\ 5108\ 0009;$$
$$\log. (p^1 + q^1) = 6{,}1573\ 3193\ 2083;$$
$$\log. (p^1 + p) = 5{,}9952\ 6474\ 1371;$$
$$\log. (q + q^1) = 5{,}9735\ 4485\ 3243;$$
$$\log. (p + p^1 + q + q^1) = 6{,}2855\ 7058\ 5161;$$

En faisant usage de ces logarithmes, on auroit

$$T^2 = 4{,}5357576;$$

mais ces logarithmes étant tabulaires, il faut, comme l'on fait, les multiplier par le nombre 2,3025851, pour les réduire en logarithmes hyperboliques; on aura donc la vraie valeur de T^2, en multipliant la précédente par le même nombre, ce qui donne

$$T^2 = 10{,}4439679.$$

Cela posé, si l'on détermine l'intégrale $\int \partial t . c^{-t^2}$, par la formule (c^1) du *n.° 36*; on aura

$$P = 0{,}0000025422 . [1 - 0{,}047875 + 0{,}0068759 - \&c.]$$

Les trois premiers termes de cette expression donnent

$$P = 0{,}00000243797 = \frac{1}{410178}.$$

Cette valeur de P eſt un peu trop grande ; mais comme en prenant un terme de plus, on auroit une valeur trop petite, ſans l'altérer de $\frac{1}{250}$, on voit qu'elle eſt fort approchée, & qu'ainſi il y a plus de quatre cents mille à parier contre un, qu'il exiſte à Londres, une cauſe de plus qu'à Paris, qui y facilite les naiſſances des garçons.

Le calcul numérique de T^2 ſuppoſe que l'on a les logarithmes tabulaires de p, q, $p + q$, p', q', &c. juſqu'à douze décimales; les Tables de Gardiner, qui ſont celles dont on fait le plus d'uſage, renferment les logarithmes des 1161 premiers nombres, juſqu'à vingt décimales, & l'on peut en conclure les logarithmes des nombres ſupérieurs; mais le calcul que cela ſuppoſe, eſt aſſez long; on peut y ſuppléer fort ſimplement, par la conſidération de l'expreſſion de T^2, & déterminer la valeur de cette quantité, ſans recourir aux logarithmes des nombres ſupérieurs à 1161.

Pour cela, nous la mettrons ſous cette forme

$$\begin{aligned} T^2 = {} & (p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q}\right) \\ & + p' \cdot \log. \frac{p'}{p'+q'} + q' \cdot \log. \left(1 - \frac{p'}{p'+q'}\right) \\ & - (p + p' + 1) \cdot \log. \frac{p+p'}{p+p'+q+q'} \\ & - (q + q') \cdot \log. \left(1 - \frac{q+q'}{p+p+q+q'}\right). \end{aligned}$$

Si l'on fait varier d'une très-petite quantité α, le rapport $\frac{p}{p+q}$ dans la fonction

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q}\right),$$

elle ne changera pas ſenſiblement de valeur; car elle devient alors

$$(p + 1) \cdot \log. \left(\frac{p}{p+q} + \alpha\right) + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q} - \alpha\right);$$

en réduiſant $\log. \left(\frac{p}{p+q} + \alpha\right)$ & $\log. \left(1 - \frac{p}{p+q} - \alpha\right)$

dans des suites ordonnées par rapport aux puissances de α, & en rejetant les quantités de l'ordre α qui ne sont pas multipliées par les grands nombres p & q, elle se réduit à

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q}\right).$$

Cela posé, on cherchera par la méthode des fractions continues, la fraction qui ayant un dénominateur égal ou moindre que 1161, approche le plus de $\frac{p}{p+q}$; la différence de cette fraction & de $\frac{p}{p+q}$ n'étant que de l'ordre α, on pourra employer cette fraction au lieu de $\frac{p}{p+q}$, & comme les Tables donnent avec vingt décimales, les logarithmes de son numérateur & de son dénominateur, ainsi que les logarithmes du numérateur & du dénominateur de la nouvelle fraction que l'on a en retranchant la précédente de l'unité, on aura facilement la valeur tabulaire de

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q}\right).$$

On trouvera de la même manière les valeurs tabulaires des autres parties de l'expression de T^2; on aura ainsi l'expression tabulaire de T^2, & cette expression prise en moins sera le logarithme tabulaire de e^{-T^2}; on aura ensuite la vraie valeur de T^2, en multipliant la précédente, par 2,3025851.

On pourra presque toujours employer sans erreur sensible, la formule du *n.° 38*.

$$T^2 = - \frac{\frac{1}{2}(a^1 - a)^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Y^1}{Y^1 \partial x^{1^2}}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y^1}{Y^1 \partial x^{1^2}}};$$

& comme on a dans ce cas

$$a = \frac{p}{p+q}, \; a^1 = \frac{p^1}{p^1 + q^1}, \; - \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} = \frac{(p+q)^3}{pq}, \; - \frac{\partial^2 Y^1}{Y^1 \partial x^{1^2}} = \frac{(p^1 + q^1)^3}{p^1 q^1},$$

on aura

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p'}{p'+q'} - \frac{p}{p+q}\right)^2 \cdot (p+q)^3 \cdot (p'+q')^3}{2p'q' \cdot (p+q)^3 + 2pq \cdot (p'+q')^3},$$

Si l'on applique cette formule aux naiſſances obſervées à Paris & dans le royaume de Naples, il faudra ſuppoſer

$$p = 251527, \; q = 241945,$$
$$p' = 782352, \; q' = 746821,$$

ce qui donne $T = 2{,}7206$; on trouve alors la probabilité P, que la poſſibilité des naiſſances des garçons à Paris eſt plus grande que dans le royaume de Naples, égale à $\frac{1}{100}$ environ : il eſt donc vraiſemblable qu'il exiſte dans ce Royaume, comme à Londres, une cauſe de plus qu'à Paris, qui y facilite les naiſſances des garçons; mais la probabilité avec laquelle elle eſt indiquée par les obſervations, eſt trop peu conſidérable encore pour prononcer irrévocablement ſur cet objet.

XLI.

CONSIDÉRONS maintenant la probabilité des évènemens futurs, priſe des évènemens paſſés, & ſuppoſons qu'ayant obſervé un réſultat compoſé d'un nombre quelconque d'évènemens ſimples, on veuille déterminer la probabilité d'un réſultat futur compoſé des mêmes évènemens.

Si l'on déſigne par x la poſſibilité des évènemens ſimples, par y la probabilité correſpondante du réſultat obſervé, & par z celle du réſultat futur, y & z étant fonctions de x; ſi l'on nomme enſuite P la probabilité du réſultat futur, priſe du réſultat obſervé; il eſt aiſé de conclure du *n.° 34*,

$$P = \frac{\int yz\partial x}{\int x\partial x},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant priſes depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$.

Cette formule renferme la loi ſuivant laquelle les évènemens paſſés influent ſur la probabilité des évènemens futurs;

examinons cette influence dans quelques cas particuliers. Pour cela ſuppoſons qu'une urne renferme une infinité de boules blanches & noires, & qu'après en avoir tiré une boule blanche, on cherche la probabilité d'amener une boule ſemblable, au tirage ſuivant : ſi l'on nomme x, le rapport des boules blanches de l'urne, au nombre total des boules, il eſt clair que x ſera la probabilité, tant de l'évènement obſervé, que de l'évènement futur; on aura donc

$$P = \frac{\int x^2 . \partial x}{\int x \partial x} = \frac{2}{3},$$

c'eſt-à-dire, qu'il y a deux contre un à parier que l'on amènera au ſecond tirage, une boule ſemblable à celle du premier tirage.

En ſuppoſant toujours que l'on ait amené une boule blanche au premier tirage, ſi l'on cherche la probabilité d'amener enſuite n boules noires ; x ſera la probabilité du réſultat obſervé, & $(1 - x)^n$ celle du réſultat futur; on aura donc alors

$$P = \frac{\int x . (1 - x)^n \partial x}{\int x \partial x} = \frac{2}{(n + 1) . (n + 2)},$$

Si les boules blanches & noires étoient en nombre égal dans l'urne, on auroit $P = \frac{1}{2^n}$; cette valeur de P eſt plus petite que la précédente, lorſque n eſt égal ou plus grand que 4 ; d'où il réſulte, que quoique le premier tirage rende probable que les boules blanches ſont en plus grand nombre que les noires, cependant la probabilité d'amener quatre boules noires dans les quatre tirages ſuivans, eſt plus conſidérable, que ſi l'on ſuppoſoit le nombre des boules noires égal à celui des boules blanches. Ce réſultat qui ſemble paradoxe, tient à ce que la probabilité d'amener n boules noires, eſt égale à la probabilité d'en amener une, multipliée par la probabilité qu'en ayant amené une première, on en amènera une ſeconde, multipliée encore par la probabilité qu'en ayant amené deux, on en amènera une troiſième, & ainſi de ſuite ; & il eſt viſible que ces probabilités partielles

vont toujours en croissant, & finissent par se réduire à l'unité, lorsque n est infini.

XLII.

SUPPOSONS le résultat observé composé d'un très-grand nombre d'évènemens simples; soit a la valeur de x, qui rend y un *maximum*: Y, ce *maximum*; a' la valeur de x qui rend $y z$, un *maximum*; Y' & Z' ce que deviennent alors y & z; on aura à très-peu-près, par le *n.° 6*,

$$\int y \partial x = \frac{Y^{\frac{3}{2}} . \sqrt{(2 \pi)}}{\sqrt{\left(-\frac{\partial \partial Y}{\partial x^2}\right)}};$$

$$\int y z \partial x = \frac{(Y' Z')^{\frac{3}{2}} . \sqrt{(2 \pi)}}{\sqrt{\left[-\frac{\partial \partial (Y' Z')}{\partial x^2}\right]}};$$

l'expression de P du *n.° précédent*, devient donc

$$P = \frac{(Y' Z')^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\left(-\frac{\partial \partial Y}{\partial x^2}\right)}}{Y^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\left[-\frac{\partial \partial (Y' Z')}{\partial x^2}\right]}}.$$

Cette expression sera très-approchée, si le résultat observé est fort composé.

Si ce résultat étoit composé d'une infinité d'évènemens simples, la possibilité de ces évènemens seroit par le *n.° 37*, égale à celle qui rend le résultat observé, le plus probable; on peut donc sans erreur sensible calculer la probabilité d'un résultat futur peu composé, en supposant la possibilité des évènemens simples égale à celle qui rend la probabilité d'un évènement très-composé, un *maximum;* mais cette supposition cesseroit d'être exacte, si le résultat futur étoit lui-même très-composé; voyons jusqu'à quel point on peut en faire usage.

Le résultat observé étant composé d'un très-grand nombre d'évènemens simples, supposons que le résultat futur soit beaucoup

beaucoup moins composé ; l'équation qui donne la valeur de a' correspondante au *maximum* de $y\,z$ est

$$o = \frac{\partial y}{y\,\partial x} + \frac{\partial z}{z\,\partial x};$$

$\frac{\partial y}{y\,\partial x}$ est une quantité très-grande de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, & puisque le résultat futur est très-peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{\partial z}{z\,\partial x}$ sera d'un ordre moindre que nous supposerons égal à $\frac{1}{\alpha^{1-\lambda}}$; ainsi ; a étant la valeur de x, qui satisfait à l'équation $o = \frac{\partial y}{y\,\partial x}$, la différence entre a & a' sera de l'ordre α^{λ}, & l'on pourra supposer

$$a' = a + \alpha^{\lambda}.\mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + \alpha^{\lambda}.\mu.\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\alpha^{2\lambda}.\mu^2}{1.2}.\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \&c;$$

mais on a $\frac{\partial Y}{\partial x} = o$, d'où il est facile de conclure que $\frac{\partial^n Y}{\partial x^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}$; le terme $\frac{\alpha^{n\lambda}.\mu^n}{1.2.3\ldots.n}.\frac{\partial^n Y}{\partial x^n}$ sera par conséquent de l'ordre $\alpha^{n.(\lambda - \frac{1}{2})}$. Ainsi la convergence de l'expression en série de Y' suppose $\lambda > \frac{1}{2}$, & dans ce cas Y' se réduit à peu-près à Y.

Si l'on nomme Z ce que devient z, lorsqu'on y fait $x = a$, on s'assurera de la même manière que Z' se réduit à Z.

Enfin, on prouvera par un raisonnement semblable, que $\frac{\partial\partial (Z'\,Y')}{\partial x^2}$ se réduit à très-peu-près à $Z.\frac{\partial\partial Y}{\partial x^2}$; en substituant ces valeurs dans l'expression de P, on aura

$$P = Z;$$

c'eſt-à-dire, que l'on peut dans ce cas déterminer la probabilité du réſultat futur, en ſuppoſant x égal à la valeur qui rend le réſultat obſervé, le plus probable ; mais il faut pour cela, que le réſultat futur ſoit aſſez peu compoſé, pour que les expoſans des facteurs de z, ſoient d'un ordre moindre que la racine carrée des expoſans des facteurs de y; ſi cela n'eſt pas, la ſuppoſition précédente expoſe à des erreurs ſenſibles.

Si le réſultat futur eſt une fonction du réſultat obſervé; z ſera une fonction de y, que nous repréſenterons par $\varphi(y)$; la valeur de x qui rend yz un *maximum* eſt dans ce cas la même que celle qui répond au *maximum* de y; on aura ainſi $a^1 = a$, & ſi l'on déſigne $\frac{\partial.\varphi(y)}{\partial y}$ par $\varphi^1(y)$, l'expreſſion de P donnera en obſervant que $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$.

$$P = \frac{\varphi(Y)}{\sqrt{\left[1 + Y.\frac{\varphi'(Y)}{\varphi(Y)}\right]}};$$

Soit $\varphi(y) = y^n$, en ſorte que l'évènement futur ſoit n fois la répétition de l'évènement obſervé, on aura

$$P = \frac{Y^n}{\sqrt{(n+1)}}.$$

Cette probabilité déterminée dans la ſuppoſition que la poſſibilité des évènemens ſimples eſt égale à celle qui rend le réſultat obſervé, le plus probable, eſt égale à Y^n; on voit par-là, que les petites erreurs qui réſultent de cette ſuppoſition, s'accumulent en raiſon des évènemens ſimples qui entrent dans le réſultat futur, & deviennent très-ſenſibles, lorſque ces évènemens y ſont en grand nombre.

XLIII.

DEPUIS 1745, où l'on a commencé à diſtinguer à Paris, les naiſſances des garçons de celles des filles, on a conſtamment obſervé que le nombre des premières étoit ſupérieur

à celui des secondes; ce qui peut donner lieu de rechercher combien il est probable que cette supériorité se maintiendra dans l'espace d'un siècle.

Soit p le nombre observé des naissances des garçons à Paris; q celui des filles; $2n$ le nombre annuel des naissances; x la possibilité des naissances des garçons. Le binome $(x + 1 - x)^{2n}$ donne par son développement,

$$x^{2n} + 2n \cdot x^{2n-1} \cdot (1 - x) + \frac{2n \cdot (2n - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{2n-2} \cdot (1 - x)^2 + \&c;$$

& la somme des n premiers termes, sera la probabilité que le nombre des garçons l'emportera, chaque année, sur celui des filles. Nommons z cette somme; z^i sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra durant le nombre i d'années consécutives. Partant si P désigne la vraie probabilité que cela aura lieu, on aura par le *n.° 41*,

$$P = \frac{\int x^p \cdot \partial x \cdot z^i \cdot (1 - x)^q}{\int x^p \cdot \partial x \cdot (1 - x)^q};$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui répond au *maximum* de $x^p \cdot z^i \cdot (1 - x)^q$, & que l'on désigne par Z, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, ce que deviennent z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, lorsqu'on y change x en a; on aura par le *n.° 6*,

$$\int x^p \cdot z^i \cdot \partial x \cdot (1 - x)^q = \frac{a^{p+1} \cdot (1 - a)^{q+1} \cdot Z^i \cdot \sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{\left[p \cdot (1 - a)^2 + q \cdot a^2 + i \cdot a^2 \cdot (1 - a)^2 \cdot \left(\frac{\partial Z^2 - Z \partial\partial Z}{Z^2 \cdot \partial x^2}\right)\right]}}.$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n} \cdot \left[1 + 2n \cdot \frac{1 - x}{x} + \frac{2n \cdot (2n - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 + \&c.\right],$$

on a par le *n.° 21*,

$$z = \frac{\int \frac{u^{n-1} \cdot \partial u}{(1 + u)^{2n+1}}}{\int \frac{u^{-1} \partial u}{(1 + u)^{2n+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $u = \frac{1-x}{x}$ juſqu'à $u = \infty$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $u = 0$ juſqu'à $u = \infty$. ſoit $u = \frac{1-s}{s}$, cette valeur de z deviendra

$$z = \frac{\int s^n . \partial s . (1-s)^{n-1}}{\int s^n . \partial s . (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $s = 0$ juſqu'à $s = x$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $s = 0$ juſqu'à $s = 1$; de-là il eſt aiſé de conclure

$$\frac{\partial z}{z \partial x} = \frac{x^n . (1-x)^{n-1}}{\int s^n \partial s . (1-s)^{n-1}}; \quad \frac{\partial \partial z}{z \partial x^2} = \frac{\partial z}{z \partial x} . \frac{[n-(2n-1)x]}{x . (1-x)},$$

l'intégrale étant priſe depuis $s = 0$ juſqu'à $s = x$. En changeant x en a, on aura les valeurs de Z, $\frac{\partial Z}{Z \partial x}$, $\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x^2}$; toute la difficulté ſe réduit donc à déterminer a.

Sa valeur eſt donnée par l'équation

$$0 = \frac{p}{a} - \frac{q}{1-a} + i . \frac{\partial Z}{Z \partial x};$$

d'où l'on tire, en ſubſtituant au lieu de $\frac{\partial Z}{Z \partial x}$, ſa valeur précédente,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i . a^{n+1} . (1-a)^n}{(p+q) . \int s^n . \partial s . (1-s)^{n-1}};$$

l'intégrale étant priſe depuis $s = 0$ juſqu'à $s = a$; c'eſt l'équation d'après laquelle il faut déterminer a. Pour cela, nous obſerverons que a étant plus grand que $\frac{p}{p+q}$, il ſurpaſſe ſenſiblement la valeur de s, qui répond au *maximum* de $s^n . (1-s)^{n-1}$; ainſi n étant un grand nombre, on pourra ſuppoſer dans l'équation précédente, que l'intégrale eſt priſe depuis $s = 0$ juſqu'à $s = 1$, ce qui donne, par le *n.° 6*,

$$\int s^n . \partial s . (1 - s)^{n-1} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} . (n-1)^{n-} . \sqrt{(2\pi)}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(\pi)}}{2^{2n} . \sqrt{(n)}};$$

l'équation qui détermine a, deviendra ainſi à très-peu-près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i . a^{n+1} . (1-a)^n . 2^{2n} . \sqrt{(n)}}{(p+q) . \sqrt{(\pi)}}.$$

Pour la réſoudre, nous obſerverons que a diffère très-peu de $\frac{p}{p+q}$, en ſorte que ſi l'on ſuppoſe $a = \frac{p}{p+q} + \mu$, μ ſera fort petit, & l'on aura d'une manière très-approchée,

$$\mu = \frac{i . \sqrt{(n)} . 2^{2n} . (\frac{p}{p+q})^{n+1} . (\frac{q}{p+q})^n}{(p+q) . \sqrt{(\pi)}} . e^{-n\mu . \frac{(p+q).(p-q)}{pq}}.$$

Maintenant ſi l'on diviſe par 26, la ſomme des naiſſances obſervées à Paris depuis 1745 juſqu'en 1770; on aura à très-peu-près, 19000, pour le nombre annuel des naiſſances; nous ſuppoſerons ainſi $n = 9500$, $i = 100$; on a d'ailleurs $p = 251527$, $q = 241945$. L'équation précédente deviendra donc

$$\mu = 0{,}000157929 . e^{-\mu . 738{,}144};$$

d'où l'on tire

$$\mu = 0{,}00014222,$$

& par conſéquent

$$a = 0{,}5098509.$$

Le radical

$$\sqrt{[p.(1-a)^2 + qa^2 + i.a^2(1-a)^2 . (\frac{\partial Z^2 - Z\partial\partial Z}{Z^2 \partial x^2})]}$$

devient en ſubſtituant, au lieu de $\frac{\partial\partial Z}{Z \partial x}$ ſa valeur $\frac{\partial Z}{Z . \partial x} . \frac{n-(2n-1).a}{a.(1-a)}$, & au lieu de $\frac{\partial Z}{Z \partial x}$ ſa valeur $\frac{(p+q).a-p}{i.a(1-a)}$ ou $\frac{(p+q).\mu}{i.a(1-a)}$, donnée par l'équation du *maximum*,

$$V\{p.(1-a)^2+qa^2+\mu.(p+q).[\frac{(p+q).\mu}{i}+(2n-1).a-n]\} = 369,419;$$

d'ailleurs on a à très-peu-près

$$a^p(1-a)^q = (\frac{p}{p+q})^p.(\frac{q}{p+q})^q.e^{-\frac{\mu^2.(p+q)^3}{2pq}},$$

&

$$e^{-\frac{\mu^2.(p+q)^3}{2pq}} = 0,980229;$$

on aura donc

$$\int x^p.z^{100}.\partial x(1-x)^q$$

$$= 0,000663199.V(2\pi).(\frac{p}{p+q})^p.(\frac{q}{p+q})^q.Z^{100}.$$

On a ensuite par le *n.*° *6*, en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int x^p\partial x.(1-x)^q$$

$$= \frac{p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}.V(2\pi)}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}} = 0,000711634.V(2\pi).(\frac{p}{p+q})^p.(\frac{q}{p+q})^q;$$

d'où l'on tire

$$P = 0,931938.Z^{100},$$

en sorte qu'il ne s'agit plus que d'avoir Z.

On a

$$Z = \frac{\int s^n.\partial s.(1-s)^{n-1}}{\int s^n.\partial s.(1-s)^{n-1}}.$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$; celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; il est aisé d'en conclure que si l'on fait $1 - s = s'$, on aura

$$Z = 1 - \frac{\int s'^{n-1}.\partial s'.(1-s')^n}{\int s'^{n-1}.\partial s'.(1-s')^n},$$

l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $s' = 0$ juſqu'à $s' = 1 - a$, celle du dénominateur étant priſe depuis $s' = 0$ juſqu'à $s' = 1$. On aura ainſi à fort peu-près par le *n.°* 6,

$$Z = 1 - \frac{\int \partial t . c^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}},$$

l'intégrale relative à t, étant priſe depuis $t = T$ juſqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = (n - 1) . \log. \frac{1}{2.(1 - a)} + n . \log. \frac{1}{2a},$$

ces logarithmes étant hyperboliques. On peut donner à cette expreſſion de T^2, cette forme très-approchée,

$$T^2 = (n - 1) . \log. \frac{p + q}{2q} + n . \log. \frac{p + q}{2p} + \frac{n\mu . (p + q) . (p - q)^2}{pq};$$

& l'on en tirera

$$T^2 = 3{,}66793.$$

Si l'on fait uſage de la formule (c') du *n.°* 37; on aura

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T} . \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0{,}136317 + 0{,}055747 \\ - 0{,}037996 + 0{,}036256 - \&c. \end{array} \right\}$$

Cette ſérie eſt peu convergente; mais elle a l'avantage de donner alternativement une ſomme plus grande & plus petite que la véritable, ſuivant que l'on s'arrête à un nombre de termes pair ou impair; en ajoutant donc à la ſomme des quatre premiers termes, la moitié du cinquième, l'erreur ſera moindre que cette moitié, & par conſéquent au-deſſous de $\frac{1}{50}$ de la ſomme entière; on aura ainſi

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T} . 0{,}899562;$$

ce qui donne

$$Z = 0{,}9966174,$$

& par conſéquent

$$P = 0{,}664;$$

il y a donc à très-peu-près deux contre un à parier que dans l'eſpace d'un ſiècle, les naiſſances des garçons l'emporteront, chaque année, à Paris, ſur celles des filles.

X L I V.

Les recherches précédentes ſuffiſent pour faire voir les avantages de l'analyſe expoſée au commencement de ce Mémoire, dans la partie de la théorie des Haſards, où il s'agit de remonter des évènemens obſervés, à leurs poſſibilités reſpectives, & de déterminer la probabilité des évènemens futurs. Cette analyſe n'eſt pas moins utile dans la ſolution des problèmes où l'on cherche la probabilité d'un réſultat formé d'un grand nombre d'évènemens ſimples, dont les poſſibilités ſont connues : pour en donner un exemple, nous ſuppoſerons que l'on ſe propoſe d'avoir la probabilité que tous les numéros d'une loterie compoſée de n numéros, & dont il en ſort un à chaque tirage, ſeront tous ſortis après le nombre i de tirages.

J'ai donné dans le *tome VI des Mémoires des Savans Étrangers*, la ſolution de ce problème, quel que ſoit le nombre de numéros que l'on amène à chaque tirage, & il en réſulte que dans le cas où il ne ſort à chaque tirage, qu'un ſeul numéro, ſi l'on nomme y_i la probabilité que tous les numéros ſeront ſortis après le nombre i de tirages, on aura

$$y_i = \frac{\Delta^n . s^i}{n^i},$$

le caractériſtique Δ étant celle des différences finies, & s devant être ſuppoſé nul dans le réſultat final. Cette expreſſion fort ſimple en apparence conduiroit à des calculs impraticables, ſi n & i étoient de très-grands nombres ; il ſeroit beaucoup plus difficile encore d'en conclure le nombre i, auquel répond une valeur donnée de y_i ; mais on peut aiſément déterminer ce nombre par les formules du *n.° 27.*

La formule (μ') de ce *n.°* donne à très-peu-près,

$$\Delta^{n}.s^{i} = \frac{(\frac{i}{a})^{i+1}.e^{sa-i}.(e^{a}-1)^{n}}{\sqrt{[\frac{i.(i+1)}{a^{2}} - \frac{ni.e^{a}}{(e^{a}-1)^{2}}]}}.[1 + \frac{15.l^{\mathrm{I}\,2} - 12\,l\,l^{\mathrm{II}}}{16.l^{3}} + \frac{1}{12.i}],$$

a, l, l^{I}, l^{II} étant donnés par les équations ſuivantes :

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n\,e^{a}}{e^{a}-1};$$

$$l = -\frac{(i+1)}{2\,a^{2}} - \frac{n}{2}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1}) + \frac{n}{2}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1})^{2};$$

$$l^{\mathrm{I}} = -\frac{(i+1)}{3\,a^{3}} + \frac{n}{6}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1}) - \frac{n}{2}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1})^{2} + \frac{n}{3}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1})^{3};$$

$$l^{\mathrm{II}} = -\frac{(i+1)}{4\,a^{4}} - \frac{n}{24}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1}) + \frac{7n}{24}.(\frac{e^{a}}{e^{a}+1})^{2} - \frac{n}{2}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1})^{3} + \frac{n}{4}.(\frac{e^{a}}{e^{a}-1})^{4}.$$

Si l'on ſuppoſe $s = 0$ & e^{a}, de l'ordre n ou i; ces équations deviendront

$$a = \frac{i+1}{n}.(1 - e^{-a}),$$

$$l = -\frac{(i+1)}{2\,a^{2}};\ l^{\mathrm{I}} = -\frac{(i+1)}{3\,a^{3}};\ l^{\mathrm{II}} = -\frac{(i+1)}{4\,a^{4}};$$

la formule précédente donnera donc dans ce cas,

$$\frac{\Delta^{n}.s^{i}}{n^{i}} = \frac{(\frac{i}{i+1})^{i+\frac{1}{2}}.e^{na-i}.(1-e^{-a})^{n-i}}{\sqrt{[1 - (\frac{i+1-na}{n})]}};$$

or, on a

$$(\frac{i}{i+1})^{i+\frac{1}{2}} = e^{-1},$$

& ſi l'on fait $e^{-a} = z$, z étant ſuppoſé une très-petite fraction de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$(1 - e^{-a})^{n-i} = e^{(i-n)z}.(1 + \frac{i-n}{2}.z^{2});$$

on a ensuite

$$i + 1 - na = (i + 1) \cdot z.$$

On aura donc à très-peu-près

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i} = e^{-nz} \cdot \left(1 + \frac{i - 2n}{2n} \cdot z + \frac{i - n}{2} \cdot z^2\right) = y_i.$$

Pour déterminer z, nous observerons que l'équation $a = \frac{i+1}{n} \cdot (1 - z)$, donne pour première valeur de a, $a = \frac{i}{n}$; en désignant donc $e^{\frac{-i}{n}}$ par q, nous aurons pour une première valeur de z, $z = q$; cette valeur substituée dans l'expression de a, donne pour seconde valeur de cette quantité, $a = \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} q$; en la substituant dans l'équation $z = e^{-a}$, on aura pour seconde valeur de z,

$$z = q \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{i}{n} q\right),$$

d'où il est aisé de conclure

$$y_i = e^{-nq} \cdot \left(1 + \frac{i}{2n} \cdot q - \frac{i+n}{2} \cdot q^2\right).$$

Cette valeur de y_i sera très-approchée, si n & i étant de forts grands nombres, q est de l'ordre $\frac{1}{n}$; & c'est ce qui aura toujours lieu, lorsque y_i ne sera pas une fraction très-petite, car alors e^{-nq} ne sera pas un très-petit nombre, ce qui suppose q de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Soit $y_i = \frac{1}{2}$, & cherchons le nombre i de tirages auquel cette probabilité correspond. Nous aurons, pour la déterminer, les deux équations suivantes;

$$q - \frac{i}{2n^2} \cdot q + \frac{i+n}{2n} \cdot q^2 = \frac{\log. 2}{n},$$

$$i = -n \cdot \log. q,$$

ces logarithmes étant hyperboliques.

Soit $n = 10000$, on a

$$\text{log. hyperb. } 2 = 0,6931472;$$

la première des deux équations précédentes donne pour première valeur de q, en négligeant les termes $- \frac{i}{2n^2} \cdot q$, & $\frac{i+n}{2n} \cdot q^2$,

$$q = 0,00006931472.$$

Cette valeur étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, on voit que c'est ici le cas d'employer l'expression précédente de y. La seconde équation donne

$$i = 95768,5.$$

Cette valeur peut différer encore de quelques unités de la véritable ; mais en corrigeant la valeur de q, par son moyen, on aura

$$q = 0,00006932250;$$

ce qui donnera pour seconde valeur de i,

$$i = 95767,41;$$

d'où il suit qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront après 95767 tirages, & qu'il y a un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront après 95768 tirages.



SUITE DES RECHERCHES SUR LA STRUCTURE DU CERVEAU.

Par M. VICQ-D'AZYR.

QUATRIÈME MÉMOIRE.

Sur la ſtructure du cerveau des Animaux comparé avec celui de l'Homme.

Lû en 1781.

PARMI les êtres dont l'homme eſt environné, les uns ſemblent partager ſes plaiſirs & ſes peines, éprouver des ſenſations analogues aux ſiennes, obéir aux mêmes beſoins: les autres, inſenſibles à tout ce qui les approche, n'ayant pas même le plus léger ſentiment de leur exiſtence, ſont régis par la force générale qui meut la matière.

Se mouvoir, digérer, ſe nourrir, ſéparer différens ſucs, ſe reproduire, ſont des fonctions que les brutes exercent au moins auſſi-bien que l'homme; mais la ſenſibilité eſt portée, dans ce dernier, à un degré de perfection, dont celle des autres animaux n'eſt pas ſuſceptible.

Il ſemble, au premier coup-d'œil, qu'il ſuffiſe d'examiner les viſcères de l'homme & ceux des brutes, pour y trouver la raiſon de cette différence; mais la ſenſibilité eſt une fonction tellement ſupérieure à toutes les autres, & l'on connoît ſi peu ſes rapports avec l'organe auquel elle appartient, que toutes les recherches anatomiques ont été juſqu'ici inſuffiſantes pour la ſolution de ce problème.

Si les Phyſiciens s'en étoient tenus à leur ignorance, & ſur-tout s'ils avoient eu la bonne foi d'en convenir, il n'y auroit eu aucun reproche à leur faire; mais au défaut de connoiſſances poſitives, ils ont publié de longues & inutiles diſſertations ſur l'ame des bêtes, ſur ſon ſiége, ſur le dépar-

tement de chacune de ſes facultés; & les meilleurs ouvrages ont été infectés de ces erreurs.

Au milieu de ces préjugés, ſi l'on conſulte l'expérience & la raiſon, on eſt forcé d'avouer que tout ce que l'on ſait ſur les fonctions des nerfs & du cerveau, ſe réduit à peu-près aux trois propoſitions ſuivantes.

1.° Le cerveau, le cervelet, la moelle alongée, la moelle épinière & les nerfs, ſont les organes immédiats de la ſenſibilité, qui ne peut exiſter ſans eux.

2.° En même temps que les nerfs ſont les inſtrumens des ſenſations, ils ſont auſſi ceux dont la volonté ſe ſert pour mouvoir les muſcles.

3.° L'action nerveuſe établit entre toutes les parties du corps humain auxquelles elle s'étend, une correſpondance, une ſympathie, qui, réuniſſant tous les efforts des diverſes puiſſances organiques, maintiennent entr'elles une harmonie déterminée par les impreſſions reçues & tranſmiſes dans tout le ſyſtème nerveux. Les ſenſations, le mouvement des muſcles & les ſympathies des viſcères, ſont donc les trois principaux effets de cette influence.

En partant de ces principes bien avoués, nous avons eſſayé de nous élever, non à la connoiſſance du mécaniſme des fonctions intellectuelles, ce que nul Phyſicien n'oſeroit peut-être entreprendre, mais à celle de la diſpoſition qui eſt particulière au cerveau de l'homme, & qui le diſtingue de celui des animaux dans leſquels la ſenſibilité a en général moins d'étendue & d'énergie.

J'ai penſé que, pour faire cette comparaiſon d'une manière utile, il falloit conſidérer d'abord le cerveau de l'homme; c'eſt ce que j'ai fait dans trois Mémoires publiés par l'Académie, parmi ceux de l'année 1781 : j'ai penſé qu'il falloit, après l'avoir décrit, le comparer avec celui des animaux; c'eſt ce que je me propoſe de faire dans ce Mémoire. Je me ſuis borné à l'examen du cerveau d'un certain nombre d'individus pris dans les divers ordres du ſyſtème animal : j'ai cru que, pour être plus clair & pour obtenir des réſultats plus faciles à ſaiſir,

je devois être précis dans mes descriptions. Les détails qui pourroient manquer ici, se trouveront dans les explications ajoutées à ce Mémoire ou dans mon Ouvrage sur le cerveau.

Quadrupèdes. Quoique l'on trouve dans le cerveau des quadrupèdes presque toutes les parties qui se présentent dans celui de l'homme, il y a cependant entre ces deux organes des différences très-remarquables : la principale consiste dans la petitesse des hémisphères cérébraux, à la partie antérieure desquels on ne voit point le sillon de Sylvius, & qui ne sont séparés que par une production falciforme très-étroite. Les tubercules quadrijumeaux, la voûte à trois piliers, l'origine de la corne d'ammon & les corps bordés, ont au contraire un volume plus considérable que dans l'homme. Il existe à peine dans les quadrupèdes quelques traces du prolongement postérieur des ventricules supérieurs. J'ai observé que, dans la plupart de ces animaux, les circonvolutions cérébrales d'un côté ressembloient beaucoup à celles de l'autre, tandis que dans l'homme elles offrent toujours des différences : la glande pinéale est alongée & plus dure ; ses péduncules sont plus exprimés ; le *septum lucidum*, la membrane médullaire qui ferme le troisième ventricule dessus & devant le nerf optique, & celle qui compose la valvule du cerveau, sont très-minces : les prolongemens latéraux de la commissure antérieure se recourbent en devant : les couches optiques (a) adhèrent dans une très-grande étendue, & les éminences mamillaires, presque réunies en une dans les ruminans, sont écartées & placées à peu-près comme celles de l'homme dans les fissipèdes. Dans le lièvre, & en général dans les *glires*, les lobes cérébraux manquent presque tout-à-fait de circonvolutions, & présentent une voûte unie, ce qui diminue beaucoup en eux la surface de ce viscère. Les nerfs olfactifs sont un mélange de substance grise & blanche : leur volume est très-considérable, & ils ont une cavité qui communique, par une ouverture étroite, avec les ventricules latéraux.

(a) Les tubercules antérieurs de ces couches sont à peine remarquables.

L'entonnoir *(b)* eſt très-gros, ainſi que la glande pituitaire; la protubérance annulaire fait moins de ſaillie que dans l'homme, & les éminences pyramidales & olivaires manquent preſque entièrement.

Le cervelet eſt principalement compoſé du *vermis* qui eſt très-renflé, & dont une extrémité s'enfonce dans le quatrième ventricule; les parties latérales de cet organe ſont étroites, on n'y trouve point le corps feſtonné, & la tache noire n'exiſte point dans les jambes cérébrales: je crois devoir principalement inſiſter ſur la groſſeur des nerfs, qui eſt exceſſive; ainſi d'une part, dans l'homme, le volume du cerveau eſt plus grand & fournit moins, tandis que de l'autre, dans les quadrupèdes, les nerfs ſont plus volumineux & correſpondent à une plus petite maſſe de ſubſtance blanche.

La perfection de la ſenſibilité ne paroît pas tenir aux tubercules quadrijumeaux, ni à la voûte à trois piliers, ni aux couches optiques, ni aux corps bordés, ni aux corps ſtriés, ni à la glande pinéale, ni à l'entonnoir, ni à la glande pituitaire, puiſque pluſieurs de ces parties ſont plus conſidérables dans les quadrupèdes que dans l'homme: les caractères propres à ce dernier ſont donc, le grand volume des hémiſphères, l'étendue des parties latérales du cervelet, le développement du pont-de-varole, l'exiſtence des éminences olivaires & pyramidales, celle des corps feſtonnés ou rhomboïdaux, & la groſſeur de la maſſe du cerveau, relativement aux nerfs qui en ſortent.

Le cerveau des oiſeaux eſt fait ſur un autre plan que celui de l'homme & des quadrupèdes; il eſt compoſé de quatre tubercules pairs & de deux impairs; des premiers qui ſont les plus élevés, ſortent les nerfs de la première paire ou olfactifs; ces tubercules ſont compoſés de ſubſtance cendrée, entre-coupée vers le bas par quelques ſtries blanches; Oiſeaux.

(b) La cavité du pavillon de l'entonnoir ſe prolonge beaucoup plus que dans l'homme.

ils n'ont point de circonvolutions, leur paroi interne eſt recouverte par une lame médullaire qui en eſt ſéparée, dans une partie de leur étendue, par une cavité fort étroite analogue aux ventricules latéraux: ces deux tubercules ſont réunis par deux commiſſures, dont la poſtérieure touche au cervelet, & entre leſquelles eſt le pavillon de l'entonnoir: les deux tubercules inférieurs donnent naiſſance à un bouton d'où ſortent les nerfs optiques; ces tubercules ſont poſés ſur deux lignes divergentes en arrière, dans l'intervalle deſquelles ſe trouvent la protubérance annulaire & le cervelet: les tubercules optiques ſont creux, & leur cavité s'ouvre, ainſi que celle des ventricules latéraux, ſur les côtés du quatrième ventricule.

On ſait que le ſens de la vue eſt le plus développé dans les oiſeaux, dont le volume de l'œil égale preſque celui du cerveau: le ſens de l'odorat eſt au contraire le plus étendu dans les quadrupèdes; & par une analogie remarquable, les couches optiques des uns & les nerfs olfactifs des autres ſont également excavés.

Le cervelet des oiſeaux eſt étroit & long, il eſt entièrement formé de pluſieurs petits bourelets parallèles & horizontaux, de ſorte qu'on peut le regarder comme répondant ſeulement au proceſſus vermiforme; deux petits renflemens ſe voient ſur les côtés, ſes ramifications ſont ſimples, & tout au plus doubles dans quelques-unes de leurs terminaiſons: entre le cervelet & les lobes antérieurs il y a une petite production molle, de forme ovale & de couleur griſe; la protubérance annulaire eſt large & peu arrondie, l'entonnoir la ſépare du bouton optique, & il n'y a dans la moelle alongée ni éminences olivaires ni corps pyramidaux: j'ai trouvé dans la baſe du cerveau, des oiſeaux les neuf paires de nerfs.

La huitième paire a des ramifications très-nombreuſes, elle fournit des branches au cœur, au poumon & à l'eſtomac; & elle communique avec des *plexus* ſitués derrière le poumon le long de l'épine, & avec ceux du ventre. La cinquième

paire

paire eſt très-étendue; & la quatrième naît, comme dans l'homme, près du cervelet.

D'après cette deſcription du cerveau des oiſeaux, il eſt évident que la Nature leur a refuſé les grands hémiſphères & les circonvolutions, le corps calleux, la voûte à trois piliers, les cornes d'ammon, les corps bordés, le *tænia ſemi-circularis,* les tubercules quadrijumeaux, la glande pinéale, les parties latérales du cervelet, les éminences mamillaires, les corps olivaires, les corps pyramidaux; & que les organes qu'elle leur a conſervés ſont diſpoſés dans un ordre différent de celui qui nous étoit connu *(c).*

Parmi les oiſeaux de diverſes familles dont j'ai examiné le cerveau, aucun ne m'a préſenté des variétés remarquables, & qui s'écartaſſent aſſez de la deſcription que j'ai faite, pour mériter une attention particulière. Il n'en eſt pas de même des poiſſons; on trouve difficilement dans leurs différentes claſſes, deux cerveaux ſemblables. En général, le cerveau des poiſſons eſt compoſé de pluſieurs tubercules dont les antérieurs qui offrent, dans quelques-uns, des inciſions ou petites circonvolutions, ſont deſtinés à fournir les nerfs olfactifs. Des moyens qui ſont creux, ſortent en devant & en deſſous, les nerfs optiques; le tubercule poſtérieur qui eſt toujours fort petit, tient lieu de cervelet; ce dernier, diviſé, n'offre qu'une ou deux ſtries blanches. Une ou pluſieurs éminences placées dans les ventricules optiques, correſpondent aux tubercules quadrijumeaux. Le quatrième ventricule communique avec ceux des couches ou corps optiques; l'entonnoir ſe trouve dans la baſe, & ſon pavillon tient lieu de troiſième ventricule; les éminences mamillaires ſont très-groſſes. Les neuf paires de nerfs peuvent être démontrées dans la baſe du cerveau; & tout cet appareil excède à peine le volume d'un des yeux de l'animal. La huitième paire ſe diſtribue aux ouïes & au cœur. Poiſſons.

(c) Il ſuit de-là, que les parties ci-deſſus énoncées ne ſont pas abſolument néceſſaires pour les ſenſations & le mouvement des muſcles, puiſqu'il exiſte un ſyſtème dans lequel ces fonctions ſe ſont très-bien ſans elles.

Dans les poiſſons anguilliformes, tels que le congre, il y a ſept tubercules, dont ſix pairs, & un impair qui eſt le cervelet, entre lequel & la moelle alongée, on découvre un prolongement tranſverſal de ſubſtance cendrée. Le quatrième ventricule communique avec les tubercules du troiſième ordre, placés devant le cervelet; & entre ceux du ſecond il y a une commiſſure.

Dans le cabillaud, on trouve cinq tubercules, deux olfactifs, deux optiques & le cervelet; les nerfs optiques ſe croiſent; le cervelet fendu n'offre qu'une ſeule ſtrie blanche, placée au milieu de la ſubſtance corticale; ſtructure qui eſt commune à tous les poiſſons; & derrière le cervelet eſt un prolongement tranſverſal de ſubſtance griſe, comme dans l'ordre précédent.

Dans les épineux arrondis & dans les épineux plats, la ſtructure eſt à peu-près la même que dans les poiſſons à nageoires molles, ſi ce n'eſt que pluſieurs ont les quatre tubercules quadrijumeaux, comme le brochet.

Les nerfs optiques ſe croiſent dans les poiſſons épineux, & dans pluſieurs de ceux à nageoires molles. Dans le turbot, ces nerfs ſont de longueur inégale; ils ſont très-durs, & composés de filamens ſerrés & nombreux; &, ce qu'il y a de remarquable, c'eſt que l'aire de ces deux nerfs coupés, ſurpaſſe celle du tubercule bulbeux d'où ils ſortent, & égale preſque celle de tout le cerveau.

La deſcription du cerveau des poiſſons avoit déjà été publiée par le célèbre M. Camper; les obſervations que j'ai faites ſur des poiſſons différens de ceux qu'il a diſſéqués, ſont d'accord avec les ſiennes; il n'y a qu'un ſeul point dans lequel je ne ſuis point du même avis que cet illuſtre Anatomiſte. Je ne penſe pas avec lui, que l'on doive regarder comme un corps calleux la jonction ſupérieure des tubercules optiques, ni comme des ventricules latéraux, les cavités de ces mêmes tubercules; & je me fonde, 1.° ſur ce que la réunion ſupérieure des couches optiques des poiſſons, ſe borne à ces corps & n'intéreſſe point le reſte du cerveau; 2.° ſur ce que,

dans les oiſeaux, ces mêmes corps ont des cavités, quoiqu'il y ait des ventricules latéraux.

Le cerveau des poiſſons eſt donc principalement compoſé des tubercules olfactifs & des optiques; le reſte de ce viſcère qui eſt très-rétréci, devant ſuffire aux autres fonctions nerveuſes, il eſt facile de ſentir combien elles ſont bornées.

On a pu s'apercevoir que le cerveau des poiſſons eſt, comme celui des oiſeaux, formé de tubercules différemment groupés. La ſtructure de cet organe eſt à peu-près la même dans les amphibies & dans les reptiles, où il eſt encore moins volumineux. Dans la vipère & dans la grenouille, il eſt compoſé de deux tubercules olfactifs, de deux optiques, d'un cervelet d'une petiteſſe exceſſive & qui ne forme preſque qu'un point; dans la vipère, une protubérance, placée devant le cervelet, tient lieu des tubercules quadrijumeaux. Le quatrième ventricule communique avec les ventricules optiques; l'entonnoir & les nerfs ſont diſpoſés à peu-près comme dans les poiſſons. On trouvera dans les planches ci-jointes, une repréſentation aſſez exacte de ces divers cerveaux qui n'ont été examinés par aucun Anatomiſte. Reptiles.

Dans les inſectes & dans les vers, le cerveau eſt compoſé ſeulement de quelques petits lobes ſans cervelet; ils ſont placés ſur l'œſophage, ou même au-deſſus de l'eſtomac, & pluſieurs muſcles ſont deſtinés à les mouvoir. Les nerfs optiques, pour s'accommoder à ce déplacement, ſont diſpoſés en ſpire, la moelle épinière eſt formée dans ſon principe de deux cordons parallèles & écartés l'un de l'autre, & chacun de ces cordons eſt compoſé de tumeurs ganglio-formes, d'où ſortent des nerfs qui en ſont eux-mêmes dépourvus. J'ai fait voir que dans l'homme *(d)*, la moelle épinière peut être également diviſée en deux parties latérales très-diſtinctes. Inſectes & Vers.

Pour donner une idée des conſéquences qui peuvent être déduites de mes obſervations, j'en ferai l'application ſuivante.

Ne pourroit-on pas dire, par exemple, qu'en ſupprimant

(d) Volume de l'Académie pour l'année 1781.

dans le cerveau de l'homme les grands hémiſphères, le corps calleux, le *ſeptum lucidum*, la voûte à trois piliers, les cornes d'ammon & leurs annexes, la glande pinéale & ſes péduncules; en compoſant le cervelet d'une ou deux ſtries fort courtes, en plaçant ſur deux lignes parallèles dirigées de devant en arrière les corps ſtriés très-rétrécis, les couches optiques creuſées d'une cavité & réunies par leur partie ſupérieure; en aplatiſſant la protubérance annulaire, & en réduiſant toute cette maſſe à un très-petit volume, le ſyſtème nerveux de l'homme, ſeroit alors le même que celui des poiſſons ou des amphibies: de même, en plaçant en-deſſus les corps ſtriés, & en les renflant plus que dans les poiſſons; en portant les couches optiques en-deſſous, en les écartant & en les excavant, toutes les parties dont il a été queſtion, reſtant d'ailleurs ſupprimées, le cerveau de l'homme reſſembleroit à celui des oiſeaux. Enfin, avec d'autres changemens plus faciles à déterminer, il ſeroit conformé comme celui des quadrupèdes.

Pour donner plus de poids à ces applications, il eſt important de remarquer qu'en conſidérant les organes nerveux dans toute l'étendue de la chaîne, depuis l'homme juſqu'aux reptiles, on aperçoit toujours les traces du même ſyſtème qui va toujours en décroiſſant, les brutes ne préſentant aucune partie dont l'homme ne ſoit pourvu, & celui-ci en ayant pluſieurs qui leur manquent.

A ces réflexions ſur l'anatomie du cerveau, j'en ajouterai quelques-unes ſur la ſenſibilité en général. Il me ſemble que l'on peut diſtinguer dans l'enchaînement des différentes parties qui conſtituent le ſyſtème nerveux, trois actions différentes: j'appelle la première *action* ou *communication nerveuſe externe;* la ſeconde, *réaction nerveuſe;* la troiſième, *action* ou *communication nerveuſe interne.* La première s'étend de la circonférence vers le centre; elle ſe paſſe dans les organes des ſens & dans les nerfs qui communiquent leurs impreſſions au *ſenſorium commune;* la ſeconde s'exerce dans le *ſenſorium commune* lui-même, & ſe tranſmet aux nerfs qui en ſortent; la troiſième ſe propage, par leur moyen, ſoit juſqu'aux

mufcles, pour leur faire reffentir l'aiguillon de la volonté, foit jufqu'aux vifcères, pour les faire participer au ton général du fyftème, ou pour en recevoir des modifications que leurs différens états déterminent: en forte que l'action nerveufe qui s'étend, pour l'ordinaire, des organes des fens vers le *fenforium commune*, & de-là vers les mufcles & les vifcères, dans certaines circonftances, remonte de cette extrémité de la chaîne vers la première. C'eft toujours en fuivant des lignes droites & non interrompues, que les impreffions des fens fe portent au cerveau, & que la réaction nerveufe fe dirige vers les mufcles. Dans ces deux cas, le mouvement des cordons n'eft point arrêté par des ganglions ou des plexus qui font au contraire très-nombreux le long des nerfs fympatiques des vifcères, & qui, s'ils ne les dérobent pas tout-à-fait à l'action nerveufe, fuffifent au moins pour les fouftraire à l'empire de la volonté dont l'influence s'égare & fe perd en quelque forte dans ces entrelacemens, & aux caprices de laquelle il étoit important que des fonctions auffi effentielles ne fuffent pas foumifes.

Cette diftinction étant bien entendue, il fera facile de faire connoître en quoi les nerfs & le cerveau de l'homme l'emportent fur ceux de la brute. Les cordons nerveux qui établiffent les communications internes & externes, font difpofés à peu-près de la même manière dans l'un & dans l'autre. Ils font tous placés entre deux pulpes nerveufes, foit entre celle des organes des fens & celle du *fenforium commune*, comme les cordons deftinés aux fenfations, c'eft-à-dire, à l'action ou communication nerveufe externe; foit entre cette dernière & celle qui eft répandue dans le tiffu des mufcles ou des vifcères, comme les cordons qui fervent aux communications nerveufes internes. Cette dernière pulpe devant être à peu-près femblable dans l'homme & dans les animaux, il nous refte à rechercher la principale raifon de leurs différences dans la ftructure des organes des fens & dans celle de la maffe cérébrale.

Sous le premier rapport, on fent combien l'homme a

d'avantage par la délicateſſe & l'étendue du toucher: ſes doigts ſont un inſtrument d'adreſſe & de ſenſibilité: il n'y a pas dans toute la ſurface de ſon corps un point où cette fonction ne s'exerce, tandis que preſque toutes les parties externes des animaux ſont encroûtées & endurcies.

Sous le ſecond rapport, ſa prééminence eſt encore plus marquée: dans pluſieurs claſſes d'animaux, les nerſs correſpondent ſeulement à quelques éminences cérébrales pulpeuſes qui ſont interpoſées entre les cordons deſtinés aux actions nerveuſes externes & internes, & ces tubercules déterminent d'une manière qui nous eſt inconnue, la réaction néceſſaire pour les beſoins phyſiques; les viſcères en reçoivent la vie, & les muſcles, le mouvement: ils ſuffiſent donc à ce genre d'exiſtence. Si l'homme étoit réduit aux mêmes organes, il en recevroit les mêmes ſervices: non-ſeulement la Nature ne les lui a pas refuſés, mais elle lui en a encore accordé pluſieurs autres qui forment une maſſe excédante, dont l'uſage eſt ſans doute de concourir à la perfection des fonctions intellectuelles: c'eſt-là que les images ſe peignent avec plus d'étendue & ſe combinent avec plus de fécondité. Dans la brute, les ſenſations concentrées & liées avec un certain ordre de mouvemens, ne peuvent offrir qu'un petit nombre de variétés; dans l'homme, l'action qu'elles excitent, en même temps qu'elle détermine des contractions muſculaires ou ſympathiques dont le mécaniſme eſt le même dans les animaux, ſe réfléchit en quelque ſorte dans la maſſe pulpeuſe qui lui eſt particulière, & s'y modifie avec des nuances dont le nombre croît & ſe multiplie dans une progreſſion très-rapide, en raiſon des organes ſur-ajoutés.

Il y a donc dans le cerveau de l'homme une partie automatique qui en forme principalement la baſe, & au-deſſus des tubercules qui la conſtituent, eſt une région plus élevée & deſtinée à des uſages plus importans, comme il y a dans ſon ame un degré de perfection d'où naît ſa ſupériorité, rapprochement que je m'étois propoſé d'établir & de prouver par l'obſervation.

CERVEAU DES QUADRUPÈDES.

Explication des Planches.

PLANCHE I.re

CETTE Planche repréſente le cerveau & le cervelet du cheval, vu en deſſus, après avoir enlevé la dure-mère. L'artiſte a deſſiné avec la plus grande exactitude & en grandeur naturelle toutes les circonvolutions, telles qu'elles ſe ſont offertes à lui.

10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13. Coupe horizontale des os du crâne, qui ſont très-épais en 11, 12 & 13.

31, 27, 32, 22, 32, 27, 31. Le cerveau.

1, 1, 1. Séparation longitudinale des deux hémiſphères du cerveau; la faulx qui s'y enfonce eſt réticulaire & peu étendue, ſon tiſſu laiſſe des vides très-conſidérables, environnés de mailles ligamenteuſes.

On diſtingue deux ordres de circonvolutions, dont les unes ſont à-peu-près ſemblables & ſe répondent ſymétriquement de chaque côté, tandis que les autres diffèrent. C'eſt ainſi que celles marquées 13, 13, 17, 17, 15, 15, 27, 27, 20, 20, 21, 21, 22, 22, offrent une grande reſſemblance dans leur volume & dans leurs contours: les circonvolutions 27, 27, &c. 31, 31, 32, 32, &c. n'ont au contraire aucune analogie entr'elles; c'eſt ſur-tout le long du bord interne de chaque hémiſphère, c'eſt-à-dire, le long du ſinus longitudinal ſupérieur, que cette reſſemblance eſt la plus marquée.

33, 33, 33. Région poſtérieure du cerveau & ſupérieure du cervelet où s'enfonce la dure-mère pour former la tente qui y devient facilement oſſeuſe & qu'il eſt difficile d'en extraire.

29, 30, 24, 24, 30, 26, 29. Le cervelet.

22. Portion antérieure du *vermis*, dont le reſte eſt caché par les hémiſphères cérébraux.

3. Renflement moyen & ſupérieur du *vermis*.

4, 5, 6. Trois diviſions, renflemens ou lobules formant en arrière la continuation du *vermis*, & dont l'un 4 ſe porte à droite; c'eſt au-deſſous des lobules 5, 6, & dans le milieu, que commence le *vermis*.

7, 7. Lobule, ou renflement ſupérieur du cervelet, qui, vers 28, 28, ſe diviſe en deux autres petits lobules.

23, 23. Petits renflemens du cervelet placés en arrière, au-deſſous des précédens.

24, 24. Lobules, ou renflemens poſtérieurs du cervelet, dont on ne voit qu'une partie.

25, 25, 29, 29, 30, 30. Trois petits lobules du cervelet groupés de chaque côté; on en voit un de plus en 26, parce que l'os étoit plus coupé de ce côté-là que de l'autre.

PLANCHE II.

Figure première. Cette Figure repréſente le cerveau du mouton en grandeur naturelle, vu en deſſus après en avoir détaché la dure-mère. L'artiſte en a deſſiné tous les contours avec la plus rigoureuſe exactitude.

18, 18, 18, 18, 19, 19. Le cerveau.

21, 21, 21. Bords internes des deux hémiſphères; la dure-mère s'y enfonce très peu; &, à proprement parler, il n'y a point de faulx dans le mouton.

Les circonvolutions du cerveau du mouton, conſidérées de chaque côté, ſe correſpondent avec beaucoup plus d'exactitude que dans le cheval; elles ſont ici preſque ſymétriques, & les cerveaux de ces animaux ſe reſſemblent beaucoup entr'eux.

Les circonvolutions 5, 5, 5, 5, ſont dans tous, une ſaillie marquée à droite & à gauche, & les contours poſtérieurs 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, ſe portent obliquement en arrière en divergeant, & à-peu-près ſous le même angle. En devant, les circonvolutions 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, ont entr'elles des rapports preſque conſtans: celles qui ſont vers la circonférence & que j'ai marquées 11, 11, 12, 12, 13, 13, 20, 20, quoiqu'elles diffèrent plus les unes des autres que les premières, ſe reſſemblent cependant encore beaucoup.

14, 20, 19, 17, 19, 20. Le cervelet.

14. Portion antérieure du *vermis*, dont le reſte eſt caché par les hémiſphères cérébraux.

15. Portion moyenne & ſupérieure du *vermis*.

16. Circonvolutions du *vermis*, ou partie moyenne du cervelet qui s'arrondit & ſe courbe un peu à droite.

17. Portion de cette même circonvolution, qui s'arrondit en arrière & qui ſe porte un peu à gauche.

18, 18. Boſſes latérales & ſupérieures du cervelet, qui, dans quelques-uns, forment un ſecond lobule en bas.

19, 19, 20, 20. Ces chiffres déſignent de chaque côté un petit lobule du cervelet: il y en a encore un ou deux en devant qui ſont cachés par la partie poſtérieure des lobes du cerveau.

Figure 2.me Elle montre le cerveau & le cervelet du veau en deſſus, & en grandeur naturelle: on a deſſiné toutes les circonvolutions avec le plus grand ſoin.

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. Le cerveau.

2, 2, 2. Les bords internes des hémiſphères entre leſquels la dure-mère s'enfonce plus que dans le mouton.

Ici, comme dans le cerveau du cheval & du mouton, on trouve, tout le long des bords internes des hémiſphères, des circonvolutions dont la direction eſt longitudinale & à peu-près parallèle en devant, oblique & divergeante en arrière, & qui, vers le milieu de leur trajet en 5, 5, font, comme dans le mouton en 5, 5, une ſaillie plus ou moins forte.

3, 3, 3, 3. Circonvolutions antérieures & moyennes; elles ſont longitudinales & aſſez ſemblables de deux côtés.

4, 4, 4, 4. Circonvolutions cérébrales antérieures & latérales; on y trouve encore des rapports entr'elles.

5, 5. Saillie que font pour l'ordinaire les circonvolutions vers le milieu du bord interne des hémiſphères.

6, 7, 8, 9, 6, 7, 8, 9. Circonvolutions poſtérieures & moyennes; elles divergent & ont à peu-près la même forme à droite & à gauche.

10, 10. Circonvolutions latérales qui préſentent encore quelque analogie: les autres diffèrent, & en général les circonvolutions des deux hémiſphères du cerveau du mouton, ſont celles qui ſe reſſemblent le plus parfaitement.

On ſe ſouviendra que les circonvolutions du cerveau de l'homme offrent toujours des différences, non-ſeulement dans les individus que l'on compare, mais encore dans chacun des côtés d'un même individu.

11, 15, 17, 14, 17, 15. Le cervelet.

11. Le *vermis* ſupérieur caché par les hémiſphères cérébraux poſtérieurs.

12. Éminence ou ſaillie du *vermis*, qui ſe dirige à gauche.

13. Saillie ou renflement poſtérieur du *vermis*, qui ſe dirige vers la droite.

14. Portions inférieure & poſtérieure du *vermis*.

15, 15, 15, 15. Saillies ou renflemens latéraux du cervelet, vu en deſſus & en arrière.

16, 16, 16. *Figure 3.* Bourrelets latéraux du cervelet, que l'on ne voit point dans la *figure 2*.

Figure 3. Cette figure montre le cervelet du veau, obſervé ſur un autre individu que le précédent & avec plus d'étendue. Voyez les lettres qui, dans l'explication de la *figure 2*, ſont déſignées pour le cervelet.

Figure 4. Cette figure repréſente les couches optiques du veau à découvert, & les arcades médullaires de la glande pinéale.

a a. Tubercules quadrijumeaux ſupérieurs, ou *nates*.

l l. Partie poſtérieure des couches optiques.

m m. Partie antérieure des mêmes couches.

k k k k. Régions latérales des couches optiques.

h h. Union de ces couches ; elle eſt très-ferme & très-étendue ; ſupérieurement, elle diviſe le ventricule en deux cavités qui communiquent au-deſſous de cette jonction.

g. Écartement poſtérieur des couches optiques ; région dans laquelle ces couches ne ſont point réunies.

i i i. Péduncules de la glande pinéale, ils ſont compoſés de ſubſtance blanche.

b f f. Glande pinéale coupée longitudinalement & dans ſon milieu ; elle eſt formée de ſubſtance griſe, en général aſſez molle & ſemi-tranſparente.

c c, d d, e e, f f. Arcades très-déliées & diſpoſées très-élégamment dans la glande pinéale ; ces arcades ſont médullaires, & paroiſſent être fournies par les péduncules de la glande pinéale, dans laquelle ils ſe diſtribuent à la manière des nerfs.

PLANCHE III.

Figure 1.re Elle repréſente une portion du cerveau du veau, vu en deſſus.

a. La dure-mère repliée près de la tente du cervelet.

b b. Circonvolutions cérébrales poſtérieures.

c. Traces ou reſtes du corps calleux.

d d. Cornes d'ammon ; elles ſont très-volumineuſes, elles naiſſent vers les côtés & au-deſſous de la voûte à trois piliers, & on y obſerve des filets parallèles & dont la direction eſt longitudinale.

e e. Corpora fimbriata ; ils ſont fibreux & auſſi très-larges.

f f. La voûte à trois piliers.

h. Les piliers antérieurs de la voûte.

i i. Les corps ſtriés.

n n. Subſtance corticale placée au-devant des corps ſtriés.

p. Nerf olfactif droit, repréſenté après avoir été gonflé d'air introduit dans les ſinus.

s. Cavité ou ventricule du nerf olfactif ; car ces nerfs ſont creux dans les grands quadrupèdes, commes les anciens Anatomiſtes l'ont écrit.

t. Communication étroite du ſinus, ou ventricule des nerfs olfactifs avec les ſinus latéraux.

r r. Région dans laquelle le nerf olfactif ſe change en pulpe, & pénètre dans l'intérieur du nez.

Figure 2. Cette figure repréſente une portion du cerveau du mouton, vu en deſſus & en arrière.

a a. La partie poſtérieure des couches optiques.

b b. Péduncules de la glande pinéale : on peut voir, par l'inſpection de cette figure, combien ils ſont volumineux.

d d. Filets blancs qui s'enfoncent dans la glande pinéale.

c. Glande pinéale.

e e. Tubercules quadrijumeaux ſupérieurs.

f f. Portion des tubercules quadrijumeaux inférieurs; ces quatre éminences ſont très-groſſes dans les quadrupèdes.

h. Strie blanche tranſverſale placée en manière de commiſſure, au-deſſous des tubercules quadrijumeaux inférieurs.

i. Place qu'occupoit la lame médullaire, improprement appelée la *valvule du cerveau*.

k k Le quatrième ventricule.

g g. Le tronc de l'*arbre de vie*, ou tige principale des ramifications du cervelet.

l l. Circonférence du cervelet.

Diſſection du Cerveau du Mouton.

J'AI remarqué que les circonvolutions d'un côté reſſembloient preſque parfaitement à celles de l'autre. Les hémiſphères du cerveau en devant & près du lieu d'où ſortent les nerfs de la première paire, ſont recouverts par une expanſion très-légère de couleur brune & noirâtre, diſpoſée en manière de réſeau, qui maſque les circonvolutions.

La faulx eſt très-peu profonde, fort étroite ; elle exiſte à peine, & dans l'adoſſement des hémiſphères ſont des circonvolutions, très-rapprochées & adhérentes.

Le raphé eſt très-marqué ſur le corps calleux, ce corps eſt très-étroit & très-blanc, & on y voit des ſtries tranſverſales.

Le *ſeptum lucidum* eſt très-mince & médullaire, avec beaucoup de ſoin & de précaution, j'y ai diſtingué deux lames.

La membrane qui tient lieu de valvule de *Vieuſſens*, eſt ſi ténue que je n'y ai preſque rien aperçu de medullaire; il en eſt de même de celle qui eſt placée au-devant du nerf optique dans la baſe du cerveau.

Les ventricules latéraux ont un petit prolongement en devant ; c'eſt au bas de ce prolongement que ſe trouve la petite ouverture qui communique avec la cavité du nerf olfactif.

La voûte à trois piliers est très-élégamment formée; en la soulevant & en la renversant en arrière, on aperçoit dans sa face inférieure & postérieure un raphé & quelques reliefs longitudinaux & obliques, formant ce qu'on appelle la lyre; un peu plus loin, & toujours en dessous, on trouve deux gros reliefs ou tubercules, un de chaque côté, qui sont soutenus par les couches optiques & desquels naît l'hypocampe, & sur-tout la partie grise de cette production.

La corne d'ammon est très-grosse dans son principe; coupée, elle présente de petites lames ou spires blanches, comme dans l'homme.

Les ventricules latéraux n'ont point de prolongement postérieur ou ergot.

Le corps bordé est très-considérable.

La glande pinéale est très-volumineuse, dure & surmontée de plusieurs petites bosses, comme une pomme de pin.

Les péduncules de la glande pinéale sont très-gros, blancs, & ils recouvrent, en s'aplatissant, une partie de la couche optique; quelques-unes des fibres blanches des péduncules s'implantent dans la glande pinéale, & au-dessous du petit cordon transversal qu'ils forment en se réunissant, on trouve l'ouverture d'une petite cavité ou cul-de-sac, qui s'étend dans la base de la glande, &, dans quelques sujets, s'enfonce assez profondément.

Au lieu d'une seule commissure postérieure, il y a plusieurs petits cordons placés les uns au-dessus des autres, dont les inférieurs sont les moins étendus.

Le *tænia semi-circularis* est très-marqué, sur-tout en devant.

La commissure des couches optiques est très-grande, & ces dernières adhèrent par une surface très-étendue.

Le petit tubercule antérieur & supérieur des couches optiques est peu marqué dans le mouton.

La commissure antérieure est assez considérable, j'ai recherché si elle se prolongeoit sur les côtes; elle s'étend dans les corps cannelés, & elle forme un cordon assez court qui suit la direction des autres stries & se contourne en devant.

Les tubercules quadrijumeaux ſupérieurs ſont très-gros, leur enveloppe eſt griſe; les inférieurs ſont beaucoup moins volumineux, & blancs à l'extérieur.

La quatrième paire naît par trois ou quatre filets au-deſſous de ces derniers tubercules & de la partie la plus élevée des colonnes blanches qui forment les bords de la valvule de Vieuſſens.

Ces colonnes ſont très-exprimées.

Sur les côtés, les parties latérales du cervelet, qui ſont étroites, compoſent, par la réunion de leur ſubſtance blanche de chaque côté, un *tractus* ou relief fort conſidérable, qui ſuit la direction des jambes du cervelet, & qui en forme une partie.

J'ai cherché inutilement le corps rhomboïdal du cervelet.

J'ai remarqué que le *proceſſus* vermiforme compoſe la plus grande partie du cervelet, & qu'en deſſous il fait dans la cavité du quatrième ventricule une ſaillie très-marquée, en manière de mamelon, qui eſt l'extrémité de ce *proceſſus* lui-même, placé dans ſon origine au-deſſus de la valvule de Vieuſſens.

Les *plexus* choroïdes du cervelet ſont très-gros.

Les nerfs optiques ſont très-rapprochés dans l'endroit où ils ſe dirigent vers les orbites.

Les troiſième, quatrième, cinquième & ſixième paires, n'ont rien de remarquable.

Les éminences mamillaires, réunies & confondues dans leurs baſes, m'ont préſenté dans ce ſujet deux petits arrondiſſemens, très-rapprochés l'un de l'autre.

La tige pituitaire, quand on la coupe, offre une cavité remarquable dans ſa baſe, qui a quelquefois beaucoup de conſiſtance.

La cinquième paire eſt très-groſſe; & la petite portion antérieure de ce nerf, dont la direction eſt différente dans l'homme, eſt très-marquée dans le mouton.

J'ai recherché quelle étoit la ſtructure des nerfs olfactifs j'y ai trouvé une cavité remarquable, blanche à l'intérieur,

& griſe à l'extérieur : j'ai ouvert ce ventricule, j'ai diviſé ſa paroi inferieure avec beaucoup de précaution : cette diſſection m'a conduit à une ouverture peu conſidérable, qui communiquoit avec les ventricules latéraux : ayant ſoufflé de l'air par cette ouverture, ce fluide a ſorti par la tige pituitaire & par le quatrième ventricule, au-deſſus de la moelle alongée, & il eſt démontré par-là, que la cavité des ventricules communique avec celle des nerfs olfactifs.

La ſixième paire naît des deux ſaillies longitudinales qui tiennent lieu de corps pyramidaux, par trois ou quatre filets très-diſtincts.

La diſſection m'a fait voir que les *tractus* des corps pyramidaux paſſent auſſi, comme dans l'homme, au travers de la protubérance annulaire, mais d'une manière beaucoup moins marquée.

Je n'ai point trouvé dans les jambes du cerveau, près de la protubérance annulaire, la tache noire que j'ai remarquée dans l'homme.

La protubérance annulaire eſt peu conſidérable ; on aperçoit à peine quelques traces des corps olivaires, & dans cette région il n'y a point de corps rhomboïdaux; quelques fibres tranſverſales s'y font apercevoir.

Diſſection du Cerveau du Veau & du Cheval.

DANS le veau, comme dans le cheval, & dans les quadrupèdes en général, la dure-mère eſt beaucoup plus blanche & ſes vaiſſeaux ſont beaucoup moins apparens que dans l'homme.

Parmi les circonvolutions cérébrales, il y en a pluſieurs qui ſe reſſemblent d'un côté à l'autre, moins cependant que dans le mouton.

Le ſillon de Sylvius, eſt en général très-peu marqué dans le veau & dans les quadrupèdes.

Vers la partie poſtérieure du cerveau, la ſubſtance corticale s'enfonce très-profondément dans ce viſcère.

Le corps calleux eſt très-étroit.

Les prolongemens poſtérieurs des ventricules latéraux n'exiſtent point, ou au moins l'on n'en trouve que l'ébauche.

Le *ſeptum lucidum* eſt blanchâtre, & il a un peu plus d'épaiſſeur que dans le mouton.

Dans le veau, comme dans le mouton, dans le cheval & dans les autres grands quadrupèdes que j'ai diſſéqués, la voute à trois piliers a beaucoup de conſiſtance; elle eſt très-blanche, & elle a beaucoup d'épaiſſeur, même dans ſes piliers antérieurs. Il eſt ſur-tout important de remarquer que dans ces animaux, les couches optiques ſont ſupérieurement tout-à-fait recouvertes par la voûte à trois piliers, de ſorte qu'on ne les aperçoit point dans la cavité des ventricules latéraux.

Le *plexus* choroïde eſt très-exprimé dans le veau & dans le cheval, comme dans le mouton; on y diſtingue ſur ſon bord interne, des veines qui communiquent avec celles de Galien; on ſuit facilement ces *plexus* juſqu'à la partie antérieure, où, ſur les côtés des piliers de la voûte, on trouve la communication du troiſième ventricule avec les deux latéraux. Là, chaque *plexus* choroïde ſe recourbe & paroît très-volumineux dans le troiſième ventricule, où ces *plexus* ſont ſitués ſur deux lignes parallèles; dans tous ces animaux, les *plexus* choroïdes du quatrième ventricule ſont très-conſidérables. La maſſe de leur cerveau étant beaucoup moindre que celle de l'homme, il eſt étonnant que ces réſeaux vaſculaires y ſoient plus grands. En général, comme ces ſortes de cerveaux ſont preſque toujours en très-bon état lorſqu'on les diſsèque, il eſt facile d'y diſtinguer les veines & les artères dont les plexus vaſculaires y ſont compoſés.

Lorſqu'après avoir coupé les piliers antérieurs de la voûte, on les ſoulève en la rejetant en arrière, on eſt étonné de voir dans ſa face inférieure de chaque côté, un gros tubercule qui eſt immédiatement appliqué ſur la couche optique correſpondante, de laquelle on le détache facilement par le moyen de la diſſection: ce tubercule eſt l'origine de la corne d'ammon. C'eſt de-là, que naît ſur-tout ſa partie corticale que Tarin a bien décrite dans l'homme; pour en prendre une

bonne idée, il faut ouvrir les ventricules par la baſe du cerveau, alors on voit bien les hypocampes entiers, leur naiſſance, & comment les corps bordés les accompagnent & ſe joignent à eux.

Ces derniers, appelés auſſi *corpora fimbriata*, ſont très-larges dans le veau & dans le cheval, auxquels les détails précédens doivent s'appliquer également, ainſi qu'au mouton.

Le *tænia ſemi-circularis* exiſte dans ces animaux, mais il n'eſt pas à beaucoup près auſſi fibreux que dans l'homme.

Le troiſième ventricule du veau & du cheval diffère auſſi beaucoup de celui de l'homme; les couches optiques adhèrent dans une très-grande étendue, d'où il réſulte 1.° une rigole en deſſus qu'occupent les *plexus* choroïdes du troiſième ventricule & les veines de Galien, & que recouvre la partie moyenne de la voûte; 2.° un canal en deſſous, qui du pavillon de l'entonnoir s'étend juſqu'au conduit étroit placé ſous les tubercules quadrijumeaux; 3.° en devant & derrière les piliers de la voûte, une cavité qui répond à celle de l'*infundibulum* ou entonnoir; 4.° une autre excavation perpendiculaire comme la précédente, & qui eſt placée devant les tubercules quadrijumeaux. C'eſt l'adoſſement des couches optiques qui ſépare l'une de l'autre ces deux cavités que l'on voit communiquer en-deſſous; on conçoit que dans l'état naturel, elles ont très-peu d'étendue, mais la diſſection les démontre facilement.

Les tubercules antérieurs & ſupérieurs des couches optiques exiſtent à peine; la face ſupérieure de ces couches eſt légèrement excavée pour recevoir le renflement qui ſe trouve ſous la voûte à trois piliers, & que nous avons dit être l'origine de la corne d'ammon; origine qui dans l'homme eſt placée plus en arrière & y fait peu de ſaillie; dans le veau, la glande pinéale eſt alongée; dans le cheval, elle eſt plus arrondie. Ses péduncules ſont très-conſidérables dans ces animaux; pluſieurs filets blancs pénètrent dans l'intérieur de cette glande, & une membrane médullaire eſt repliée à ſa baſe, en une manière d'entonnoir.

La

La commiſſure antérieure eſt volumineuſe, on peut la ſuivre ſur le côté ; elle ſe prolonge en ſe recourbant vers la partie antérieure des corps ſtriés, & elle ſe termine dans la ſubſtance blanche qui compoſe en partie le nerf olfactif.

La commiſſure poſtérieure eſt formée de pluſieurs paquets de fibres, dont la direction eſt tranſverſale.

J'ai ſuivi, comme dans l'homme, les piliers antérieurs de la voûte juſqu'aux éminences mamillaires, qui dans ces animaux ſont réunies de manière cependant à faire apercevoir deux ſaillies vers leur extrémité inférieure.

Les tubercules quadrijumeaux ſont formés comme dans le mouton ; au-deſſous de ces tubercules eſt une ſtrie blanche & tranſverſale en manière de commiſſure, & plus loin, entre deux colonnes médullaires ſous la tête du *vermis*, eſt une membrane fine tranſparente traverſée par quelques filets médullaires, qui dans le cheval ont une forme très-élégante, c'eſt la valvule de Vieuſſens.

Le cerveau du veau & du cheval, auquel cette deſcription eſt commune dans preſque tous ſes points, doit auſſi être conſidéré par ſa baſe.

On y aperçoit de chaque côté les nerfs olfactifs, qui, vus dans leur entier, forment de chaque côté une eſpèce de circonvolution qui ſe termine par un arrondiſſement irrégulier formé de ſubſtance corticale ; il y en a un ſemblable dans l'homme, mais qui n'a qu'un très-petit volume. Vers le côté externe du nerf olfactif, eſt un *tractus* blanc & longitudinal que l'on doit regarder comme l'une de ſes origines ; ce *tractus* exiſte auſſi dans l'homme. La cavité du ventricule des nerfs olfactifs eſt aſſez grande, ſa forme eſt ovale ; & elle communique avec la partie antérieure des ventricules latéraux par un très-petit orifice qui s'ouvre obliquement de derrière en devant & de haut en bas. Ces productions cérébrales, qu'on appelle du nom de *nerf olfactif*, ſont compoſées de ſubſtance griſe en dehors.

La lame qui eſt placée devant les nerfs optiques dans la baſe du cerveau, eſt très-mince.

Vers le milieu de cette baſe, on obſerve la ſaillie que ſont les circonvolutions qui répondent à l'extrémité de la corne d'ammon. L'entonnoir qui eſt ſouvent dur & preſque cartilagineux dans le mouton, a ici moins de conſiſtance; ſa cavité ne s'étend point juſqu'à la glande pituitaire qui eſt plus groſſe & plus détachée dans le cheval, que dans le mouton & le veau.

A la place du corps noir que l'on trouve dans les jambes du cerveau de l'homme, on trouve dans celles du cheval, un eſpace dont la couleur blanche eſt comme ternie.

La protubérance annulaire fait peu de ſaillie.

Les corps olivaires n'exiſtent point, & deux prolongemens longitudinaux & parallèles tiennent lieu de corps pyramidaux; les nerfs de la ſixième paire naiſſent de la partie extérieure de ces prolongemens. Il n'y a point de corps rhomboïdal dans le cervelet, ſes jambes ſont très-rapprochées & profondes.

La partie poſtérieure de la dure-mère, qui recouvre le cervelet, eſt très-épaiſſe.

Le *vermis* forme dans le quatrième ventricule, une ſaillie comme dans le mouton.

En introduiſant de l'air par le quatrième ventricule, ou par la tige pituitaire, ou par la cavité des nerfs olfactifs, on fait facilement circuler ce fluide dans tous les ventricules.

L'origine des nerfs optiques eſt la même que dans l'homme; & la partie poſtérieure des couches, qui portent le même nom, eſt auſſi inégale & tuberculeuſe.

La troiſième & la cinquième paires n'offrent rien de particulier dans leur naiſſance.

La quatrième paire fait peu de trajet avant de s'enfoncer entre les lames de la dure-mère.

La ſeptième paire molle eſt poſtérieure; elle ſort près de l'origine des jambes du cervelet.

Le nerf dur de la ſeptième paire eſt placé en devant; ſon

volume eſt moins conſidérable, & on trouve entre ces deux nerfs pluſieurs filets nerveux, comme dans l'homme.

Les racines de la huitième paire ſont nombreuſes, & le petit nerf hypogloſſe n'en eſt pas auſſi diſtinct que dans l'homme.

Le nerf acceſſoire eſt très-déprimé; & parmi les filets de ſon origine, on en trouve un ſur-tout qui eſt très-conſidérable.

La neuvième paire eſt formée de pluſieurs filets; elle a pluſieurs origines & pluſieurs orifices ſont percés dans la dure-mère pour ſa ſortie.

Les ſinus placés ſur les côtés de la ſelle turchique, ont une cavité très-conſidérable.

Ces recherches ſur le cerveau du veau & du cheval, précédées par la deſcription du cerveau du mouton, m'ont paru d'autant plus importantes, qu'elles ſont moins connues. Le cerveau du cheval, le ſeul que l'on ait examiné avec quelque détail, n'eſt décrit que d'une manière très-incomplète. Il n'exiſtoit non plus aucune figure exacte du cerveau de ces animaux: j'ai fait mes efforts pour y ſuppléer.

CERVEAU DES OISEAUX.

Explication des Planches.

PLANCHE III.

Figure 3. Cette figure repréſente le cerveau de la poule, vu en deſſus, & ouvert pour faire voir les ventricules lateraux, le pavillon de l'entonnoir & le quatrième ventricule.

a a. Les yeux.

b b. Mandibule ſupérieure au-dedans de laquelle ſe diſtribuent les nerfs olfactifs.

c. Lieu d'où naiſſent les nerfs de la première paire ou olfactifs.

f f Lobes antérieurs & ſupérieurs, ou olfactifs; ils tiennent lieu de corps ſtriés.

o o o, d; o o o, d. Membrane blanche, médullaire & radiée, que l'on voit épanouie ſur la face interne de chacun des lobes olfactifs: c'eſt entre l'une de ces lames ou expanſions & le lobe lui-même, que ſont

placés les ventricules latéraux ou supérieurs ; on y fait passer facilement l'air en l'introduisant par le quatrième ventricule. Il est difficile, dans la dissection, en écartant les deux lobes olfactifs, de ne point blesser ces deux lames qui sont situées entre les lobes, & contigues.

d d. Tige ou tronc de ces deux membranes, ou expansions radiées ; cette tige est placée devant la commissure antérieure.

e e. Commissure antérieure.

g. Ouverture, ou pavillon de l'*infundibulum* ou entonnoir.

h h. Commissure postérieure, coupée pour mieux faire voir le passage du quatrième ventricule au troisième & aux ventricules latéraux.

i i. C'est dans ces deux points que se trouve, de chaque côté, l'ouverture des ventricules optiques.

l l. Tige ou tronc des ramifications de l'arbre de vie dans le cervelet.

m m. Bifurcation des branches de l'arbre de vie, dont la plupart sont simples & quelques-unes doubles.

k k. Le quatrième ventricule.

p p. Le troisième ventricule entre les commissures ; il est très-court, & l'entonnoir est placé vers son milieu.

n n. Moelle alongée, jusqu'à l'origine de la moelle épinière.

Figure 4. Cette figure représente le cerveau de la poule, vu en dessus ; le cervelet & les ventricules optiques étant ouverts.

b. La mandibule supérieure.

a a. Région antérieure des yeux.

c c. Les yeux.

l. Les nerfs olfactifs ou de la première paire.

f f, e e. Ces lettres désignent des lobes antérieurs ou olfactifs, & elles sont placées dans des points où la substance blanche forme des ovales au milieu de la substance corticale : ces lobes tiennent lieu des corps striés.

k k. Intervalle qui sépare les lobes olfactifs : ils sont un peu écartés, & on aperçoit entr'eux les deux lames blanches & radiées, dont chacune compose, avec le lobe qui lui correspond, un des ventricules latéraux.

d d. Commissure antérieure.

h h. Commissure postérieure.

g. Pavillon de l'entonnoir. Cette lettre désigne aussi le troisième ventricule qui est placé entre les deux commissures.

i i. Ouvertures des ventricules optiques dans le quatrième ventricule : ces orifices sont placés derrière la commissure postérieure.

k k. Excavation des ventricules optiques.

pp. Tiges de l'arbre de vie dans le cervelet.

m m. Le cervelet. Ces lettres montrent les bifurcations de l'arbre de vie, qui ſont tout au plus doubles.

o o. Cavité du quatrième ventricule.

n. Moelle alongée.

Figure 5. Cette figure repréſente le cerveau de la poule, vu en deſſus, & de derrière en devant.

a. Cervelet.

i i. Deux petites boſſes ou prolongemens latéraux du cervelet, qui s'engagent dans une excavation placée près de celle de l'organe de l'ouïe.

h h. Les yeux.

f f. Lobes ſupérieurs ou latéraux qui tiennent lieu des corps ſtriés.

g. Diviſion de ces lobes.

k. Petite appendice ou glandule placée entre le cervelet & les lobes latéraux ou olfactifs.

b b. Couches optiques.

d, e. Moelle épinière.

c, d. Moëlle allongée.

c. Quatrième ventricule. *Calamus ſcriptorius.*

m m. Parties latérales du quatrième ventricule, formées par l'expanſion de la moelle alongée.

PLANCHE IV.

Figure 1.re Cette figure repréſente la baſe du cerveau d'un corbeau, & l'origine des neuf paires de nerfs.

1. Partie antérieure des grands lobes du cerveau, qui tiennent lieu des corps ſtriés : c'eſt de cette partie que naiſſent les nerfs olfactifs, dont ces lobes peuvent auſſi porter le nom.

2. Extrémité antérieure & moyenne des couches optiques, d'où ſort un bouton qui eſt le tronc commun des nerfs optiques. Dans tous les quadrupèdes ces deux nerfs communiquent, avant leur entrée dans l'orbite ; ici leur origine eſt commune.

3, 3. Les nerfs de la troiſième paire qui naiſſent derrière l'entonnoir.

4, 4. Nerfs de la quatrième paire, dont l'origine eſt près de la commiſſure poſtérieure.

5, 5. Nerfs de la cinquième paire, que l'on voit naître des parties latérales de la portion de la moelle alongée, qui tient lieu de la protubérance annulaire.

6, 6. Nerfs de la ſixième paire, qui ſortent de la partie la plus élevée de la moelle alongée.

7, 7. Nerfs de la ſeptième paire, qui naiſſent des côtés de la moelle alongée.

8, 8. Nerfs de la huitième paire, qui naiſſent au-deſſous des précédens.

9, 9. Les nerfs de la neuvième paire, qui ſortent des côtés de la moelle épinière, près de ſon origine.

10, 10. Région inférieure des lobes olfactifs, qui tiennent lieu des corps ſtriés.

11, 11. Région inférieure des lobes ou couches optiques.

12, 12. Moelle alongée.

13. Origine de la moelle épinière.

a. Entonnoir ou *infundibulum.*

DISSECTION du cerveau du Corbeau, du Geai, de la Pie, de la Grive, du Coq-d'Inde, du Coq ordinaire & de la Poule.

Il ſuffit de conſulter la figure première de la *planche IV*, pour voir que j'ai trouvé dans la baſe du cerveau des oiſeaux les neuf paires de nerfs que l'on trouve dans l'homme & dans les quadrupèdes; & que les proportions de ces nerfs, dans leur origine, ſont à peu-près les mêmes que dans les quadrupèdes.

Au lieu de la protubérance annulaire, on trouve une éminence aplatie qui en tient la place.

En devant, ſont les lobes ou hémiſphères olfactifs; dans le milieu & en arrière ſont les lobes, éminences ou couches optiques, & tout-à-fait en arrière ſe trouvent le cervelet & la moelle alongée. On obſerve dans la baſe du crâne des oiſeaux trois ſortes d'excavations deſtinées à recevoir ces différens organes.

En conſidérant ce cerveau en deſſus, on y remarque ſur-tout deux grands lobes, dont la forme eſt ovale, qui ſont compoſés à l'extérieur de ſubſtance corticale, ſans circonvolution, & à l'intérieur d'un mélange de ſubſtance griſe & médullaire, qui donne naiſſance aux nerfs olfactifs qui contribuent à la formation des ventricules latéraux, & que l'on doit par conſéquent regarder comme répondant aux corps ſtriés des quadrupèdes.

En écartant ces deux lobes, on aperçoit, 1.° deux commissures, l'une antérieure, l'autre postérieure; 2.° sur la face interne de chacun des lobes ou hémisphères susdits, une membrane médullaire très-mince, qui s'y applique de manière à laisser entr'elle & le lobe une cavité analogue à celle des ventricules latéraux. Cette cavité est semi-circulaire de haut en bas & de devant en arrière; de droite à gauche elle est très-étroite, & elle se prolonge jusqu'à l'origine du nerf olfactif, qui est creux dans son principe. Au-dessous de la commissure postérieure, le quatrième ventricule communique avec les latéraux: cette communication s'étend même entre les deux commissures; là, les expansions médullaires qui forment la paroi interne des ventricules latéraux, sont adossées, & on y trouve le pavillon de l'entonnoir qui, joint à l'espèce de rigole comprise entre les deux commissures, compose tout ce que l'on trouve dans les oiseaux d'analogue au troisième ventricule.

Derrière la commissure postérieure, on trouve de chaque côté une ouverture qui établit une communication entre l'extrémité antérieure du quatrième ventricule & les cavités ou ventricules optiques.

Je ne dois pas oublier de remarquer ici que j'ai observé dans les ventricules latéraux un petit réseau vasculaire, analogue au plexus choroïde.

Il résulte de cette exposition, que l'on peut séparer les deux hémisphères olfactifs, sans trouver aucun obstacle, jusqu'aux commissures.

En soulevant postérieurement les lobes ou hémisphères olfactifs, on aperçoit en arrière & sur les côtés la face supérieure des lobes ou couches optiques: ces dernières sont formées de lames assez irrégulières, & qui sont alternativement blanches & grises.

Le cervelet semble n'être composé que du *vermis*, & les expansions latérales de cet organe manquent entièrement, si l'on en excepte deux renflemens latéraux très-petits,

marqués *ii*, *fig.* 5, *pl. III*, & qui ſont contenus de chaque côté dans une légère excavation pratiquée près des trous auditifs internes.

Le quatrième ventricule a la forme d'un loſange; il eſt placé entre le cervelet & la moelle alongée; & lorſqu'on y introduit de l'air par le moyen d'un chalumeau, ce fluide pénètre dans les cavités des couches optiques & dans celles des ventricules, que j'ai cru pouvoir appeler *latéraux*. Toutes ces excavations communiquent enſemble près de la commiſſure poſtérieure.

Le *proceſſus* vermiforme, ou *vermis*, qui compoſe preſque tout le cervelet, a une ſaillie ou tête que l'on aperçoit dans la cavité du quatrième ventricule.

Les grands lobes ou tubercules olfactifs, ſont portés dans la baſe du cerveau ſur des *jambes* ou *crura*, que l'on voit s'étendre preſque parallèlement vers la partie qui tient lieu de protubérance annulaire, & dont les régions latérales ſe confondent avec le bord interne des couches optiques.

Je ne parlerai point ici de la ſtructure des nerfs des oiſeaux, que j'ai ſpécialement examinés dans la cigogne & dans le cygne; je me borne aux détails néceſſaires pour juſtifier ce que j'ai avancé dans mon quatrième Mémoire ſur le cerveau.

CERVEAU DES REPTILES.

Explication des Planches.

PLANCHE IV.

Figure 7. Cette figure repréſente le cerveau de la grenouille, vu en deſſus.

a Moelle épinière.

b. Petite portion du quatrième ventricule.

c. Cervelet, qui eſt très-petit.

d. Strie médullaire tranſverſale placée devant le cervelet.

e e. Tubercules ou lobes optiques.

f. Portion cérébrale placée entre les tubercules optiques & les olfactifs.

g g. Les

g g. Les tubercules olfactifs.

h. Petits renflemens placés à l'origine des nerfs olfactifs.

i i. Les nerfs olfactifs.

Figure 8. Elle montre le cerveau de la vipère en grandeur naturelle, & vu en dessus.

a. Moelle allongée.

b. Quatrième ventricule vu en arrière.

c. Cervelet, ce n'est qu'un point.

d. Tubercules optiques.

e. Tubercules ou lobes olfactifs.

g. Nerfs olfactifs.

f f. Yeux, dont le volume paroît surpasser celui du cerveau.

h. Extrémité antérieure de la tête.

J'ai observé dans ce cerveau qui remplit exactement la cavité du crâne, 1.° l'*infundibulum*, en écartant les lobes antérieurs; 2.° deux petits tubercules placés devant le cervelet, & que l'on voit en écartant les lobes optiques : répondent-ils aux tubercules quadrijumeaux? 3.° un nerf analogue à la cinquième paire, & qui donne des rameaux aux dents & aux mâchoires; 4.° un nerf qui tient lieu de la huitième paire.

CERVEAU DES POISSONS.

Explication des Planches.

PLANCHE IV.

Figure 2. Elle représente le cerveau du cabillaud vu en dessus.

g. Moelle épinière.

f. Cervelet.

o o. Nerfs qui naissent sous le cervelet.

e e. Tubercules optiques.

d d. Lobes ou tubercules olfactifs.

a, c. Les deux nerfs optiques.

h, b. Le nerf olfactif avant sa division.

i. Division du nerf olfactif.

l l. Les deux branches de ce nerf divisé.

DISSECTION du cerveau du Cabillaud.

DANS ce poiſſon, les nerſs optiques ſe croiſent : celui du côté gauche eſt le plus élevé & ſe porte à droite, tandis que le droit eſt inférieur & ſe porte à gauche.

En voyant le cerveau en-deſſus, on y compte cinq tubercules : en deſſous, derrière l'*infundibulum*, ſont deux ſaillies qui répondent aux éminences mamillaires.

Les tubercules olfactifs & les optiques ſont creux.

En fendant le cervelet, on n'y trouve qu'une ſtrie blanche, d'où ſortent quelques rameaux fort courts.

Le *calamus ſcriptorius* s'étend ſous le cervelet, & l'air qu'on y introduit paſſe dans les ventricules optiques & olfactifs.

Un rameau de nerf, qui eſt très-gros, ſort par-deſſus la tête par un trou qui perce la calotte oſſeuſe du crâne, & qui s'étend très-loin en ſe contournant derrière l'os par lequel l'opercule des ouïes eſt ſoutenu. Je n'ai point vu dans un autre animal un nerf ſortir ainſi par la partie ſupérieure du crâne.

Le cerveau, deſſiné en grandeur naturelle dans la *figure 2*, eſt très-petit, eu égard au volume de la tête, comme les dimenſions ſuivantes le prouveront.

La tête, depuis l'origine de la moelle épinière juſqu'au bout du nez, avoit 7 pouces 8 lignes de longueur.

La diſtance d'un œil à l'autre, étoit de 3 pouces 2 lignes.

La largeur de la bouche, d'une commiſſure à l'autre, étoit de 4 pouces.

La diſtance de l'opercule d'un côté, à celui du côté oppoſé, étoit de 6 pouces & demi.

Figure 3. Elle repréſente le cerveau du congre, vu en deſſus.

a a. Les nerſs olfactifs, placés l'un à côté de l'autre.

b b. Les lobes ou tubercules olfactifs.

c c. Deux lobes pairs, creux.

d d. Deux autres lobes pairs creux, que je regarde comme les optiques.

e. Le cervelet.

f. Le quatrième ventricule.

g. Petit pont de ſubſtance médullaire, placé tranſverſalement ſur le quatrième ventricule.

i i. Nerfs qui naiſſent ſous le cervelet.

DISSECTION du cerveau du Congre.

Il y a dans ce cerveau ſept tubercules : 1.° deux petits, antérieurs, donnent origine aux nerfs olfactifs, qui ſont très-rapprochés ; 2.° deux, un peu plus grands, ſont placés derrière ceux-ci ; 3.° deux autres, plus gros, ſont ſitués derrière les ſeconds ; 4.° un ſe trouve en arrière, où il fait fonction de cervelet. En ſoulevant la partie poſtérieure de ce tubercule, on trouve un prolongement tranſverſal cendré.

En écartant les tubercules du ſecond ordre, on voit une commiſſure.

L'air, introduit par le quatrième ventricule, entre dans les cavités des tubercules.

Figure 4. Elle repréſente le cerveau d'un brochet, vu en deſſus, & ouvert de manière à faire voir la cavité que forment les ventricules optiques.

h. Nerfs olfactifs, rapprochés.

b b. Lobes ou tubercules des nerfs olfactifs.

d, e, d, e. Portions des tubercules ou lobes optiques, ouverts.

c. Sorte de commiſſure antérieure.

i i. Face interne des couches ou lobes optiques : ces lobes ou tubercules ſont réunis vers le haut, & ſous leur voûte ſe trouvent les ventricules optiques.

k. Petite ouverture ou fente qui mène à une excavation analogue au pavillon de l'entonnoir : cette lettre déſigne auſſi le troiſième ventricule.

h h. Ces lettres montrent des ſtries blanches radiées, & un petit ſegment blanc, placé de chaque côté, au-deſſous des ſtries, dont ce ſegment eſt l'appui.

f, g. Les quatre tubercules quadrijumeaux, ſur leſquels on ne trouve point de glande pinéale.

g. Cervelet.

a. Moelle épinière.

Les nerfs olfactifs, les tubercules quadrijumeaux, & le cervelet, ont été dessinés par le célèbre M. Camper *(Savans étrangers, tome VI, page 188, planche II, figures 1, 2)* la figure que j'en donne ici diffère cependant un peu de celle de cet Anatomiste.

DISSECTION du cerveau du Brochet.

IL est composé de cinq tubercules ou lobes: les deux antérieurs sont de forme ovale, & paroissent en partie composés de substance corticale. Je les ai appelés *olfactifs.*

Les seconds sont beaucoup plus volumineux; ils sont composés en grande partie de substance blanche; ils sont réunis dans leur milieu par une membrane médullaire très-fine & transparente. Pour les bien voir, il faut les remplir d'air par le quatrième ventricule; ils se distendent alors sans que l'air s'échappe par aucun endroit. Lorsqu'on les ouvre avec précaution, on voit que les cavités dont ils sont creusés, & qui sont assez amples, ont entr'elles dans le milieu une communication ovale très-étendue. Après les avoir renversés sur le côté, si on en examine l'intérieur, on y aperçoit, 1.° en-devant des fibres transversales, marquées *c, figure 4;* 2.° derrière cette commissure, l'ouverture de l'*infundibulum;* 3.° en arrière, les quatre tubercules quadrijumeaux, dont les inférieurs se voient même en dehors, en écartant les lobes optiques du cervelet; 4.° un intervalle compris entre les tubercules quadrijumeaux & la commissure antérieure. Cet espace répond au troisième ventricule: on y trouve 1.° l'entonnoir dont j'ai déjà parlé; 2.° de chaque côté un petit segment médullaire, placé le long de la rigole qui répond au troisième ventricule; 3.° des fibres blanches radiées, qui paroissent s'implanter sur le segment que je viens de décrire, & qui s'étendent sur toute la paroi interne des ventricules optiques.

Le cervelet est placé en arrière: sur chacun de ses côtés est un petit renflement; il est composé de substance corticale, au milieu de laquelle est une strie blanche.

Au-dessous du cervelet, est la moelle alongée & le qua-

trième ventricule, qui communique avec le troisième & les ventricules optiques, sous les tubercules quadrijumeaux.

Tout le cerveau est recouvert supérieurement par une lame brillante; il est renfermé dans des cavités cartilagineuses & demi-transparentes; dans la base on trouve l'entonnoir qui répond au pavillon *k*, *figure 4*, & au-dessous des lobes olfactifs on voit les nerfs optiques qui se croisent & qui naissent immédiatement des couches ou lobes optiques, que j'ai dit être excavés.

Il n'y a donc ici ni corps calleux ni ventricules latéraux, mais seulement le quatrième ventricule & le troisième où se trouve le pavillon de l'*infundibulum*, & sur les côtés duquel s'ouvrent les ventricules ou couches optiques, qui sont creusés comme dans les oiseaux. Pour en donner une idée plus précise, c'est comme si dans l'homme les couches optiques étant réunies par leurs bords supérieurs, ces mêmes couches étoient creusées d'une cavité, qui de chaque côté s'ouvrît dans le troisième ventricule.

DISSECTION du cerveau de la Carpe.

CE cerveau est un des plus compliqués que présente l'anatomie des Poissons; il est composé de huit tubercules, dont six sont pairs & deux impairs. Je les considérerai en-dessus & de devant en arrière.

1.° On voit en devant les deux lobes olfactifs, formés principalement de substance corticale, & d'où sortent les deux nerfs de la première paire, qui sont terminés à peu-près comme dans l'homme, par un renflement de substance grise.

2.° Plus loin on aperçoit les lobes ou tubercules optiques, dont la forme est très-bizarre. En devant & en dessus, ils sont composés d'une lame très-mince & transparente, qui sur les côtés se continue avec une lame médullaire blanche striée dans sa paroi interne, laquelle forme l'enveloppe extérieure des tubercules optiques. Lorsqu'on introduit de l'air par le quatrième ventricule, toute cette cavité se trouve distendue. Après avoir ouvert la membrane transparente dont j'ai parlé,

& pénétré dans la cavité des couches optiques, on y aperçoit de chaque côté un bourlet ayant à peu-près la forme d'une oreille humaine, dont l'extrémité la plus renflée eſt en-deſſus, ou qui reſſemble à une petite corne d'ammon. Lorſqu'on ſoulève les bords internes de ces deux bourlets, on obſerve un réſeau vaſculaire, qui ſemble avoir quelque rapport avec le plexus choroïde, & dans le milieu un petit renflement ou tubercule moyen.

On peut ſoulever en devant, ſoit par le moyen du ſouffle, ſoit par celui du ſcalpel, la maſſe entière de ces deux bourlets: on voit alors, 1.° que c'eſt ſous leur face inférieure que le quatrième ventricule communique avec le troiſième, ce qui fait que je regarde ces deux bourlets comme repréſentant les tubercules quadrijumeaux; 2.° dans le milieu de cet eſpace, c'eſt-à-dire, au-deſſous des bourlets ſuſdits, eſt le pavillon de l'entonnoir, & plus antérieurement on obſerve des ſtries blanches, & tranſverſales qui s'étendent d'un côté à l'autre & qui répondent à la commiſſure antérieure; 3.° ſur les côtés on voit, comme dans le brochet, la paroi interne des couches optiques, composées de fibres blanches radiées, appuyées ſur deux ſegmens de ſubſtance blanche, qui ſuivent la longueur du troiſième ventricule. J'appelle de ce nom tout l'eſpace compris depuis le pavillon de l'entonnoir juſqu'au paſſage qui va au quatrième ventricule, & qui eſt creuſé ſous les deux bourlets, que j'ai dit tenir lieu des tubercules quadrijumeaux.

A la rigueur, les deux couches optiques ſont ici confondues, comme dans pluſieurs autres poiſſons, & n'en forment en quelque ſorte qu'une ſeule.

3.° Un gros tubercule impair eſt placé derrière ceux-ci.

4.° Un ſecond tubercule impair, d'un moindre volume, eſt ſitué derrière le premier; tous les deux paroiſſent tenir lieu de cervelet. Le quatrième ventricule paſſe au-deſſous de l'un & de l'autre.

5.° De chaque côté du dernier tubercule impair, tout-à-fait en arrière, eſt un petit lobe: l'un & l'autre ſemblent être des appendices du cervelet.

Dans la base du cerveau, on voit la tige pituitaire, la glande qui porte le même nom, & en devant les nerfs optiques qui se croisent, & qui sortent de la partie antérieure & inférieure des lobes que j'ai dit être placés derrière les olfactifs.

Je publierai ailleurs des figures qui représenteront ces détails.

Figure 5. Cette figure représente le cerveau d'un turbot, vu en dessus.

e e. Lobes olfactifs.

f. Le nerf olfactif avant sa division.

c, d. Lobes optiques.

b. Cervelet.

a. Moelle épinière.

h. Quatrième ventricule.

g. Petit pont médullaire, placé sur le quatrième ventricule.

Figure 6. Dans cette figure on voit le cerveau du turbot en dessus, mais dans lequel les lobes olfactifs sont enlevés pour mieux montrer les nerfs optiques; on a détruit le petit pont transversal, placé en forme de valvule sur le quatrième ventricule.

a. Moelle épinière.

b. Cervelet.

c, d. Lobes olfactifs.

e, f. Nerf optique droit, qui se porte à gauche & en dessus.

g, h. Nerf optique gauche, qui se dirige de gauche à droite & en dessous; il est le plus long.

	pouces.	lignes.
Longueur du nerf optique le plus long..........	2.	8.
Longueur du nerf optique le plus court..........	1.	6.
Longueur de tout le cerveau..................	1.	4.
Largeur du cerveau.......................	//	9.
Longueur de la tête depuis la naissance de la moelle épinière, jusqu'à l'extrémité antérieure des mâchoires.	6.	2.
Largeur de la tête entière, mesurée en dehors......	2.	6.

Le turbot que j'ai disséqué étoit d'une grande taille.

DISSECTION du cerveau d'un Barbot.

Il a cinq tubercules; 1.° deux pairs, petits, antérieurs, donnent origine aux nerfs olfactifs; ces nerfs sont réunis, & ne forment qu'un tronc: 2.° deux pairs, plus gros, & creux,

ſont les optiques : 3.° l'impair, qui eſt le cervelet. Au-deſſous du cervelet eſt le quatrième ventricule, & là, derrière ce tubercule, eſt un prolongement tranſverſal de ſubſtance griſe.

En ouvrant les tubercules optiques, on trouve une cavité, dans laquelle eſt une petite éminence ronde & blanche.

Sur le côté ſont les nerfs de la cinquième paire.

Tout le cerveau eſt contenu dans une cavité cartilagineuſe, épaiſſe.

Les nerfs optiques ſe croiſent ; ils ſont formés de filamens très-marqués, couverts d'une membrane qui les cache.

On doit ſur-tout remarquer la groſſeur & la dureté de ces nerfs, qui ſont placés entre deux pulpes : la pulpe de la rétine & celle des couches optiques.

En introduiſant de l'air dans le quatrième ventricule, on ſoulève le cervelet, & on gonfle les tubercules optiques.



Planche 1.ere

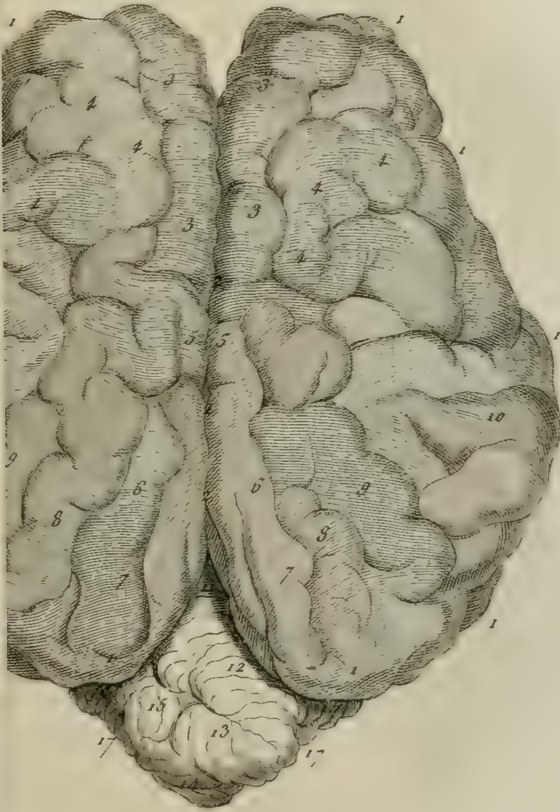


Briceau del. et sculp.

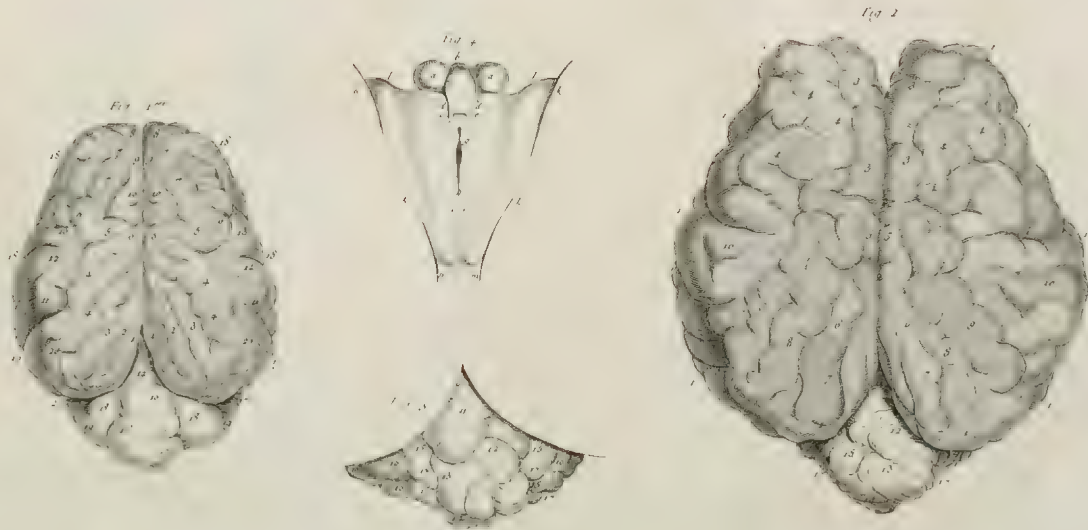


Pl

Fig. 2

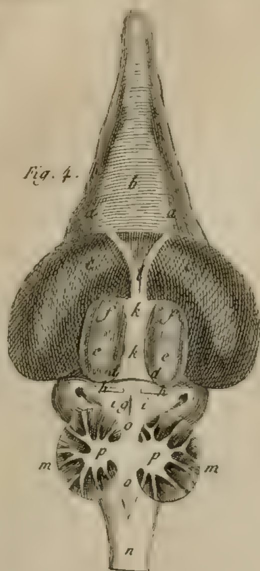


Briceau

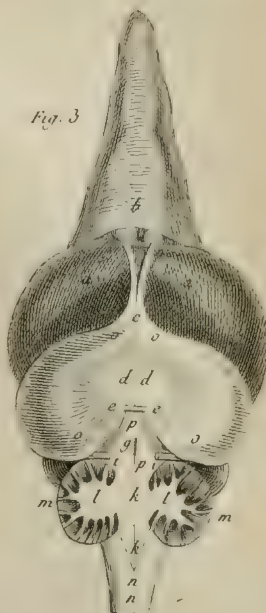


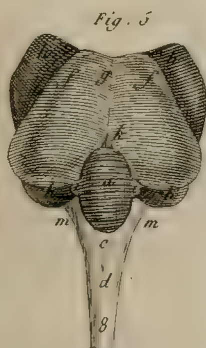
Briceau del. et sculp

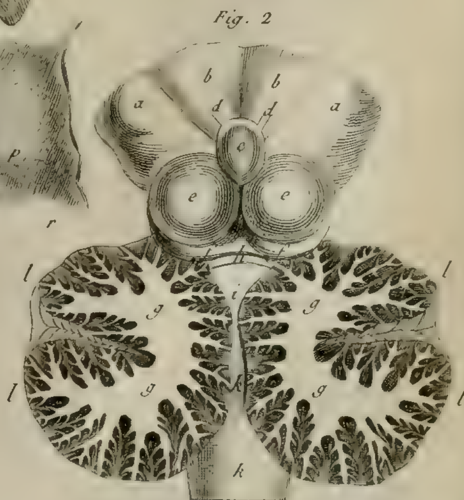
Planche 3e.









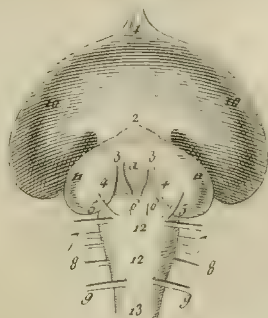


Briceau del. et sculp.


NATURAL HISTORY

Planche 4^e.

Fig. 1ere



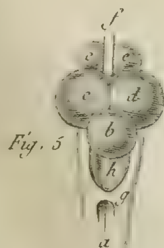


Fig. 5

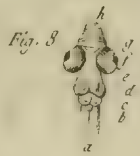
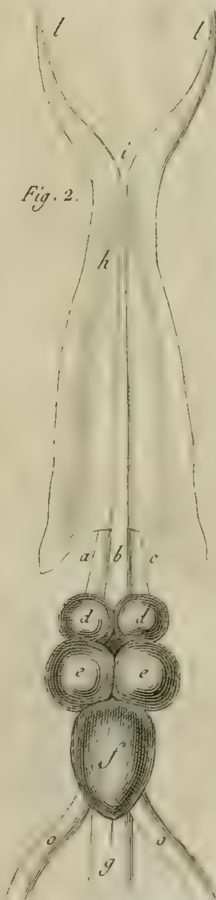


Fig. 8



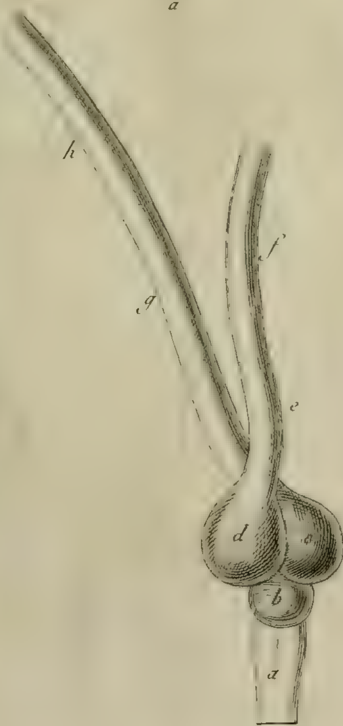
Fig. 7

Fig. 2.









Briceau del. et sculp.

RÉFLEXIONS SUR LE PHLOGISTIQUE,

Pour servir de développement à la théorie de la Combustion & de la Calcination, publiée en 1777.

Par M. LAVOISIER.

DANS la suite de Mémoires que je viens de communiquer à l'Académie *, j'ai passé en revue les principaux phénomènes de la Chimie; j'ai insisté sur ceux qui accompagnent la combustion, la calcination des métaux, & en général toutes les opérations où il y a absorbtion & fixation d'air. J'ai déduit toutes les explications d'un principe simple, c'est que l'air pur, l'air vital, est composé d'un principe particulier qui lui est propre, qui en forme la base, & que j'ai nommé *principe oxygine*, combiné avec la matière du feu & de la chaleur. Ce principe une fois admis, les principales difficultés de la Chimie ont paru s'évanouir & se dissiper, & tous les phénomènes se sont expliqués avec une étonnante simplicité.

Mais si tout s'explique en Chimie d'une manière satisfaisante, sans le secours du phlogistique, il est par cela seul infiniment probable que ce principe n'existe pas; que c'est un être hypothétique, une supposition gratuite: & en effet, il est dans les principes d'une bonne logique, de ne point multiplier les êtres sans nécessité. Peut-être aurois-je pu m'en tenir à ces preuves négatives, & me contenter d'avoir prouvé qu'on rend mieux compte des phénomènes sans phlogistique qu'avec le phlogistique: mais il est temps que je m'explique d'une manière plus précise & plus formelle sur une opinion

* Quelques-uns de ces Mémoires ne sont point encore imprimés.

que je regarde comme une erreur funeste à la Chimie, & qui me paroît en avoir retardé considérablement les progrès, par la mauvaise manière de philosopher qu'elle y a introduite.

Je prie mes Lecteurs, en commençant ce Mémoire, de se dépouiller, autant qu'il leur sera possible, de tout préjugé; de ne voir dans les faits que ce qu'ils présentent, d'en bannir tout ce que le raisonnement y a supposé, de se transporter aux temps antérieurs à Stalh, & d'oublier pour un moment, s'il est possible, que sa théorie a existé.

A l'époque où Stalh a écrit, les principaux phénomènes de la combustion étoient encore ignorés. Il n'a connu de cette opération que ce qui frappe les sens, le dégagement de la chaleur & de la lumière. De ce que quelques corps brûloient & s'enflammoient, il en a conclu qu'il existoit en eux un principe inflammable, du feu fixé; mais comme il étoit difficile de concilier la fixité qu'on observe dans quelques corps combustibles avec la mobilité, la subtilité qui paroît caractériser l'élément du feu, il a supposé qu'un principe terreux servoit d'intermède pour unir le feu aux corps combustibles, & il a appelé *principe inflammable* ou *phlogistique*, le résultat de cette combinaison. Telle est au moins la manière dont M. Macquer a présenté la doctrine de Stalh dans son dictionnaire de Chimie: il est vrai que le Chimiste Allemand ne l'a pas toujours exposée dans ce degré de simplicité; qu'il a souvent regardé, avec le P. Becher, le phlogistique, comme un élément purement terreux, mais j'ai pensé qu'il étoit inutile de le suivre dans les différentes opinions qu'il a successivement embrassées, & que je pourrois m'en tenir à la doctrine de Stalh, telle qu'elle a été conçue & présentée par M. Macquer. Si Stalh se fût borné à cette simple observation, son système ne lui auroit pas mérité sans doute la gloire de devenir un des Patriarches de la Chimie, & de faire une sorte de révolution dans cette Science. Rien n'étoit plus naturel en effet, que de dire que les corps combustibles s'enflamment, parce qu'ils contiennent un principe inflammable: mais on doit à Stalh deux découvertes importantes, indépendantes de tout

ſyſtème, de toute hypothèſe, qui ſeront des vérités éternelles: la première, c'eſt que les métaux ſont des corps combuſtibles; que la calcination eſt une véritable combuſtion & qu'elle en préſente tous les phénomènes. Ce fait conſtant que Stalh paroît avoir reconnu le premier, & qui eſt aujourd'hui généralement avoué de tout le monde, le mettoit dans la néceſſité d'admettre un principe inflammable dans les métaux: & en effet, ſi la combuſtion eſt due au dégagement d'un principe inflammable qui étoit fixé dans les corps, de ce que les métaux ſont combuſtibles, il s'enſuivoit néceſſairement que ces ſubſtances contiennent un principe inflammable.

La ſeconde découverte dont on eſt redevable à Stalh, & qui eſt plus importante encore, c'eſt que la propriété de brûler, d'être inflammable, peut ſe tranſmettre d'un corps à un autre: ſi l'on mêle, par exemple, du charbon qui eſt combuſtible, avec de l'acide vitriolique qui ne l'eſt pas, l'acide vitriolique ſe convertit en ſoufre, il acquiert la propriété de brûler, tandis que le charbon la perd. Il en eſt de même des ſubſtances métalliques, elles perdent par la calnination leur qualité combuſtible; mais ſi on les met en contact avec du charbon, & en général avec des corps qui aient la propriété de brûler, elles ſe revivifient, c'eſt-à-dire, qu'elles reprennent, aux dépens de ces ſubſtances, la propriété d'être combuſtibles. Stalh a conclu de ces faits, que le phlogiſtique, le principe inflammable pouvoit paſſer d'un corps dans un autre, & qu'il obéiſſoit à de certaines loix auxquelles on a donné depuis le nom d'affinité.

Suivant Stalh, le phlogiſtique, le principe inflammable eſt un corps peſant, & en effet on ne peut pas ſe former une autre idée d'un principe terreux, ou au moins dans la compoſition duquel entre l'élément terreux; il a même eſſayé dans ſon Traité du ſoufre, d'en déterminer la peſanteur.

Cette théorie de Stalh, ſur la calcination des métaux & ſur la combuſtion en général, ne rendoit pas compte d'un phénomène très-anciennement obſervé, vérifié par Boyle, & qui eſt devenu aujourd'hui une vérité inconteſtable: c'eſt

que tous les corps combuſtibles augmentent de poids pendant le temps même qu'ils brûlent & ſe calcinent; c'eſt ce qu'on obſerve ſur-tout d'une manière frappante dans les métaux, dans le ſoufre, dans le phoſphore, &c. Or dans le ſyſtème de Stalh, il s'échappe des métaux, pendant qu'on les calcine, & des corps combuſtibles qui brûlent, du phlogiſtique qui eſt un principe peſant; ils devoient donc perdre une partie de leur poids, au lieu d'en acquérir.

Les Chimiſtes qui ont écrit depuis Stalh, & qui ont adopté ſes principes, ſe ſont diſſimulé, autant qu'ils ont pu, cette difficulté, & M. Macquer dans la première édition de ſon Dictionnaire de Chimie, n'a pas dit un mot, ni du fait, ni des moyens de l'expliquer. M. Baumé, dont la Chimie a paru peu de temps après, a bien ſenti qu'une contradiction auſſi formelle entre la théorie & les faits, exigeoit une réforme dans le ſyſtème de Stalh, & il a eu le courage de l'entreprendre: il admet un principe inflammable, compoſé de la matière du feu, combinée avec un principe terreux; il ſuppoſe que les êtres organiſés, les végétaux & les animaux ont été chargés par la Nature, de la combinaiſon de ces deux principes, & il prétend que tout le phlogiſtique exiſtant dans le règne minéral, doit ſon origine aux deux autres règnes. Juſque-là le ſyſtème de M. Baumé ſe rapprochoit beaucoup de celui de Stalh; mais un point dans lequel il s'en eſt écarté d'une manière plus formelle, c'eſt qu'il a ſuppoſé que le feu libre & l'élément terreux qui entrent dans la compoſition du phlogiſtique, pouvoient ſe combiner dans une infinité de proportions, & qu'il exiſtoit par conſéquent une infinité d'états intermédiaires entre le feu libre & le phlogiſtique proprement dit: quoique cette extenſion donnée au ſyſtème de Stalh rendît un grand nombre de faits plus faciles à expliquer, & qu'un principe ſuſceptible de prendre ainſi une infinité de formes différentes, ſuivant le beſoin, fût extrêmement commode pour les Chimiſtes, cependant M. Baumé n'en a pas été plus heureux dans l'explication qu'il a donnée de l'augmentation de poids des chaux métalliques; il prétend,

avec Sthal, que les métaux perdent leur phlogiſtique pendant leur calcination, mais que ce phlogiſtique eſt remplacé par du feu pur, ou du moins par du feu moins chargé d'élément terreux, & c'eſt à l'addition de ce feu preſque libre, qu'il attribue l'augmentation de poids des chaux métalliques.

M. Baumé, dans cette hypothèſe, ſe trouve obligé de donner à l'élément du feu une peſanteur extrêmement grande; car il eſt des métaux, comme le fer, qui augmentent de plus d'un tiers de leur poids par la ſimple calcination à l'air libre; il faudroit donc que le feu pur eut non-ſeulement occaſionné toute cette augmentation, mais qu'il eut encore remplacé la perte de poids occaſionnée par la volatiliſation du phlogiſtique, qui lui-même eſt néceſſairement peſant puiſqu'il eſt composé de deux élémens peſans: or cette ſuppoſition de la grande peſanteur du feu, eſt contraire à tous les faits : cet élément, ce fluide ſubtil obéit probablement, comme tous les autres, aux loix de l'attraction, mais ſa peſanteur eſt ſi petite qu'il n'eſt pas poſſible de la rendre ſenſible dans aucune expérience phyſique.

J'ai rendu compte ailleurs des tentatives que j'ai faites à cet égard: j'ai prouvé que la quantité de matière du feu & de la chaleur qui ſe dégage de quatre-vingt-douze grains de phoſphore qui brûlent, n'a point de peſanteur qu'on puiſſe apprécier, même avec les inſtrumens les plus exacts; d'ailleurs, loin qu'il y ait du feu libre d'abſorbé pendant la calcination des métaux, comme le ſuppoſe M. Baumé, il y en a au contraire une grande quantité qui paſſe de l'état ſixe à l'état libre; cette quantité de feu qui ſe dégage eſt très-ſenſible, & ſuſceptible même d'être meſurée lors de la calcination du fer & du zinc dans l'air vital.

Les expériences faites depuis peu en Angleterre, en France & en Suède, ſur la chaleur, fourniſſent encore de nouvelles objections contre le ſyſtème de M. Baumé: ſi réellement le feu libre ou preſque libre avoit la propriété de ſe combiner avec les ſubſtances métalliques, & de réduire leurs chaux à l'état métallique, les corps qui contiendroient le plus de feu libre, ou au moins dans un état très-voiſin de celui de

liberté, devroient être aussi les plus propres à opérer la réduction. On sait aujourd'hui que les fluides en vapeur, l'eau, par exemple, est dans ce cas : cette substance ne se maintient dans l'état aériforme, lorsqu'elle est exposée à une température supérieure à 80 degrés, que parce qu'elle est combinée avec une portion de matière du feu presque dans un état de liberté, qui lui communique de l'élasticité : l'eau en vapeurs, & surtout dans le voisinage de la température à laquelle elle redevient eau, devroit donc revivifier les chaux métalliques, convertir le soufre en acide vitriolique ou sulfureux, le phosphore en acide phosphorique, communiquer à un grand nombre de corps la propriété de brûler, & être elle-même inflammable; cependant on n'observe rien de semblable, d'où il résulte que ce n'est point à la combinaison du feu libre ou presque libre avec les substances métalliques, que sont dûs les phénomènes de la revivification des métaux, de la formation du soufre & du phosphore. Enfin dans l'opinion de M. Baumé, lorsque l'on calcine des métaux dans des vaisseaux de verre scellés hermétiquement, il devroit y avoir augmentation de poids; tandis qu'il est de fait que si l'on pèse le vaisseau avant & après la calcination, sans l'ouvrir, on ne trouve aucune différence de poids, même avec les balances les plus sensibles.

Pendant que M. Baumé s'occupoit de la rédaction & de l'impression de sa Chimie, une circonstance qui a lieu constamment dans toutes les réductions métalliques, me conduisit à faire quelques recherches sur cet objet : je remarquai que dans toutes ces opérations, il y avoit une effervescence considérable au moment où le métal passoit de l'état de chaux à l'état métallique; il étoit naturel d'en conclure qu'il se dégageoit un gaz, & j'imaginai un appareil propre à le rassembler & à le recueillir. Dès le mois de Novembre 1772, je déposai au Secrétariat de l'Académie, un Écrit dans lequel je rendis compte de mes expériences; j'y faisois voir qu'il se dégageoit du *minium*, pendant sa réduction, c'est-à-dire, pendant son passage à l'état de plomb une grande quantité d'un fluide élastique, tout semblable à celui qu'on retire de la craie, des terres calcaires, des alkalis fixes effervescens, des cuves de

liqueurs en fermentation, &c. Je répétai plusieurs fois ces expériences en 1773, notamment en présence de plusieurs Membres de l'Académie.

Je m'occupai, pendant l'été de la même année, d'expériences d'un ordre inverse, sur la calcination des métaux au verre ardent, dans des quantités déterminées d'air: j'observai que dans ces opérations, à mesure que le métal se calcinoit, le volume de l'air diminuoit, & que le poids dont le métal augmentoit étoit fort exactement égal à celui de la quantité d'air qui avoit disparu: il étoit impossible de ne pas conclure de ces faits, que l'augmentation de poids des chaux métalliques étoit due à la fixation d'une portion d'air qui se combinoit avec le métal à mesure de sa calcination. Le détail de ces expériences a fait le sujet de plusieurs Mémoires que j'ai lus à l'Académie pendant l'année 1773, & que j'ai rassemblés en un volume *in-8.º* sous le titre *d'Opuscules physiques & chimiques*, qui a paru dans le mois de Décembre de cette même année.

Quelque démonstratives que fussent les expériences sur lesquelles je m'étois appuyé, on a commencé, suivant l'usage, par révoquer les faits en doute; ensuite, ceux qui cherchent à persuader au Public que tout ce qui est nouveau n'est pas vrai, ou que tout ce qui est vrai n'est pas neuf, sont parvenus à trouver dans un Auteur très-ancien, le premier germe de cette découverte. Sans examiner ici l'authenticité de l'Ouvrage dont on s'est empressé de donner à cette époque une nouvelle édition, j'ai vu avec quelque plaisir que le Public impartial avoit jugé qu'une assertion vague & jetée au hasard, qui n'étoit appuyée d'aucune expérience, qui étoit ignorée de tous les Savans, n'empêchoit pas que je ne pusse être regardé comme l'auteur de la découverte de la cause de l'augmentation de poids des chaux métalliques.

Non-seulement je démontrai alors que l'augmentation de poids étoit une des conditions de toute calcination métallique, mais je prouvai que cette même loi avoit lieu dans les combustions; que le soufre, le phosphore, tous les corps

combuſtibles en général augmentoient de poids en brûlant, & que cette augmentation étoit due à la combinaiſon, à la fixation de l'air.

Ces nouveaux faits déconcertoient & le ſyſtème de Stalh & celui de M. Baumé: M. Macquer le ſentit; mais il crut en même temps qu'il n'étoit pas impoſſible de concilier les expériences modernes avec la doctrine du phlogiſtique. La théorie nouvelle qu'il imagina pour remplir cet objet, ſe trouve ſavamment expoſée dans la ſeconde édition de ſon dictionnaire de Chimie, au mot *phlogiſtique*, à celui de *calcination*, & dans un grand nombre d'articles. On eſt étonné d'y voir que M. Macquer, tout en paroiſſant défendre la doctrine de Stalh, en conſervant la dénomination de *phlogiſtique*, préſente une théorie toute nouvelle, & qui n'eſt point celle de Stalh: au phlogiſtique, au principe inflammable, à ce principe peſant, composé de l'élément du feu & de l'élément terreux, il ſubſtitue la pure matière de la lumière; en ſorte que M. Macquer a conſervé le mot ſans conſerver la choſe, & qu'en paroiſſant défendre la doctrine de Stalh, il y a porté une véritable atteinte. Mais pour mieux faire ſentir en quoi conſiſte ce nouveau ſyſtème, qui n'eſt plus ni celui de Stalh, ni celui d'aucun autre Chimiſte ou Phyſicien, & qui appartient excluſivement à M. Macquer, il eſt néceſſaire que j'entre dans quelques détails.

M. Macquer conçoit que les métaux, le ſoufre, le charbon, le phoſphore, tous les corps combuſtibles de la Nature, contiennent une grande abondance de matière de la lumière dans un état de combinaiſon & de fixité, & c'eſt à cette matière ainſi combinée qu'il donne le nom de *phlogiſtique:* il n'admet plus en conſéquence l'élément terreux comme principe conſtitutif du phlogiſtique, ni dans une proportion fixe, comme l'avoit avancé Stalh, ni dans des proportions variables, comme l'avoit prétendu M. Baumé. Suivant M. Macquer, le phlogiſtique ou la matière de la lumière, en s'uniſſant aux corps naturellement ſolides, ne les rend pas fluides, mais il diminue leur dureté & augmente toujours leur

leur fusibilité : il en est de même de la fixité; les composés qui résultent de la combinaison du principe inflammable avec une substance fixe, ont moins de fixité que n'en avoit cette substance avant son union avec ce principe : le phlogistique augmente, suivant lui, la pesanteur absolue, souvent même la pesanteur spécifique des corps auxquels il s'unit, & il leur communique communément de l'opacité. Les substances qui, dans leur état naturel, n'ont ni odeur ni couleur, acquièrent presque toujours l'une ou l'autre de ces qualités, souvent même toutes les deux par leur union avec le principe inflammable.

Le phlogistique n'est susceptible, suivant M. Macquer, de se combiner, ni avec l'air, ni avec l'eau ; en général il s'unit difficilement avec les substances fluides, légères & volatiles, il se combine au contraire aisément avec les substances fixes, solides & pesantes, telles que les terres; enfin il est identique dans tous les corps.

Jusque-là M. Macquer n'expliquoit point encore la cause de l'augmentation de poids que les métaux acquièrent en se calcinant; car puisqu'il s'en sépare un principe pesant, ils devroient perdre de leur poids, au lieu d'en acquérir : l'objection subsisteroit même encore, quand on accorderoit que le phlogistique n'a pas de pesanteur sensible, car alors les métaux pendant leur calcination ne devroient ni augmenter, ni diminuer de pesanteur. Pour expliquer ce phénomène, M. Macquer admet, conformément à mes expériences, que l'air, ou plutôt la portion la plus pure de l'air, se combine avec les métaux pendant leur calcination avec les substances combustibles pendant la combustion, & que les uns & les autres augmentent de poids en proportion de l'air absorbé ; mais il pense qu'à mesure que cette union s'opère, la matière de la lumière qui étoit unie au corps, s'en sépare, de sorte que dans ce système, toute calcination, toute combustion est une combinaison d'air, & en même-temps une précipitation, une séparation de phlogistique, ou, ce qui est la même chose, de matière de la lumière.

M. Macquer se trouve obligé en outre de rejeter l'élément du feu, de supposer qu'il n'existe pas de matière propre de la chaleur; que la chaleur consiste dans un mouvement très-rapide imprimé aux molécules élémentaires des corps; & comme la lumière est la plus subtile de toutes les matières, il la regarde comme plus susceptible qu'aucune autre de prendre le mouvement qui constitue la chaleur.

Tel est à peu-près le tableau que présente M. Macquer, dans son Dictionnaire de Chimie, de la théorie de Stalh, ou plutôt de celle qu'il y a substituée: il est certain qu'un grand nombre d'objections qui étoient absolument insolubles dans l'hypothèse de Stalh, s'expliquent d'une manière naturelle & simple avec les modifications qui y ont été apportées par M. Macquer; telle est, comme l'on vient de le voir, l'augmentation de poids des chaux métalliques, & la sorte de combustion qu'elles éprouvent pendant la calcination; telle est aussi la propriété qu'ont quelques chaux métalliques, de se revivifier sans addition de phlogistique, ni sans être mises en contact avec des corps qui en contiennent, comme celles d'or, d'argent & de mercure: la matière de la chaleur & de la lumière ayant la propriété de pénétrer, de passer à travers les vaisseaux, il suffit, pour revivifier ces chaux, de les exposer à un certain degré de chaleur, & de les garantir du contact de l'air. M. Macquer n'explique pas d'une manière moins heureuse ce qui se passe dans la formation du gaz nitreux; ce gaz, comme l'on sait, se dégage de la dissolution du fer, du cuivre, du mercure, &c. dans l'acide nitreux. M. Macquer suppose que dans ces opérations l'air vital qui entre dans la composition de l'acide nitreux, se combine avec le métal, qu'il en dégage le phlogistique, lequel se combine avec une portion d'acide nitreux dépouillé d'air vital, pour former l'air nitreux; & que lorsqu'ensuite on combine ensemble de l'air nitreux & de l'air vital, il se reforme de l'acide nitreux, & le phogistique qui devient libre, s'échappe en passant à travers les pores des vaisseaux. Le système de Stalh admis sans modification, & tel qu'il a

été adopté par M. Prieſtley, ne pouvoit ſatisfaire à l'explication des phénomènes de cette expérience; car puiſque dans ce ſyſtème le phlogiſtique eſt un corps incapable de pénétrer à travers les vaiſſeaux, il devoit ſe retrouver dans le vaſe où s'étoit faite la combinaiſon; & en effet M. Prieſtley avoit prétendu qu'il reſtoit un réſidu d'air phlogiſtiqué; mais le fait eſt que quand l'air nitreux & l'air vital qu'on emploie, ſont purs, les deux airs s'abſorbent en entier, & ſe convertiſſent en acide nitreux ſans reſte & poids pour poids: il faut donc ou renoncer au phlogiſtique dans l'explication de cette expérience, ou bien dire avec M. Macquer, qu'il paſſe à travers les vaiſſeaux.

Mais ſi le nouveau ſyſtème imaginé par M. Macquer, pour concilier la doctrine de Stalh avec les découvertes modernes, ſatisfait à un aſſez grand nombre de phénomènes, il eſt un nombre tout auſſi grand de circonſtances dans leſquelles il eſt abſolument en défaut. M. Macquer admet d'abord avec toute l'école de Stalh, que le phlogiſtique eſt un corps peſant; cependant tous les phénomènes de la Nature, le conſentement unanime de tous les Phyſiciens, nombre d'expériences déciſives ne permettent pas de ſuppoſer à la lumière une peſanteur ſuſceptible d'être appréciée, ni même aperçue, dans des expériences chimiques.

Mais quand on accorderoit encore à M. Macquer cette ſuppoſition, quand on admettroit, contre toute apparence, contre l'évidence des faits, que la lumière peut ſe combiner & s'accumuler dans les corps, au point de devenir une partie conſtituante de leur poids; il reſteroit encore bien des phénomènes que ſon ſyſtème ne peut expliquer. Si le phlogiſtique étoit la pure matière de la lumière, toutes les chaux métalliques devroient ſe revivifier au verre ardent comme elles ſe revivifient par le contact du charbon. Cependant toutes les ſubſtances métalliques, à l'exception de l'or, de l'argent & du mercure, ſe calcinent au verre ardent; leurs chaux, loin d'y reprendre l'état métallique, s'y fondent en des eſpèces de verre; tandis que ces mêmes chaux

reprennent ſubitement leur état métallique dès qu'on les met en contact avec du charbon à un degré de chaleur convenable. La matière qui exiſte dans le charbon, n'eſt donc pas la même que celle qui conſtitue les rayons ſolaires; le phlogiſtique n'eſt donc pas la pure matière de la lumière.

M. Macquer a cru échapper à cette objection en diſant que la revivification des métaux ne peut avoir lieu tant qu'ils ont le contact de l'air, par la raiſon qu'ils ſe recalcinent à meſure qu'ils ſe revivifient, & que c'eſt par cette raiſon que les chaux métalliques ſe vitrifient au verre ardent ſans paſſer à l'état métallique : mais cette réponſe de M. Macquer peut ſe détruire par une expérience déciſive; c'eſt que les chaux métalliques ne ſe revivifient pas à l'aide des rayons ſolaires, lors même qu'on les y expoſe ſous des cloches remplies de mofette atmoſphérique ; cependant alors il n'y a point de principe qui puiſſe recalciner les métaux à meſure qu'ils ſe revivifient, ils ſont dans des circonſtances toutes ſemblables à celles qui ont lieu dans les vaiſſeaux fermés; & puiſqu'ils y demeurent conſtamment dans l'état de chaux, il faut en conclure que les rayons ſolaires, la matière de la lumière, n'agiſſent pas de la même manière que le charbon, & que par conſéquent le phlogiſtique n'eſt pas la pure matière de la lumière.

Ces objections contre le ſyſtème de M. Macquer ont été plus ou moins ſenties par les Chimiſtes, & c'eſt ſans doute par cette raiſon qu'il n'a été complètement adopté par aucun d'eux : il s'eſt établi un grand nombre de doctrines particulières dans leſquelles on n'a conſervé que le nom de phlogiſtique ; chacun a attaché à ce mot une idée vague que perſonne n'a rigoureuſement définie, & on a réuni, ſans s'en apercevoir, dans le même être, des propriétés inconciliables & contradictoires : quelques exemples rendront ceci plus ſenſible.

Lorſqu'on brûle du charbon très-pur dans de l'air vital, la totalité du charbon diſparoît, & l'air vital ſe convertit en air fixe. Si l'opération s'eſt faite dans un vaiſſeau fermé,

exactement pesé avant & après la combustion, on n'éprouve, ni augmentation, ni diminution de poids, mais l'air de l'intérieur du vaisseau dans lequel s'est opérée la combustion, au lieu de peser $0^{grains},47317$, le pouce cube pèse $0^{grains},695$, & l'augmentation de pesanteur absolue qu'a éprouvée cet air, se trouve exactement égale au poids du charbon qui a été employé.

Si on demande au plus grand nombre des Chimistes, partisans de la doctrine de Stalh, l'explication de ce qui se passe dans cette expérience, ils seront forcés de reconnoître, 1.° qu'il se dégage de la matière de la chaleur & de la lumière, laquelle s'échappe à travers les vaisseaux & se dissipe; or, comme le poids des vaisseaux dans lesquels on opère, n'augmente ni ne diminue, ils sont obligés de convenir que la matière de la chaleur & de la lumière n'a pas de pesanteur sensible: ils seront forcés en second lieu de reconnoître qu'il se forme pendant la combustion, un acide particulier, l'air fixe; or, comme le poids de cet acide est égal au poids réuni de l'air vital & du charbon, il en résulte évidemment, qu'indépendamment de tout système, il existe dans le charbon une matière pesante qui ne peut pas s'échapper à travers les vaisseaux de verre, & qui par conséquent n'est pas la matière de la chaleur & de la lumière. On voit donc que dans la combustion du charbon, les disciples de Stalh donnent le nom de *phlogistique* à deux matières très-différentes, à la matière non pesante qui s'échappe à travers les pores des vaisseaux, & à la matière pesante qui s'unit avec l'air vital pour former l'air fixe: voilà donc deux substances bien distinctes que confondent les disciples de Stalh, un phlogistique non pesant & un phlogistique pesant; l'un qui est la matière de la chaleur, l'autre qui ne l'est pas, & c'est en empruntant les propriétés, tantôt de l'une, tantôt de l'autre de ces substances, qu'ils parviennent à tout expliquer.

Les disciples de Stalh admettent également, sans s'en apercevoir, deux espèces de phlogistique dans les réductions métalliques; celle des chaux d'or, d'argent ou de mercure, s'opère, comme l'on sait, par la simple chaleur & sans

addition ; on a d'une part le métal revivifié, de l'autre, l'air vital qui lui étoit combiné, & le poids réuni de l'air & du métal eſt égal à celui qu'avoit la chaux avant la réduction. On ne peut expliquer ces ſortes de réductions dans le ſyſtème de Stalh, qu'en diſant avec M. Macquer, que la matière de la lumière qui ſe dégage des charbons ardens qui brûlent dans le fourneau, ſe tamiſe à travers les pores des vaiſſeaux, & ſe combine avec le métal : & puiſque dans cette expérience le poids de l'air qu'on obtient & celui du métal ne ſurpaſſent pas le poids de la chaux métallique, il eſt clair que s'il s'eſt combiné du phlogiſtique du métal, ce phlogiſtique ne pèſe pas.

Dans la réduction au contraire des autres métaux, on eſt obligé d'ajouter une ſubſtance charbonneuſe quelconque; on obtient alors de l'air fixe & le métal réduit; mais le produit total ſe trouve augmenté de tout le poids du charbon qui a été employé : voilà donc encore ici un phlogiſtique matériel & peſant, & les diſciples de Stalh qui ſont encore obligés de donner le nom de *phlogiſtique* à deux corps très-différens, à la matière de la lumière ou à l'élément du feu qui ne pèſe pas, & à la matière charbonneuſe qui pèſe.

La réduction des chaux métalliques fournit encore contre eux un argument embarraſſant: la ſubſtance qui eſt combinée avec le métal pour conſtituer la chaux métallique, eſt, comme on ne peut en douter, l'air vital, le principe oxygine : cependant ce principe ſe dégage dans l'état d'air fixe quand on a ajouté du charbon : le phlogiſtique du charbon s'eſt donc uni à l'air vital pour le conſtituer air fixe; & en effet on retrouve dans l'air fixe le poids de l'air vital & du charbon qui ont été employés : mais ſi tout le poids du charbon eſt entré dans la compoſition de l'air fixe, il ne s'en eſt donc point uni au métal ou, au moins, ce qui s'eſt uni au métal n'a pas de peſanteur. Il faudroit donc admettre ici un phlogiſtique qui pèſe, & qui, combiné avec l'air vital, conſtitue l'air fixe, & un phlogiſtique qui ne pèſe pas, & qui, combiné avec la chaux, lui donne les propriétés métalliques; d'où il réſulte encore que les diſciples de Stalh donnent le même nom à deux ſubſtances

différentes. Indépendamment de ces difficultés qui ſont communes aux différentes modifications qui ont été apportées à la doctrine du phlogiſtique, le ſyſtème de M. Macquer en préſente une qui lui eſt particulière; ſi, comme il le prétend, le phlogiſtique n'eſt autre choſe que la pure matière de la lumière & de la chaleur, il en réſulte que les métaux, dans leur état métallique, doivent contenir beaucoup plus de matière de la chaleur que les chaux métalliques; & cependant les expériences de M. Crawfort, celles de M. Wilke, celles de M. de la Place & les miennes, prouvent le contraire: ainſi de deux choſes l'une, ou le phlogiſtique n'eſt point, comme l'avance M. Macquer, la pure matière de la chaleur & de la lumière, ou les métaux contiennent moins de phlogiſtique que les chaux de ces mêmes métaux; or, ces deux conſéquences dont il eſt cependant néceſſaire d'admettre l'une ou l'autre, ſont également deſtructives du ſyſtème de M. Macquer & de la doctrine du phlogiſtique en général.

Les partiſans de la doctrine de Stalh, ſont perpétuellement dans de ſemblables embarras: ſi on leur demande ce qui ſe paſſe lorſque l'on calcine du mercure dans l'air vital, les Phyſiciens anglois répondront qu'à meſure que le phlogiſtique ſe dégage du métal, il ſe combine avec l'air dans lequel on opère, & qu'il le change en air fixe ou en air phlogiſtiqué; mais cette aſſertion eſt encore abſolument contraire aux faits. Lorſque l'on opère ſur de l'air vital abſolument pur, on peut l'abſorber juſqu'à la dernière goutte, & ſi l'on interrompt l'opération avant que l'abſorbtion ait été complète, la portion d'air vital qui reſte n'eſt nullement altérée, elle ne contient exactement que la même quantité d'air méphitique qui étoit contenue originairement dans la totalité de l'air qu'on a employé. Le phlogiſtique, dans cette expérience, ne s'eſt donc point combiné avec l'air, comme le prétendent les Phyſiciens anglois, & alors il faut admettre, avec M. Macquer, qu'il s'eſt échappé ſous la forme du feu libre, de matière de la lumière, à travers les pores des vaiſſeaux: mais ſi le phlogiſtique peut ainſi paſſer

librement à travers les pores des vaiſſeaux, ſi lors de la calcination des métaux dans l'air vital, il a la propriété de pénétrer le verre, s'il a cette même propriété dans la revivification des chaux d'or, d'argent & de mercure, pourquoi n'en jouit-il pas à l'égard des autres chaux métalliques? Ainſi, les partiſans de la doctrine de Stalh, après avoir été forcés de dire que le phlogiſtique tantôt pèſe, & tantôt ne pèſe pas, ſont encore obligés de convenir que, même dans ſon état de liberté, tantôt il pénètre à travers les pores des vaiſſeaux les plus compactes, tantôt qu'il n'y pénètre pas, toutes qualités incompatibles dans un même être, & qui prouvent de plus en plus qu'on a donné le même nom à des choſes fort différentes.

On peut faire un raiſonnement ſemblable ſur la formation & la deſtruction de l'air nitreux; cet air, ſuivant les partiſans de la doctrine de Stalh, réſulte de la combinaiſon de l'acide nitreux & du phlogiſtique; mais ils ne s'aperçoivent pas qu'ils ſont encore obligés d'accorder ici au phlogiſtique deux qualités incompatibles.

Lorſque l'on combine enſemble, dans des proportions convenables, de l'air nitreux & de l'air vital dans leur plus grand état de pureté, les deux airs ſe pénètrent & s'abſorbent réciproquement; ils perdent leur état aériforme & ſe convertiſſent en entier en une liqueur qui eſt l'acide nitreux: les partiſans de l'opinion de Stalh ſont obligés de convenir que dans cette expérience il y a dégagement de phlogiſtique; mais comme on n'obtient que de l'acide nitreux, qu'il ne reſte rien dans les vaiſſeaux après la combinaiſon, ils ſont forcés d'admettre que le phlogiſtique a paſſé à travers les pores des vaiſſeaux & s'eſt échappé: le phlogiſtique dont il eſt queſtion ici, eſt donc le phlogiſtique de M. Macquer, la matière de la lumière; mais alors en combinant l'air nitreux avec la matière de la lumière pure, en le faiſant ſimplement chauffer, on devroit former de l'air nitreux, tandis qu'il faut au contraire que le corps qui contient le phlogiſtique, ſoit immédiatement en contact avec l'acide nitreux: on ſe trouve donc forcé, en ſoutenant cette hypothèſe, d'admettre

pour

pour la formation de l'air nitreux, un phlogistique qui ne passe pas à travers les vaisseaux ; & pour la composition de l'acide nitreux, un phlogistique qui passe à travers les vaisseaux.

La doctrine du phlogistique est également en contradiction avec elle-même dans le plus grand nombre des explications chimiques: on nous enseigne que le phlogistique est le principe des couleurs, & cependant c'est en proportion que les chaux métalliques en sont privées davantage, qu'elles deviennent plus colorées: la chaux de plomb est d'abord grise, à mesure qu'elle perd son phlogistique, elle devient jaune & rouge ; la chaux de fer est d'abord jaune, elle passe ensuite au rouge & au brun; la chaux de mercure est rouge, celles de cuivre sont vertes & bleues, &c. Si donc le phlogistique est le principe des couleurs, ces chaux contiennent du phlogistique ; les chaux métalliques ne sont donc pas des métaux privés de phlogistique.

Il est vrai que plusieurs substances métalliques, telles que l'antimoine, l'étain & quelques autres, donnent des chaux parfaitement blanches, mais ce n'est pas le plus grand nombre, & l'exception se trouve ici plus habituelle que la règle même. J'observerai d'ailleurs que les partisans de la doctrine de Stalh, n'ont pas des idées justes sur ce qu'on doit entendre par un corps sans couleur; le blanc, loin d'être l'absence de toute couleur, comme ils le supposent, en est au contraire la réunion : si donc le phlogistique est le principe des couleurs, il faut admettre que toutes les chaux métalliques contiennent du phlogistique, puisque quelques-unes réunissent toutes les couleurs, & que d'autres en présentent de particulières. Les mêmes difficultés nous suivent si nous passons des substances métalliques aux substances végétales & animales : du papier, du linge qu'on brûle, laissent échapper du phlogistique dans le système de Stalh, & en grande abondance, puisque ce sont à peu-près les corps les plus combustibles que nous connoissions; l'un & l'autre en brûlant se convertissent en une substance charbonneuse noire; si donc la couleur noire est le caractère de la présence du phlogistique, si la couleur blanche est le

caractère de son absence, les partisans de la doctrine de Stalh ne peuvent se dispenser de convenir que le papier brûlé contient plus de phlogistique que le papier blanc, ce qui est contraire à l'évidence des faits, puisque la majeure partie de la matière du feu s'étant échappée par la combustion, il en doit rester d'autant moins dans le résidu.

Il en est à peu-près de même de la causticité : le phlogistique, dans le systême de Stalh, est le principe du goût & de la causticité ; les métaux qui sont abondamment pourvus de phlogistique devroient donc être éminemment caustiques, & cependant la plupart sont même dépourvus de goût ; les chaux métalliques au contraire qui sont privées de phlogistique, devroient être dans un état terreux, insolubles dans l'eau & sans aucun goût, & cependant par un effet tout contraire, la calcination des métaux les rapproche de l'état salin, leur donne de la solubilité dans l'eau, les rend corrosives. Il est vrai que dans ces derniers temps, on a expliqué d'une manière assez heureuse la causticité qu'acquièrent les substances métalliques quand on les prive de phlogistique ; cette causticité, a-t-on dit, est l'effet de la tendance qu'elles ont à reprendre ce principe par-tout où elles le retrouvent ; mais cette explication est encore un exemple de la facilité avec laquelle l'hypothèse du phlogistique se prête à tout, puisqu'on explique la causticité également par l'absence & par la présence du phlogistique, par la grande quantité qu'elles en contiennent, & par la tendance qu'elles ont à le reprendre.

Les effets de la matière du feu se manifestent plus clairement à l'égard des odeurs : on peut en général distinguer trois sortes de corps odorans ; les corps vaporisés, les corps dissous dans l'air, enfin ceux dont les molécules sont tellement divisées, qu'elles flottent en l'air & sont chariées par lui : or, il est bien sûr que les corps vaporisés, même ceux dissous dans l'air, sont combinés avec la matière du feu ; on peut donc dire dans ce sens, non pas que le feu est le principe des odeurs, mais qu'il en est le véhicule ; ce qui se rapproche, jusqu'à un certain point, de l'opinion des partisans de Stalh.

Toutes ces réflexions confirment ce que j'ai avancé, ce que j'avois pour objet de prouver, ce que je vais répéter encore, que les Chimistes ont fait du phlogistique un principe vague qui n'est point rigoureusement défini, & qui en conséquence s'adapte à toutes les explications dans lesquelles on veut le faire entrer: tantôt ce principe est pesant, & tantôt il ne l'est pas; tantôt il est le feu libre, tantôt il est le feu combiné avec l'élément terreux; tantôt il passe à travers les pores des vaisseaux, tantôt ils sont impénétrables pour lui: il explique à la fois la causticité & la non-causticité, la diaphanéité & l'opacité, les couleurs & l'absence des couleurs. C'est un véritable Protée qui change de forme à chaque instant.

Il est temps de ramener la Chimie à une manière de raisonner plus rigoureuse, de dépouiller les faits dont cette Science s'enrichit tous les jours, de ce que le raisonnement & le préjugé y ajoutent; de distinguer ce qui est de fait & d'observation d'avec ce qui est systématique ou hypothétique; enfin de faire en sorte de marquer le terme auquel les connoissances chimiques sont parvenues, afin que ceux qui nous suivront puissent partir de ce point & procéder avec sûreté à l'avancement de la Science: mais avant de développer mes idées sur la combustion & la calcination, qu'il me soit permis de m'arrêter à quelques considérations sur la nature de la chaleur & sur les effets généraux qu'elle produit.

Lorsqu'on échauffe un corps quelconque, solide ou fluide, ce corps augmente de dimension dans tous les sens, il occupe un volume de plus en plus grand: si la cause échauffante cesse, à mesure que le corps se refroidit, il repasse par les mêmes degrés d'extension qu'il a parcourus; enfin, si on le ramène au même degré de température qu'il avoit dans le premier instant, il reprend sensiblement le même volume qu'il avoit d'abord.

Il résulte de-là, que les molécules des corps ne se touchent point, qu'il existe entr'elles une distance que la chaleur augmente & que le froid diminue.

On ne peut guère concevoir ces phénomènes, qu'en

admettant l'exiſtence d'un fluide particulier dont l'accumulation eſt la cauſe de la chaleur, & dont l'abſence eſt la cauſe du froid : c'eſt ſans doute ce fluide qui ſe loge entre les particules des corps, qui les écarte & qui occupe la place qu'elles laiſſent entr'elles. Je nomme, avec le plus grand nombre des Phyſiciens, ce fluide quel qu'il ſoit, *fluide igné, matière de la chaleur* & *du feu.*

Je ne nie pas que l'exiſtence de ce fluide ne ſoit juſqu'à un certain point hypothétique; mais en ſuppoſant que ce ſoit une hypothèſe, qu'elle ne ſoit pas rigoureuſement prouvée, c'eſt la ſeule que je ſerai obligé de former. Les partiſans de la doctrine du phlogiſtique ne ſont pas plus avancés que moi ſur cet article, & ſi l'exiſtence du fluide igné eſt une hypothèſe, elle eſt commune à leur ſyſtème & au mien.

On conçoit que dans cet état des choſes, les molécules des corps n'auroient aucune liaiſon entr'elles, qu'il n'y auroit aucun corps ſolide ſi elles n'étoient retenues par une autre force, par l'attraction qui, quelle qu'en ſoit la cauſe, eſt une loi générale de la Nature à laquelle toute la matière paroît être ſoumiſe.

D'après ce premier aperçu, tous les corps de la Nature obéiſſent à deux forces, le fluide igné, la matière du feu qui tend continuellement à en écarter les molécules, & l'attraction qui contre-balance cette force : tant que la dernière de ces forces, l'attraction, eſt victorieuſe, le corps demeure dans l'état ſolide; ces deux forces ſont-elles dans un état d'équilibre, le corps devient liquide; enfin lorſque la force expanſive de la matière de la chaleur l'emporte, le corps prend l'état aériforme. Mais s'il n'exiſtoit que ces deux forces au moment où les corps ceſſent d'être dans l'état ſolide, le moindre accroiſſement de chaleur qu'ils recevroient ſuffiroit pour les vaporiſer, & non-ſeulement ils paſſeroient bruſquement à l'état aériforme, mais encore leurs molécules s'écarteroient de plus en plus indéfiniment. Mais il eſt une troiſième force qui empêche que cet effet n'ait lieu, c'eſt la peſanteur de l'atmoſphère; ſans cette preſſion, au moment où l'eau ceſſeroit d'être

glace, à zéro du thermomètre, elle se réduiroit en un fluide aériforme, tandis qu'au contraire cet effet n'a lieu qu'à une chaleur de 80 degrés, sous une pression de 28 pouces.

Pour nous former des idées nettes sur une matière aussi abstraite, empruntons une comparaison des objets qui nous sont les plus familiers: supposons pour un moment un espace, une caisse si l'on veut, dont les parois soient perméables à la matière de la chaleur : si l'on enferme dans cette caisse un certain nombre de corps, la matière de la chaleur qui sera renfermée avec eux se mettra dans une espèce d'équilibre dans tous ; si, par quelque moyen que ce soit, on introduit dans cette même caisse une nouvelle quantité de matière de la chaleur, il en résultera une nouvelle force qui écartera de nouveau les molécules des corps toujours jusqu'au point d'équilibre : mais on conçoit que cette matière de la chaleur ne se répartira pas également dans chacun des corps, qu'elle ne s'y répartira pas même en proportion de leur poids, ni de leur volume : la quantité que chacun pourra en admettre, dépendra de la grandeur des pores, des intervalles que laisseront entr'elles les molécules, de l'attraction plus ou moins grande que ces mêmes molécules exerceront les unes sur les autres; enfin de l'affinité plus ou moins grande qui existera entre les mêmes molécules & celles de la matière de la chaleur.

Ainsi, par exemple, plus les molécules seront près les unes des autres, moins elles admettront entr'elles de matière de la chaleur, & on peut en concevoir deux raisons; la première, parce qu'il existera peu d'espace entr'elles, par conséquent peu de place pour y loger de la matière de la chaleur; la seconde, parce que plus les molécules seront près, plus l'attraction mettra d'obstacle à leur écartement. La mesure de cette quantité de matière de la chaleur que chaque corps peut recevoir par un changement quelconque de température, a été nommée *capacité* pour contenir la matière de la chaleur : un moment de réflexion sur ce qui se passe dans l'eau, rendra tout ceci beaucoup plus sensible.

Si on plonge dans ce fluide des morceaux de différens

bois égaux entr'eux, par exemple, d'un pied cube, l'eau s'introduira peu-à-peu dans leurs pores; ils ſe gonfleront & augmenteront de poids: mais chaque eſpèce de bois admettra une quantité d'eau différente; les plus légers & les plus poreux en logeront davantage, ceux qui ſeront compactes & ſerrés, n'en laiſſeront pénétrer qu'une très-petite quantité; enfin la quantité d'eau qu'ils recevront, dépendra encore de l'affinité plus ou moins grande que les molécules de ces bois auront avec l'eau. On pourra donc dire que chaque eſpèce de bois a une capacité différente pour recevoir de l'eau; on pourra même, par l'augmentation du poids, connoître ce qu'ils en auront abſorbé; mais comme on ignorera la quantité d'eau qu'ils contenoient avant d'avoir été plongés dans l'eau, il ne ſera pas poſſible de connoître la quantité abſolue qu'ils en contiendront en en ſortant.

Toutes les mêmes circonſtances ſe retrouvent dans les corps qui ſont plongés dans le fluide igné, dans le fluide de la chaleur, avec cette différence ſeulement, que l'eau eſt un fluide incompreſſible, tandis que le fluide igné eſt doué d'une grande élaſticité, & qu'il doit préſenter des phénomènes particuliers dépendans de cette qualité.

Me voilà maintenant en état de déſigner, par des définitions préciſes, les différens états du fluide igné, ou principe de la chaleur. J'appellerai *feu combiné, chaleur combinée*, la portion qui eſt unie à un corps, tellement qu'on ne peut la lui enlever ſans le décompoſer, telle eſt celle qui exiſte dans l'acide nitreux, & qui ne devient libre que par la décompoſition de cet acide: la matière de la chaleur, dans cet état, paroît dépouillée de ſon élaſticité, elle n'eſt plus dans un état d'agrégation, mais elle fait partie conſtituante des corps, & ne produit plus d'effet échauffant.

Je déſignerai ſous le nom de *chaleur libre*, toute celle qui n'eſt point engagée dans une combinaiſon. Mais il eſt aiſé de concevoir que comme nous ne pouvons opérer que dans des milieux pour leſquels la matière de la chaleur a de l'affinité, elle ne peut être dans un état de liberté abſolue;

d'ailleurs, comme au moment où elle ſe dégage, elle ſe répartit dans les différens corps environnans, elle les *mouille*, pour ainſi dire, & elle y tient avec une adhérence plus ou moins grande.

D'après ces définitions, la chaleur qui diſparoît au moment où la glace ſe convertit en eau, eſt de la chaleur qui paſſe de l'état libre à l'état combiné; cette quantité de chaleur eſt conſtante & déterminée. On a obſervé en effet, que pour fondre une livre de glace, il falloit une livre d'eau à 60 degrés d'un thermomètre à mercure, diviſé en 80 parties: il n'exiſte plus de glace quelques inſtans après ce mélange, & toute l'eau eſt exactement à zéro du thermomètre. Il eſt clair que dans cette expérience la quantité de chaleur néceſſaire pour élever une livre d'eau de zéro du thermomètre à 60 degrés, a été employée à fondre une livre de glace, ou en d'autres termes, que cette chaleur a paſſé de l'état libre à l'état combiné.

Ce phénomène n'eſt pas particulier à la liquéfaction de la glace, il a généralement lieu dans le paſſage de tous les corps de l'état ſolide à l'état liquide; il y a toujours une portion de chaleur libre qui diſparoît & qui devient chaleur combinée; c'eſt ce qu'on obſerve pour la cire à 49 degrés $\frac{1}{3}$ du thermomètre, & pour le ſuif à 31 degrés $\frac{3}{4}$.

On en peut dire autant du paſſage des corps de l'état liquide à l'état aériforme; il y a également dans ce cas une quantité conſidérable de chaleur libre qui paſſe à l'état de chaleur combinée, & cette chaleur reparoît & redevient libre lorſque le corps repaſſe de l'état aériforme à l'état liquide.

J'appellerai avec M. Crawfort, *chaleur ſpécifique*, la quantité de chaleur libre néceſſaire pour élever la température d'un corps quelconque d'un certain nombre de degrés: cette quantité eſt variable dans tous les corps, mais elle eſt conſtante pour chacun, au moins dans l'intervalle d'un petit nombre de degrés; par exemple, depuis la congélation juſqu'à l'eau bouillante.

Il eſt clair *à priori*, & indépendamment de toute hypothèſe, que plus les molécules des corps ſont écartées les unes des

autres, plus elles doivent laiſſer entr'elles de capacité pour contenir de la matière de la chaleur, & plus par conſéquent leur chaleur ſpécifique ſera grande; ainſi la chaleur ſpécifique d'un corps liquide doit être moindre que celle du même corps lorſqu'il étoit dans l'état aériforme: elle doit être moindre encore quand il eſt dans l'état ſolide, & c'eſt en effet le réſultat conſtant des expériences qui ont été faites juſqu'à préſent ſur ce ſujet.

Il me reſte encore à dire un mot ſur ce qu'on doit entendre par l'expreſſion de chaleur ſenſible. En général, nous n'avons de ſenſation que par le mouvement; en ſorte qu'on pourroit poſer comme un axiome, *point de mouvement, point de ſenſation:* plus on réfléchira ſur cette aſſertion, plus on en reconnoîtra la vérité. Ce principe s'applique au ſentiment du froid & du chaud: lorſque nous touchons un corps froid, la chaleur, qui tend à ſe mettre en équilibre dans tous les corps, paſſe de notre main dans le corps que nous touchons, & alors nous avons la ſenſation du froid. L'effet contraire arrive lorſque nous touchons un corps chaud; la matière de la chaleur paſſe du corps chaud à notre main, & nous avons la ſenſation du chaud. Si le corps & la main ſont de même température, nous n'éprouvons aucune ſenſation, ni de chaud ni de froid, parce qu'encore une fois il n'y a point de ſenſation ſans un mouvement qui l'occaſionne. On pourroit donner à cette chaleur le nom de *chaleur ſenſible*, ſi M. Crawffort, & quelques Phyſiciens Anglois modernes, n'euſſent donné un autre ſens à cette expreſſion.

Lorſque le thermomètre monte, c'eſt une preuve qu'il y a un écoulement de chaleur libre qui ſe répand dans les corps environnans: le thermomètre qui eſt au nombre de ces corps, en prend ſa part, en raiſon de ſa maſſe & de la capacité qu'il a lui-même pour contenir la matière de la chaleur. Le changement du thermomètre n'annonce donc qu'un déplacement de la matière de la chaleur; il n'indique tout au plus que la portion qu'il en a priſe; mais il ne meſure pas la quantité totale qui a été dégagée, déplacée ou abſorbée: nous

nous n'avons encore de moyen exact pour remplir cet objet, que celui imaginé par M. de la Place. *(Voyez Mémoires de l'Académie, 1780, page 364).* Il consiste à placer le corps ou la combinaison d'où se dégage la chaleur, au milieu d'une sphère creuse de glace : la quantité de glace fondue est une mesure exacte de la quantité de chaleur qui s'est dégagée.

Par une suite nécessaire des différentes notions que je viens de donner, toutes les fois qu'un corps passera de l'état aériforme à l'état liquide, ou mieux encore, de l'état aériforme à l'état solide, il y aura un dégagement considérable de chaleur, c'est-à-dire, une quantité considérable de chaleur qui passera de l'état de chaleur combinée à l'état de chaleur libre. Or, l'air atmosphérique, ou plutôt l'air vital contenu dans l'air de l'atmosphère, étant de tous les fluides élastiques aériformes que nous connoissons, celui qui contient le plus de chaleur combinée, il en faut conclure, que c'est celui de tous qui doit laisser échapper le plus de chaleur libre lorsqu'il passe de l'état aériforme à l'état concret.

Ces principes une fois posés, considérons un moment les principaux phénomènes qui accompagnent la combustion ; ils sont au nombre de quatre.

Premièrement, il n'y a de combustion réelle, de dégagement de flamme & de lumière, qu'autant que le corps combustible est environné d'air vital, & qu'il est en contact avec cet air : non-seulement la combustion n'a pas lieu dans le vide, ni dans aucune autre espèce d'air, mais elle cesse d'avoir lieu dès qu'on y plonge le corps enflammé ou allumé, de la même manière que si on le plongeoit dans de l'eau.

Secondement, dans toute combustion il y a absorbtion de l'air dans lequel se fait la combustion, & si on opère dans de l'air vital très-pur, on parvient, en prenant les précautions convenables, à l'absorber en totalité.

Troisièmement, dans toute combustion il y a augmentation dans le poids du corps brûlé, & cette augmentation est exactement égale au poids de l'air qui a été absorbé.

Quatrièmement, dans toute combuſtion il y a dégagement de chaleur & de lumière.

L'explication de ces phénomènes généraux de la combuſtion n'a rien d'embarraſſant, d'après les détails dans leſquels je ſuis entré ſur la conſtitution de l'air : ſi c'eſt du phoſphore qu'on brûle, l'air & le phoſphore diſparoiſſent, & on trouve à la place un acide concret en poudre blanche qui attire l'humidité avec une étonnante facilité : ſi c'eſt du ſoufre, on obtient de l'acide vitriolique, ſoit dans un état de concrétion, ſoit dans l'état d'une liqueur épaiſſe, & d'une peſanteur ſpécifique double de celle de l'eau : ſi c'eſt un métal qu'on a calciné, le réſultat de l'opération eſt une chaux concrète. L'air vital paſſe donc dans la combuſtion du phoſphore & du ſoufre, de l'état aériforme à l'état ſolide, ou au moins d'un fluide très-denſe ; il doit donc, dans ces deux cas, abandonner la matière de la chaleur qui lui étoit combinée, & qui le conſtituoit fluide aériforme : mais la lumière & la flamme doivent être plus vives dans la combuſtion du phoſphore que dans celle du ſoufre, par deux raiſons : la première, parce qu'il s'abſorbe plus d'air dans la combuſtion du phoſphore que dans celle du ſoufre ; la ſeconde, parce que la combuſtion du phoſphore étant plus rapide que celle du ſoufre, il y a plus d'air décompoſé dans un temps donné, & par conſéquent plus de matière de la chaleur qui devient libre à la fois.

S'il n'y a pas de chaleur & de lumière auſſi ſenſibles dans la calcination des métaux, c'eſt qu'en général la décompoſition de l'air eſt extrêmement lente dans cette opération ; mais lorſqu'il eſt poſſible de la rendre plus prompte, comme dans la calcination du fer & du zinc dans l'air vital, alors la calcination devient une véritable combuſtion, & elle eſt accompagnée de dégagement de flamme, de chaleur & de lumière.

Je n'ai parlé juſqu'ici que d'un cas très-ſimple de la combuſtion, c'eſt celui où l'air paſſe de l'état aériforme, à l'état concret ou liquide, mais cette circonſtance ne ſe

rencontre pas dans toutes les combuſtions: dans celle de charbon, par exemple, le réſultat de la combuſtion eſt de l'air fixe ou acide charbonneux, & cet acide eſt encore dans l'état aériforme. Si donc l'air vital ne laiſſe échapper la matière du feu qui lui étoit unie, qu'autant qu'il perd l'état aériforme, il ne devroit pas y avoir de dégagement de chaleur dans la combuſtion du charbon; cette circonſtance qui ſemble contrarier les idées générales que j'ai cherché à donner de la combuſtion, exige quelques détails particuliers.

J'obſerverai d'abord que dans la formation de l'air fixe, ou ce qui eſt la même choſe, dans la combuſtion du charbon dans l'air vital, le charbon diſparoît en entier, & que la quantité de cette ſubſtance qui ſe trouve diſſoute ainſi dans l'air vital, eſt de plus du tiers de ſon poids: mais loin que l'air qui a reçu une auſſi grande quantité de matière, & qui l'a logée entre ſes molécules conſtituantes, ait augmenté de volume, il ſe trouve au contraire diminué d'un dix-neuvième: il eſt donc évident que les particules élémentaires de l'air vital ſe ſont rapprochées; que les intervalles qu'elles laiſſoient entr'elles ont été diminués, & que par cette ſeule cauſe une partie de la matière de la chaleur qui y étoit logée, a dû en être chaſſée. Il eſt évident, d'un autre côté, que les molécules élémentaires du charbon n'ont pu ſe loger entre celles de l'air vital ſans en chaſſer la matière de la chaleur, puiſqu'une molécule de matière ne peut occuper la place d'une autre molécule; il a donc dû y avoir encore par cette ſeconde cauſe une portion de matière de la chaleur expulſée qui eſt devenue libre.

Cette conſidération ſe trouve appuyée par une expérience déciſive, c'eſt qu'il faut moins de matière de la chaleur pour élever la température de l'air fixe d'un certain nombre de degrés, que pour élever celle de l'air vital du même nombre de degrés: l'air fixe a donc moins de capacité que l'air vital pour contenir la matière de la chaleur; donc toutes les fois que de l'air vital ſe convertira en air fixe, il y aura une portion de chaleur qui deviendra libre, & c'eſt ce qu'on obſerve dans

la combuſtion du charbon : ſi cette combuſtion ſe fait avec moins d'activité que celle du phoſphore, c'eſt par la raiſon que le produit qui en réſulte, étant une ſubſtance aériforme, l'air fixe, qui demande une certaine quantité de matière de la chaleur pour être tenu dans l'état d'élaſticité, il y en a moins qui devient libre.

On demandera peut-être comment il eſt poſſible que l'air vital diminue de volume en ſe convertiſſant en air fixe, quoiqu'il reçoive pendant la combuſtion une addition conſidérable de matière? je répondrai que cet effet remarquable s'explique d'une manière très-heureuſe, d'après les principes que j'ai expoſés dans ce Mémoire. On doit en effet concevoir deux manières de diminuer le volume d'un corps; la première en ſoutirant une partie de la matière de la chaleur logée entre les parties, & qui les écarte; la ſeconde, en augmentant l'attraction que les molécules exercent les unes contre les autres: la diminution de volume qu'on obſerve au moment où l'air vital ſe convertit en air fixe, tient probablement à cette dernière cauſe: les molécules de l'air vital acquièrent plus de maſſe par l'addition du charbon qui s'y combine; leur attraction doit donc être augmentée proportionnellement à l'augmentation de la maſſe; & puiſque le volume des fluides élaſtiques dépend de l'équilibre entre l'attraction des molécules & la force répulſive occaſionnée par la chaleur, il eſt clair que l'attraction augmentant, le volume doit dimiuuer.

Il ſuit de ces réflexions, que les circonſtances les plus favorables, toutes choſes d'ailleurs égales, pour obtenir une combuſtion forte, c'eſt-à-dire, un grand dégagement de matière de la chaleur, ſont 1.° lorſque les deux corps que l'on combine ſont chacun ſéparément dans l'état aériforme avant la combuſtion; parce que l'un & l'autre fourniſſent alors la plus grande quantité poſſible de chaleur & de lumière, 2.° quand ces mêmes corps, en ſe combinant, ſe réduiſent à l'état concret; 3.° lorſque l'effet eſt inſtantané: il n'y a aucune combuſtion dans laquelle ces trois circonſtances ſe rencontrent; la combuſtion de l'air inflammable

& de l'air vital en réunit bien deux, mais le produit qui eſt de l'eau, eſt dans l'état liquide, & non pas dans l'état concret; & il y a lieu de croire que cette combuſtion ſeroit plus rapide & plus vive ſi on opéroit dans une température très-froide & fort inférieure au terme de la congélation, parce que les deux airs paſſeroient tout d'un coup de l'état aériforme à l'état concret, & laiſſeroient échapper toute la matière de la chaleur qui conſtitue l'eau dans l'état liquide: cette combuſtion n'en produit pas moins une détonation violente & une forte chaleur, ſur-tout ſi l'on conſidère la médiocrité du poids des matériaux qu'on y emploie.

Il ne ſera pas inutile, en parlant d'air inflammable, de diſtinguer ce qu'on doit entendre par *ignition*, par *inflammation*, par *détonation:* ces trois expreſſions, dans l'état actuel de nos connoiſſances, ne peuvent pas être employées l'une pour l'autre, & il eſt néceſſaire de les définir.

L'ignition a lieu toutes les fois que le corps combuſtible n'eſt pas dans l'état aériforme, ni ſuſceptible de prendre l'état aériforme par la chaleur de la combuſtion; c'eſt ce qui a lieu dans la combuſtion du charbon bien calciné: alors il n'y a point de flamme, & la combuſtion ſe fait à la ſurface même du corps combuſtible.

L'inflammation au contraire a lieu lorſque le corps combuſtible eſt naturellement aériforme, ou qu'il eſt ſuſceptible de prendre l'état aériforme par la chaleur même de la combuſtion: l'air inflammable eſt dans le premier cas, l'eſprit-de-vin, l'éther, les huiles eſſentielles, quelquefois les métaux ſont dans le ſecond; ces ſubſtances ne ſont point combuſtibles dans leur état liquide, il faut qu'elles aient été réduites en vapeurs, c'eſt-à-dire, dans l'état aériforme, avant de pouvoir s'enflammer, & c'eſt la chaleur même de la combuſtion qui produit cet effet, ou au moins qui le continue.

A l'égard des huiles fixes, communément appelées *huiles graſſes*, & qui ſont toutes tirées des végétaux par expreſſion & ſans le ſecours de la diſtillation, on ſait qu'il entre dans leur compoſition une grande quantité d'air inflammable & qu'elles en ſont principalement compoſées: la chaleur même,

occaſionnée par la combuſtion, ſuffit pour dégager cet air qui s'enflamme enſuite; en ſorte que dans la combuſtion des huiles fixes il y a deux opérations très-diſtinctes, la décompoſition de l'huile, c'eſt-à-dire, ſa réſolution en air inflammable, & ſon inflammation. La mèche de coton qu'on emploie dans les lampes, n'y agit point comme combuſtible, & ce qui le prouve, c'eſt qu'on peut y ſubſtituer des mèches d'amiante & d'autres ſubſtances incombuſtibles: la mèche n'eſt donc qu'un aſſemblage de tuyaux capillaires rangés à côté les uns des autres, qui agiſſent *mécaniquement* pendant la combuſtion, ce ſont ces tuyaux qui portent à la flamme la quantité d'huile qu'elle eſt capable de décompoſer & de réduire en air inflammable; tandis que ſi l'huile n'eût point été diviſée, ſi elle eût été préſentée en maſſe à la flamme, elle n'auroit point acquis le degré de chaleur ſupérieur à l'eau bouillante, qui eſt néceſſaire pour la décompoſer.

Les mêmes circonſtances ſe retrouvent dans la combuſtion du bois, il y a de même décompoſition, dégagement d'air inflammable, & inflammation; lorſqu'enſuite les matériaux ſuſceptibles de prendre l'état aériforme ſont épuiſés, le charbon qui reſte n'eſt plus inflammable, & préſente les phénomènes de l'ignition.

Enfin la détonation eſt une troiſième ſorte de combuſtion toute particulière *; dans l'inflammation, il y a deux fluides aériformes, l'air inflammable & l'air vital qui ſe combinent, qui laiſſent ſubitement échapper la matière du feu avec laquelle ils étoient combinés, & qui ſe condenſent ſous la forme d'eau; dans l'ignition, c'eſt un corps concret, le charbon qui ſe combine avec une ſubſtance aériforme, l'air vital, qui le convertit en air fixe, & qui chaſſe une partie de la matière de la chaleur qui étoit logée dans ſes interſtices, ou plutôt qui y exiſtoit dans

* C'eſt de la détonation du nitre dont on entend parler ici, à l'égard de la détonation de l'air vital & de l'air inflammable dans les vaiſſeaux fermés, le bruit & l'exploſion dont elle eſt accompagnée, eſt un effet de la dilatation ſubite de l'eau qui ſe forme, & qui occupe un eſpace plus conſidérable que celui des deux airs, lorſqu'elle eſt dans l'état de vapeurs; mais bientôt elle ſe condenſe, & alors le volume des deux airs diſparoît.

un état de combinaiſon; dans la détonation, au contraire, ce ſont deux corps concrets qui ſe combinent l'un avec l'autre, & qui chaſſent réciproquement la matière de la chaleur qui leur étoit combinée; mais cette matière de la chaleur eſt fournie principalement & preſque excluſivement par le nitre; une foule de raiſons portent à le croire, & j'en ai expoſé quelques-unes lorſque j'ai parlé de la combinaiſon de l'air nitreux avec le principe oxygine, & de la formation de l'acide nitreux.

On voit par tout ce qui vient d'être dit, que la combuſtion en général & à un très-petit nombre d'exceptions près, eſt un phénomène dépendant de la conſtitution de notre atmoſphère; qu'un corps combuſtible eſt celui qui a la propriété de décompoſer l'air vital, celui avec lequel le principe oxygine a plus d'affinité qu'avec la matière de la chaleur; enfin que la combuſtion elle-même n'eſt autre choſe que l'effet qui a lieu dans le moment où le principe oxygine abandonne la matière de la chaleur pour s'engager dans une nouvelle combinaiſon.

Il eſt aiſé de voir que cette doctrine eſt diamétralement oppoſée à celle de Stalh & de tous ſes Diſciples: c'eſt dans les corps combuſtibles qu'ils plaçoient la matière de la chaleur, le feu combiné, le phlogiſtique qui s'échappe au moment de la combuſtion; j'avance au contraire, & je crois avoir démontré que l'air & le corps combuſtible y contribuent chacun; 1.° en raiſon de leur chaleur ſpécifique; 2.° en raiſon de la portion de chaleur combinée qui devient libre; mais comme l'expérience & l'analogie prouvent également que la chaleur ſpécifique de l'air & celle qui lui eſt combinée, eſt infiniment plus abondante que celle de quelque corps combuſtible que ce ſoit, ſi ce n'eſt l'air inflammable, il en réſulte que c'eſt l'air qui fournit la très-majeure partie de la matière de la chaleur qui ſe dégage pendant la combuſtion.

Quelques Phyſiciens, entr'autres M. Monge, qui adoptent ces mêmes principes en pouſſent encore plus loin les conſéquences; ils regardent comme une eſpèce de combuſtion tout mélange, toute combinaiſon dans laquelle il ſe dégage de la matière de la chaleur: ainſi lorſqu'on jette dans de l'eau de

l'esprit-de-vin, de l'acide vitriolique concentré, de la chaux vive, il s'excite une chaleur considérable. Comme dans les deux premiers de ces mélanges, les liqueurs réunies occupent moins de volume qu'elles n'en occupoient chacune séparément, les interstices qui existoient entre leurs molécules sont nécessairement diminués; il reste donc moins d'espace pour loger la matière de la chaleur; elle est donc obligée de se répandre au dehors dans l'état de chaleur libre, & de se répartir dans les corps environnans. C'est l'eau, dans cette combinaison, qui fournit la majeure partie de la chaleur, & on ne sauroit en douter quand on considère qu'elle contient beaucoup plus de chaleur spécifique que l'acide vitriolique & l'esprit-de-vin.

Je ferai remarquer ici un phénomène très-particulier qui a lieu dans le mélange de l'acide vitriolique avec l'eau, & qui me paroît confirmer d'une manière frappante ce que j'avance ici: si on prend de l'acide vitriolique très-concentré, & qu'on y mèle partie égale d'eau, il s'opère une grande chaleur, & la diminution du volume est considérable; si on ajoute à ce mélange, quand il est refroidi, une nouvelle partie d'acide vitriolique, la chaleur est moindre & la diminution du volume est également moindre; l'addition d'une troisième partie ne produit plus qu'une chaleur à peine sensible, & la diminution de volume se trouve moindre dans la même proportion. Enfin, ce n'est que lorsqu'on n'observe plus de diminution dans la somme des volumes des deux liqueurs mélangées, qu'il n'y a plus de chaleur. Il y a donc une relation entre la diminution du volume & la quantité de chaleur dégagée; quand l'une est à son *maximum*, l'autre y est aussi; quand l'une est réduite à zéro, l'autre y est également réduite. N'est-ce pas une nouvelle preuve que le fluide de la chaleur occupe les interstices des corps? Que toutes les fois que les interstices diminuent, il y a de la chaleur qui en est chassée & qui devient libre? Que toutes les fois qu'ils augmentent, il se forme en quelque sorte un vide qui se remplit aux dépens de la chaleur de tous les corps environnans? Je dirois presque que tous les corps de la Nature sont pour la matière

de

de la chaleur, ce qu'une éponge eſt pour l'eau : preſſez l'éponge, vous diminuez les petites cellules qui retiennent l'eau ; faites en ſorte de la dilater, auſſitôt les cellules augmentées ſe trouvent en état de loger une plus grande quantité d'eau. Ces idées au ſurplus ſur le dégagement de la matière de la chaleur qui a lieu lorſqu'on diminue le volume des corps, ne me ſont point propres. M.rs Vandermonde & Monge ont avancé la même choſe dans un Mémoire lû à l'Académie.

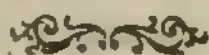
Les variations que tous les corps éprouvent, par l'effet du chaud & du froid, ſont une ſuite de ce phénomène ; on ne peut les échauffer, c'eſt-à-dire, on ne peut y introduire une plus grande quantité de matière de la chaleur ſans en écarter les parties, & c'eſt cet écartement qui fait place à la matière de la chaleur : réciproquement toutes les fois qu'on parvient à les amplifier, à augmenter leur volume d'une manière quelconque, ils acquièrent en même temps une plus grande capacité pour contenir la matière de la chaleur, & ils ſont alors diſpoſés à en recevoir de tous les corps environnans. Il eſt poſſible que ce ſoit à cet effet que tienne la chaleur très-ſenſible que prennent les métaux, lorſqu'on les écrouit ou qu'on en diminue le volume d'une manière quelconque ; c'eſt une manière de preſſer l'éponge & d'exprimer le fluide qu'elle contient.

On m'objectera peut-être que ſi l'explication que je donne de la chaleur qui ſe dégage du mélange de l'eau avec l'acide vitriolique, avec l'acide nitreux, avec l'eſprit-de-vin, étoit vraie, il devroit également y avoir chaleur lors de la diſſolution des ſels dans l'eau ; car il y a diminution de volume dans preſque toutes ces diſſolutions, c'eſt-à-dire, que le volume de la diſſolution eſt moindre que n'étoit la ſomme du volume de l'eau & du ſel à diſſoudre. Je répondrai que le principe, qu'il y a dégagement de chaleur toutes les fois qu'il y a diminution de volume, n'eſt vrai que dans la combinaiſon des liquides entr'eux ; il ne peut plus en être de même lorſqu'un des deux corps combiné change d'état par le réſultat de la combinaiſon ; c'eſt ce qui arrive aux ſels que l'on diſſout dans l'eau ; ils paſſent de l'état ſolide & concret

à l'état liquide; or ce paſſage ne peut avoir lieu ſans une abſorbtion de matière de la chaleur, ſans qu'une portion de matière de la chaleur ne ſe combine avec eux pour les conſtituer dans l'état liquide. Le refroidiſſement qu'on obſerve dans la diſſolution des ſels ne prouve donc autre choſe, ſinon qu'il y a plus de matière de la chaleur employée pour diſſoudre le ſel, qu'il ne s'en dégage des interſtices de l'eau par l'effet de la diminution du volume; toute cette chaleur au ſurplus qui a été employée à diſſoudre les ſels, reparoît au moment où ils criſtalliſent, ce qui prouve encore que leur paſſage de l'état liquide à l'état concret, eſt aſſujetti à la loi commune, comme leur paſſage de l'état concret à l'état liquide.

Je n'ai eu pour objet dans ce Mémoire, que de donner de nouveaux développemens à la théorie de la combuſtion, que j'ai publiée en 1777; de faire voir que le phlogiſtique de Stalh, eſt un être imaginaire dont il a ſuppoſé gratuitement l'exiſtence dans les métaux, dans le ſoufre, dans le phoſphore, dans tous les corps combuſtibles; que tous les phénomènes de la combuſtion & de la calcination s'expliquent d'une manière beaucoup plus ſimple & beaucoup plus facile ſans phlogiſtique qu'avec le phlogiſtique. Je ne m'attends pas que mes idées ſoient adoptées tout d'un coup; l'eſprit humain ſe plie à une manière de voir, & ceux qui ont enviſagé la Nature ſous un certain point de vue, pendant une partie de leur carrière, ne reviennent qu'avec peine à des idées nouvelles; c'eſt donc au temps qu'il appartient de confirmer ou de détruire les opinions que j'ai préſentées: en attendant, je vois avec une grande ſatisfaction, que les jeunes gens qui commencent à étudier la Science ſans préjugé, que les Géomètres & les Phyſiciens qui ont la tête neuve ſur les vérités chimiques, ne croient plus au phlogiſtique dans le ſens que Stalh l'a préſenté, & regardent toute cette doctrine comme un échafaudage plus embarraſſant qu'utile pour continuer l'édifice de la Science chimique.

Je donnerai dans un Mémoire particulier, quelques détails ſur les phénomènes de la détonation du nitre avec différens corps.



MÉMOIRE
SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS.
QUATRIÈME PARTIE.
Réflexions ſur la méthode de déterminer la Probabilité des évènemens futurs, d'après l'Obſervation des évènemens paſſés.

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

CETTE partie de l'Analyſe qui enſeigne à déterminer la probabilité des évènemens futurs, d'après l'ordre qu'ont ſuivi les évènemens paſſés du même genre que l'on a obſervés, eſt ſuſceptible d'un grand nombre d'applications utiles & curieuſes : j'ai cru en conſéquence qu'il pourroit n'être pas inutile d'examiner les principes ſur leſquels cette Analyſe eſt fondée ; tel eſt l'objet des Réflexions ſuivantes.

I.

SOIENT deux évènemens A & N que je ſuppoſe ſimplement contradictoires, c'eſt-à-dire, ne pouvant ſubſiſter enſemble & ayant néceſſairement lieu l'un ou l'autre. Si A a eu lieu m fois & N n fois, & qu'on demande la probabilité d'avoir en $p + q$ évènemens, p évènemens A & q évènemens N, la probabilité demandée ſera

$$\frac{p+q \ldots\ldots q+1}{1.2 \ldots\ldots\ldots q} \cdot \frac{\int x^{m+p}(1-x)^{n+q}\partial x}{\int x^{m}(1-x)^{n}\partial x},$$

cette intégrale étant priſe depuis $x = 1$ juſqu'à $x = 0$; telle eſt la règle générale.

II.

ON voit d'abord que cette loi n'exprime réellement la probabilité que dans les deux hypothèſes ſuivantes.

1.° Si la probabilité des évènemens *A* & *N* reſte la même dans toute la ſuite des évènemens; cela eſt évident par la formule même qui exprime la loi.

2.° Dans le cas où cette même probabilité eſt variable, mais où l'on ſuppoſeroit en même temps que la valeur de la probabilité, quoique pouvant être différente pour chaque évènement, eſt cependant priſe au haſard pour chacun, d'après une certaine probabilité générale x pour *A*, & $1 - x$ pour *N*.

Suppoſons, par exemple, une ſuite d'urnes qui renferment des boules blanches & des noires : il eſt clair qu'on peut ſuppoſer qu'il exiſte dans chaque urne un même nombre de boules blanches & de boules noires; & c'eſt la première hypothèſe. On peut ſuppoſer auſſi qu'on ait rempli les urnes, en tirant des boules au haſard d'une autre urne qui renfermoit un certain nombre de boules blanches & noires. Dans ce dernier cas qui repréſente la ſeconde hypothèſe, le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules noires n'eſt pas néceſſairement le même dans toutes les urnes, mais ſeulement la valeur moyenne de ce rapport eſt la même dans toutes, & eſt égale à celle du même rapport pour l'urne de laquelle toutes les boules ont été tirées. Si donc on ſuppoſe le nombre des boules infini, la formule ci-deſſus conviendra également aux deux hypothèſes.

Si on applique cette méthode à des cas réels, c'eſt-à-dire, à des évènemens naturels, on voit d'abord que chaque évènement en lui-même eſt déterminé par une loi, comme le tirage d'une boule le ſeroit également; qu'ainſi dans l'un & l'autre cas, ce que nous appelons *probabilité*, n'eſt que le rapport du nombre des combinaiſons qui amènent un évènement à celui des combinaiſons qui ne l'amènent pas; combinaiſons que notre ignorance nous fait regarder comme également poſſibles.

Ainſi la première hypothèſe conſiſte à ſuppoſer que le rapport entre ces combinaiſons également poſſibles, reſte le même pour tous ces évènemens; & la ſeconde conſiſte à

regarder ce rapport comme variable, mais déterminé de manière que la valeur moyenne des rapports possibles soit toujours la même pour chaque évènement.

Les résultats seront les mêmes, parce que ces deux hypothèses ne diffèrent réellement que par rapport à moi, qui, dans le premier cas, regarde tous les évènemens comme également probables, & qui, sachant dans le second qu'ils ne doivent pas l'être, mais ignorant la loi suivant laquelle leur probabilité varie, la suppose dépendante semblablement d'une même loi générale.

Mais dans toute autre hypothèse, la formule ci-dessus ne peut être regardée comme donnant des résultats rigoureux; & il faut examiner s'il n'y a pas entre ces hypothèses & celle qui suppose tous les évènemens indépendans, quelqu'autre supposition qui soit propre à représenter la probabilité, d'une manière plus vraie dans une partie des questions qu'on peut avoir à résoudre; autrement il suffiroit, au lieu d'employer sans restriction la méthode précédente, de suivre celle que j'ai indiquée dans l'*Essai sur la probabilité des décisions, page 178.*

I I I.

Si l'on examine la même formule générale, on trouvera que la probabilité sera la même dans quelqu'ordre que les m évènemens A & les n évènemens N se soient succédés.

Cette égalité a lieu nécessairement toutes les fois qu'on suppose x constant pour toute la suite des évènemens; mais il paroît en même temps qu'il doit en résulter une objection contre cette hypothèse.

Supposons en effet, que sur cent mille évènemens, A soit arrivé 51,000 fois & N 49,000 fois : si sur chaque suite de 100 évènemens consécutifs, on trouve qu'on a eu 51 fois A & 49 fois N, ne se croira-t-on pas autorisé à juger que dans les évènemens futurs, le nombre des A surpassera le nombre des N avec plus de probabilité, que si dans le même nombre on avoit eu quelquefois le nombre des N

ſupérieur à celui des *A*, & que l'ordre de ces évènemens eût été plus irrégulier?

Suppoſons enſuite que, ces évènemens étant partagés en ſuites de mille chacune, le nombre des *A* l'emporte beaucoup dans les premières, que cette ſupériorité diminue peu-à-peu, qu'elle devienne preſque nulle vers le milieu; qu'enſuite vers la fin *N* commence à l'emporter, de manière toutefois que la différence pour la totalité ſoit toujours de deux mille en faveur de *A*. Ne ſeroit-on pas alors avec quelque raiſon tenté de croire que *N* l'emportera ſur *A* dans l'avenir, ſi ſur-tout on ne conſidère pas un très-grand nombre d'évènemens futurs?

Les réſultats de l'hypothèſe de x conſtant ſont donc ici en contradiction avec ce que la raiſon paroît indiquer. Il faut donc examiner ſi l'on ne devroit pas, du moins dans pluſieurs cas, y ſubſtituer une méthode où la probabilité pût dépendre de l'ordre des évènemens.

I V.

Nous conſidérerons ici l'hypothèſe où l'on ſuppoſe x variable dans les deux cas, 1.° d'une ſuite d'évènemens qui ne ſont liés entr'eux par aucune loi relative au temps & à l'ordre de leur production; 2.° d'une ſuite d'évènemens liés entr'eux par une loi relative à cet ordre. Dans le premier cas, ſi on connoiſſoit la loi de la probabilité de ces évènemens, la formule qui l'exprimeroit ne ſeroit pas une fonction du temps ou de la place qu'occupe l'évènement; elle le ſeroit dans le ſecond.

Si, par exemple, je ſuppoſe des paquets de cartes rouges & noires, dont le nombre ſoit $m + n + p + q$, que j'aie tiré de $m + n$ de ces paquets m cartes rouges, & n noires, & que je cherche la probabilité de tirer des $p + q$ paquets reſtans, p cartes rouges & q noires. Si je ne ſai pas que ces paquets ont été formés en tirant au haſard des cartes d'un tas donné de cartes rouges & noires, il eſt clair que je n'ai aucune raiſon de ſuppoſer ni que le

rapport du nombre des cartes rouges à celui des cartes noires, ſoit conſtant pour tous les paquets, ni que la valeur moyenne de ce rapport ſuppoſé variable, ſoit la même pour tous; & en même temps je n'ai aucune raiſon de ſuppoſer que ce rapport varie ſuivant l'ordre dans lequel on range les paquets, ou ſuivant celui où l'on tire une carte de chacun.

Dans une ſuite au contraire d'évènemens naturels, il ſe préſente un grand nombre de cas où l'on peut ſuppoſer que l'ordre du temps influe ſur la production des évènemens.

V.

Puisque dans le premier cas la probabilité peut être différente pour les évènemens ſucceſſifs, & que cependant elle eſt indépendante de l'ordre qu'ils ſuivent, il eſt clair qu'elle ne peut être aſſujettie à aucune autre loi que celle qui naît de la probabilité qu'elle ſera plutôt la même que différente pour les divers évènemens. Suppoſons donc que t exprime le nombre des évènemens tant paſſés que futurs, $t' = m + n$ celui des évènemens paſſés, $t'' = p + q$ celui des évènemens futurs, & que $x', x'', x''' \ldots\ldots x'''^{t}$ expriment des probabilités différentes en faveur de A; au lieu de la formule du *paragraphe I*, on aura pour la probabilité de p évènemens A, & de q évènemens N, dans t'' évènemens futurs, la fonction

$$\frac{t''.t''-1\ldots\ldots p+1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q} \times$$

$$\frac{\int\left[\frac{(x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t})^{m+p}}{t} \cdot \left(1-\frac{x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t}}{t}\right)^{n+q} \partial x' \partial x'' \ldots \partial x'''^{t}\right]}{\int\left[\frac{(x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t})^{m}}{t} \cdot \left(1-\frac{x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t}}{t}\right)^{n} \partial x' \partial x'' \partial x''' \ldots \partial x'''^{t}\right]}$$

les intégrales étant priſes t fois pour chaque x ſucceſſivement, depuis 1 juſqu'à 0; & l'on aura

$$\int\left[(x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t})^{m}(1-x'-x''-x'''\ldots x'''^{t})^{n} \partial x' \partial x'' \ldots \partial x'''^{t}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1.m+2\ldots\ldots m+t}\left[-\quad (t-1)^{m+t} \; x^{n}\right.$$

$$\pm\left(\frac{t}{2}\right)(t-2)^{m+t}\,2^{n}\ldots\ldots\ldots\pm t.1^{m+t}(t-1)^{n}]$$

$$\pm\frac{n}{m+1.m+2\ldots m+t+1}\,t\,[-t(t-1)^{m+t+n}$$

$$\pm\left(\frac{t}{2}\right).(t-2)^{m+t+2}\,2^{n-1}\ldots\ldots\mp t.(t-1)^{n-1}]$$

$$\pm\frac{n.n-1}{m+1.m+2\ldots m+t+2}\cdot\frac{(t+1).t}{1.2}[-t.(t-1)^{m+t+2}$$

$$\pm\left(\frac{t}{2}\right).(t-2)^{m+t+2}\,2^{n-2}\ldots\ldots\pm t.(t-1)^{n-2}]$$

$$\pm\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$\pm\frac{n.n-1\ldots\ldots1}{m+1.m+2\ldots m+t+n}\cdot\frac{t+n-1\ldots t}{1.2\ldots n}[t^{m+n+t}-t(t-1)^{m+n+t}$$

$$+\left(\frac{t}{2}\right).(t-2)^{m+n+t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots],$$

fonction que nous avons laiſſée ſous cette forme pour qu'il fût plus aiſé d'en ſaiſir la loi, & qui ſi on ſuppoſe $t=1$, ou un ſeul x, ſe réduit à

$$\frac{n.n-1\ldots\ldots\ldots1}{m+1.m+2\ldots\ldots\ldots\ldots m+n+1};$$

ce qui conduit au même réſultat que la formule ordinaire, comme cela doit être.

Suppoſons que l'on ait eu A deux fois de ſuite, & que l'on demande la probabilité de l'avoir une troiſième fois, elle ſera $\frac{3}{4}$ par la formule ordinaire, & par celle-ci $\frac{3}{5}$ ſeulement. Si l'on a eu trois fois A, & qu'on cherche la probabilité de l'avoir une quatrième, elle ſera par la première formule $\frac{4}{5}$, & par la ſeconde $\frac{40824}{67200}$, $>\frac{3}{5}$ mais $<\frac{4}{5}$.

Si l'on cherche la probabilité, que dans la ſuite indéfinie des évènemens, le nombre des évènemens A ſurpaſſera celui des évènemens N, elle ſera exprimée par la fonction

$$\frac{\int[(x'+x''\ldots\ldots x'''^{t})^{m}(t-x'-x''\ldots\ldots\ldots-x'''^{t})^{n}\,\partial x'\,\partial x''\ldots\ldots\ldots\partial x'''^{t}]^{\frac{1}{t}}}{\int[(x'+x''+x'''\ldots+x'''^{t})^{m}(t-x'-x''-x'''\ldots-x'''^{t})^{n}\,\partial x'\,\partial x''\ldots\partial x'''^{t}]};$$

les intégrales étant toujours ſuppoſées priſes depuis 1 juſquà o, par

par rapport aux x', x'', x''' .... x'''^{t}; mais celles du numérateur n'étant prises que depuis

$$x' + x'' + x''' \ldots\ldots\ldots + x'''^{t} = t$$

jusqu'à

$$x' + x'' + x''' \ldots\ldots\ldots + x'''^{t} = \frac{t}{a}$$

& faisant enfin $t = \frac{1}{0}$.

VI.

Si nous supposons maintenant qu'il existe une variation dans la probabilité, qui puisse dépendre de l'ordre des évènemens, soit x' la probabilité du premier A, & $1 - x'$ celle du premier N; $\frac{x' + x''}{2}$ & $\frac{2 - x' - x''}{2}$ pourront exprimer les probabilités du second A ou du second N, $\frac{x' + x'' + x'''}{3}$ & $\frac{3 - x' - x'' - x'''}{3}$ celles du troisième A ou du troisième N; & celles des r^{es} A ou N pourront l'être par $\frac{x' + x'' + x''' \ldots + x'''^{r}}{r}$ & $\frac{r - x' - x'' - x''' \ldots - x'''^{r}}{r}$; où l'on voit que x' est la probabilité de A au premier coup, x'' celle de A au second si elle est différente de celle du premier, x''' celle de A au troisième si elle est différente de celle des deux autres, & ainsi de suite.

On voit ensuite que comme l'on ne connoît pas la loi de l'ordre des évènemens, mais qu'on sait seulement qu'il peut en exister une, la méthode consiste, de même que dans *l'article précédent*, à prendre seulement la probabilité que celle des évènemens successifs sera ou ne sera pas la même, avec cette seule différence qu'ici l'on a égard à l'ordre que les évènemens se sont suivis.

Si donc on a un certain nombre d'évènemens A & N qui se sont succédés, & qu'on cherche la probabilité que dans un nombre donné d'évènemens futurs, les A & N suivront un ordre quelconque donné, on prendra successi-

vement pour chaque évènement A ou N, l'expreſſion qui lui convient, ſuivant le rang où il eſt arrivé, ou celui où l'on ſuppoſe qu'il doit arriver; on formera un produit de toutes ces valeurs ſucceſſives, 1.° pour les évènemens paſſés ſeulement, 2.° tant pour les évènemens paſſés que pour les évènemens futurs; le premier produit contenant r, x ſi r eſt le nombre des évènemens paſſés, & le ſecond contenant $r + r'$, x ſi r' eſt le nombre des évènemens futurs: on prendra $r + r'$ fois l'intégrale du ſecond produit ſucceſſivement pour chaque x, depuis 1 juſqu'à zéro; & r fois l'intégrale du premier produit pour chaque x, depuis 1 juſqu'à zéro; & l'intégrale du ſecond produit, diviſée par celle du premier, donnera la valeur de la probabilité cherchée.

On voit qu'ici la formule varie ſuivant l'ordre des évènemens paſſés & ſuivant celui des évènemens futurs.

Suppoſons ici qu'on ait eu deux fois A, & qu'on cherche la probabilité de l'avoir encore une fois, elle ſera $\frac{25}{42}$, qui eſt plus petit que $\frac{3}{4}$ que donne la méthode ordinaire, & que $\frac{3}{5}$ que donne l'hypothèſe du *paragraphe V.*

Si l'on a eu trois fois A, & qu'on demande la probabilité de l'avoir une quatrième, on trouvera qu'elle eſt $\frac{1799}{3000}$, au lieu de $\frac{4}{5}$ ou $\frac{40824}{67200}$ qu'on auroit eu dans les deux autres hypothèſes.

Comme ici on doit avoir une fonction différente, ſuivant l'ordre qu'on a ſuppoſé, ſoit aux évènemens paſſés, ſoit aux évènemens futurs, il eſt aiſé de voir qu'il faudra faire de nouveaux calculs pour chaque diſpoſition d'évènemens, ce qui, ſi les nombres r ou r' ſont fort grands, rendroit impoſſible l'uſage de cette méthode: on doit donc, dans les cas où cette hypothèſe paroîtroit pouvoir être admiſe, chercher à déterminer dans la ſuite des évènemens, telle qu'elle s'eſt offerte, un ordre conſtant qui y ait toujours été obſervé; cet ordre une fois ſuppoſé connu, on regardera ſa conſtance comme un évènement unique qui s'eſt répété ſans jamais manquer;

on cherchera ensuite la probabilité qu'il continue d'avoir dans la suite la même constance, & ce sera à cette nouvelle hypothèse que l'on appliquera le calcul.

Ainsi soit n le nombre des évènemens arrivés constamment, & p celui des évènemens futurs: la probabilité que cet évènement aura lieu, ou que cette loi sera observée pendant l'espace de ces p révolutions, sera exprimée par

$$\frac{\int\left[\left(x' \cdot \frac{x'+x''}{2} \cdot \frac{x'+x''+x'''}{3} \cdots \frac{x'+x'' \ldots x'''^{n+p}}{n+p}\right) \partial x \partial x'' \ldots \partial x'''^{n+p}\right]}{\int\left[\left(x \cdot \frac{x'+x''}{2} \cdot \frac{x'+x''+x'''}{3} \cdots \frac{x'+x'' \ldots + x'''^{n}}{n}\right) \partial x' \partial x'' \ldots \partial x'''^{n}\right]}.$$

Pour déterminer ensuite la valeur de

$$\int(x' \cdot x' + x'' \ldots x' + x'' \ldots + x'''^{n} \cdot \partial x' \partial x'' \ldots \partial x'''^{n}),$$

on prendra une série de termes z', z'', z''', z'''' . . . . . z'''^{n}, tels que

$$z' = 1,$$

$$\Delta z'' = \frac{n-1}{2},$$

$$\Delta z''' = \frac{n-2}{2} z'' + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3},$$

$$\Delta z'''' = \frac{n-3}{1 \cdot 2} z''' + \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z'' + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

. . . .

& la valeur cherchée sera $\frac{z'}{n+1} + \frac{z''}{n} + \frac{z'''}{n-1} + \frac{z''''}{n-2} +$ &c, ou $\int[(z' x^{n} + z'' x^{n-1} + z''' x^{n-2} + z'''' x^{n-3} +$ &c.$) \partial x]$, l'intégrale étant prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$.

On peut observer qu'il n'est pas nécessaire de connoître la valeur de cette formule pour être assuré, 1.° que plus n sera grand, plus p restant le même, on aura une grande probabilité d'avoir ces évènemens futurs assujettis à la même loi; en sorte que pour un nombre donné, on peut prendre n assez

grand pour que cette probabilité ſoit auſſi grande qu'on voudra; 2.° que n reſtant le même, plus p croîtra, plus cette probabilité diminuera; en ſorte que quel que ſoit n, elle deviendra néceſſairement trop petite pour une certaine limite des valeurs de p; & ainſi dans cette hypothèſe, la probabilité qu'une loi obſervée continuera d'avoir lieu, eſt néceſſairement décroiſſante, & par conſéquent on ne peut compter à chaque époque ſur la conſtance d'une loi, que pour un nombre p d'évènemens déterminé, ou pour un temps donné. Il eſt vrai que ſi dans ce temps donné & pour ces p évènemens, la loi continue de s'obſerver, l'on aura à cette époque ſoit une probabilité égale, que la loi ſera encore conſtante pour un nombre p' d'évènemens plus grand & pour un temps plus long, ſoit une probabilité plus grande pour une ſeconde ſuite de p évènemens, ou pour un temps égal au premier. Cette diminution dans la probabilité que la même loi embraſſera un plus grand nombre d'évènemens futurs, & s'obſervera dans des temps plus éloignés, s'accorde avec ce que la raiſon nous indique.

Nous n'oſerions nous répondre que la loi la plus régulière que nous obſervons dans les phénomènes, ſe conſerve ſans aucune modification pendant un temps indéfini. Nous ſuppoſons à la vérité qu'il peut exiſter une loi conſtante plus compliquée, qui pendant un temps ſemble la même à nos yeux que celle qu'on a d'abord établie, & qui enſuite s'en écarte d'une manière ſenſible; mais il eſt aiſé de voir que c'eſt préciſément le cas où la loi obſervée d'abord, ceſſant d'être conſtante, on lui en ſubſtitue une autre qui embraſſe à la fois les phénomènes auxquels la première loi répondoit & ceux qui paroiſſent y échapper.

VII.

NOUS avons donc ici trois hypothèſes différentes; 1.° celle où la probabilité eſt conſtante, c'eſt-à-dire, où l'on ſuppoſe chaque évènement également probable, ou du moins la probabilité moyenne pour chacun, déterminée d'une manière

ſemblable; 2.° celle où l'on ſuppoſe cette probabilité variable, mais indépendante du temps où les évènemens ſont arrivés, & de l'ordre dans lequel ils ont été obſervés; 3.° celle où on les ſuppoſe dépendans, ou plutôt pouvant dépendre de cet ordre.

Cette dernière hypothèſe eſt la plus générale, & même c'eſt celle à laquelle on doit s'arrêter toutes les fois qu'on n'a aucun motif de croire que l'une des deux premières doit être préférée : en effet, dans l'une on ſuppoſe la probabilité conſtante; dans la ſeconde, on la ſuppoſe indépendante de l'ordre des évènemens; ſuppoſitions qui peuvent n'être pas rigoureuſement légitimes, au lieu que dans la troiſième on ne fait proprement aucune ſuppoſition : le cas de la probabilité conſtante & celui de la probabilité indépendante de l'ordre des évènemens, y entrent même chacun avec l'eſpèce de probabilité que l'obſervation peut donner à l'une ou à l'autre hypothèſe : ainſi toutes les fois que l'on voudra connoître, d'après les évènemens, une loi obſervée dans la Nature, on commencera d'abord par déterminer, d'après l'examen de ces évènemens, quelque loi conſtante à laquelle tous ces évènemens aient été aſſujettis, ou ſuivant laquelle ils puiſſent être claſſés & réduits à des évènemens plus généraux qui aient lieu conſtamment. On cherchera la loi la plus ſimple qu'il ſoit poſſible, celle qui, pour le même nombre d'évènemens obſervés, donne le plus grand nombre d'évènemens aſſujettis à la loi, & qu'on peut regarder comme amenés conſtamment; enſuite on cherchera la probabilité que cette loi ſera obſervée pour les temps futurs.

VIII.

La probabilité de la conſtance d'une loi obſervée, telle qu'on pourroit la déduire de la troiſième hypothèſe, & même celle qu'on détermineroit d'après la première, diminue ſi promptement, qu'à moins que le nombre des évènemens obſervés ne ſoit très-grand, on ne pourroit avoir que pour des temps très-courts une probabilité fort grande que cette loi

continuera d'avoir lieu; & cependant pour avoir un juſte motif de croire que cette loi eſt conſtante, il faut à la fois que cette probabilité ſoit très-grande, & qu'elle ſubſiſte telle pour un temps très-long.

Mais nous remarquerons que, s'il s'agit d'évènemens naturels dont chacun, quoiqu'aſſujetti à des loix différentes, a toujours paru conſtamment aſſujetti chacun à ſa loi particulière, cette conſtance obſervée dans tous ces évènemens doit augmenter pour chacun la probabilité de celle qui aura lieu dans la ſuite des évènemens futurs; & nous allons chercher l'expreſſion de la probabilité dans cette nouvelle hypothèſe.

Pour cela, 1.° nous déſignerons par $A', A'', A''' \ldots A''^m$, m évènemens que nous ſuppoſerons avoir eu lieu conſtamment, & nous ferons la probabilité moyenne du premier de chacun de ces évènemens égale à $\frac{x' + x'' + x''' \ldots + x'''^m}{m}$.

Comme ces évènemens ſont ſuppoſés indépendans les uns des autres, il paroîtroit qu'on dût exprimer la probabilité de chacun par des quantités différentes; mais il faut obſerver qu'ici ce ne ſont point les probabilités des évènemens particuliers $A', A'' \ldots A''^m$ que l'on examine, mais celle de l'évènement qui a lieu en général, plutôt que l'évènement contradictoire, c'eſt-à-dire, de l'évènement qui, par la nature des choſes, arrive conſtamment, tandis que l'évènement contradictoire n'arrive pas, & qu'ainſi on peut leur ſuppoſer une égale probabilité moyenne, comme on l'a ſuppoſé pour les évènemens ſemblables *paragraphe 5*.

2.° Soit $n' + 1$ le nombre de fois que l'évènement A' eſt arrivé, $n'' + 1$ le nombre de fois que l'évènement A'' eſt arrivé, & $n''^m + 1$ le nombre de fois qu'on a eu l'évènement A''^m, & qu'on cherche la probabilité que cet évènement A''^m arrivera p fois de plus.

On formera les produits

$$P' = \frac{x' + x'' \ldots + x_1''^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \ldots + x_1''^{m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \ldots x_1''^{m+3}}{m+3} \cdots$$

$$\cdots \frac{x' + x'' \ldots + x_1''^{m+n'}}{m+n'},$$

$$P'' = \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,}{}^{''m+1}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,}{}^{''m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,}{}^{''m+3}}{m+3} \ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,}{}^{''m+n''}}{m+n''},$$

....

$$P''^{m} = \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,m}{}^{''m+3}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,m}{}^{''m+1}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \ldots x_{,,m}{}^{''m+2}}{m+3} \ldots$$

$$\ldots \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,m}{}^{''m+n''^{m}}}{m+n''^{m}};$$

$$Q = \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,m}{}^{''m+1}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \ldots + x_{,,m}{}^{''m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \ldots x_{,,m}{}^{''m+3}}{m+3} \ldots$$

$$\ldots \frac{x' + x'' \ldots + x''^{m+n''^{m}} + p}{m + n''^{m} + p}:$$

dans lesquels on voit que les m premiers x qui appartiennent aux m premiers évènemens de chaque classe, sont les mêmes pour tous, mais que les autres x qui appartiennent aux évènemens subséquens de chaque classe, sont différens pour chacun.

Cela posé, on aura la probabilité cherchée, c'est-à-dire, celle d'avoir p fois de suite l'évènement futur A''^{m} exprimée par la fonction

$$\frac{\int (P' P'' \ldots\ldots P''^{m-1} Q \partial x')}{\int (P' P'' \ldots\ldots P''^{m} \partial x')}.$$

Si l'on suppose que les x sont les mêmes, alors on aura pour cette même probabilité

$\frac{n' + n'' \ldots\ldots + n''^{m} + 1}{n' + n'' \ldots + n''^{m} + p + 1}$, au lieu de $\frac{n' + n'' \ldots + n''^{m} + m + 1}{n' + n'' \ldots + n''^{m} + m + p + 1}$

qu'on auroit eu s'il n'y avoit eu réellement qu'un seul évènement.

Cette formule suffit pour montrer comment un fait naturel observé une seule fois, pourvu qu'il ait été bien observé & analysé de manière à n'être pas confondu avec un autre, peut être regardé comme un fait constant avec une très-grande probabilité; cette probabilité très-grande est alors l'effet de la constance observée dans un grand nombre de faits, qui

rend probable l'existence d'une constance semblable dans un autre fait.

IX.

Nous terminerons cet article par une dernière remarque, supposons qu'on ait observé deux suites S & S' des évènemens A & N; que dans la première le nombre des A soit m, & n celui de N; que dans la seconde on eût eu m' A & n' N, que le rapport de m à n diffère assez de celui de m' à n', pour que l'on puisse supposer que dans ces deux suites la probabilité de A ne soit pas la même, & on demande dans ce cas la probabilité d'avoir p fois A & q fois N dans $p + q$ évènemens futurs. Soit x la probabilité de A dans la suite S, x' cette probabilité dans la suite S'; $1 - x = z$, $1 - x' = z'$ les probabilités de l'évènement N; soit enfin $X = x^m . (1 - x^n)$, & $X' = x'^{m'} (1 - x)^{n'}$, nous prendrons d'abord dans $(x + z + x' + z')^{p+q}$ la suite de tous les termes où la somme des exposans de x & de x' égale p, & où celle des exposans z & z' égale q. Soit $A\ x^a\ x'^b,\ z^{a'}\ z'^{b'}$ un de ces termes, la probabilité qui en résulte sera

$$A . \frac{\int X x^a z^{a'} \partial x . \int X' x'^b z'^{b'} \partial x'}{\int X \partial x . \int X' \partial x'},$$

& la probabilité cherchée sera égale à la somme de tous ces termes ainsi formés, pourvu que l'on suppose qu'il est également probable qu'un évènement futur appartienne à la suite S ou à la suite S'.

Si au contraire, on suppose que cette même probabilité dépend de l'ordre observé dans ces deux suites, alors pour avoir la probabilité, on multipliera le terme

$$A . \frac{\int X x^a z^{a'} \partial x . \int X' x'^b z'^{b'} \partial x'}{\int X \partial x \int X' \partial x'}$$

par $\left(\frac{p + q}{a + a'}\right) \int (X \partial x)^{a + a'} . \int (X' \partial x')^{b + b'}$, & la probabilité cherchée sera égale à la somme de tous les termes, divisée

divisée par $\int (X \partial x + \int X' \partial x')^{p+q}$. Enfin on peut supposer cette probabilité réglée suivant le nombre des termes de chaque suite, & alors il faudra multiplier le même terme par $\frac{p+q}{a+a'} \int x''^{m+m'+a+b} (1 - x'')^{m+n'+a'+b'} \partial x''$, prendre la somme de tous ces termes, & la diviser par $\int x''^{m+m'} (1 - x'')^{n+n'} \partial x''$.

Ce que nous avons dit pour deux suites S & S', s'applique facilement à un nombre quelconque de suites semblables.

On pourroit choisir encore d'autres hypothèses, chacune desquelles doit être préférée suivant la nature des questions que l'on traite; car en général dans cette partie du calcul des probabilités où il s'agit sur-tout de trouver des valeurs moyennes, il ne le faut employer que pour les quantités dont le raisonnement ne peut nous apprendre ni la valeur ni les limites, & seulement comme un supplément à une connoissance directe à laquelle nous ne pouvons atteindre, & chercher à resserrer, autant qu'il est possible, le nombre des combinaisons que notre ignorance seule nous fait regarder comme indifférentes entr'elles.

CINQUIÈME PARTIE.

Sur la probabilité des faits extraordinaires.

I.

Si l'on s'étoit procuré une liste de faits extraordinaires, dont la vérité a été attestée par un témoin oculaire, & qu'on connût de plus, lesquels de ces faits ont été reconnus pour vrais, ou trouvés faux dans la suite par l'effet d'un examen approfondi, on pourroit en déduire par le calcul la probabilité d'un témoignage sur les faits extraordinaires; & si on dressoit cette liste suivant les différens ordres de l'invraisemblance de ces faits, on pourroit évaluer pour chaque classe la crédibilité des témoins.

Mais indépendamment de la difficulté de se procurer de telles listes, & de former exactement ces classifications, on

ſent combien on trouveroit d'obſtacles même pour diſtinguer ceux des faits extraordinaires qu'on doit regarder comme vrais ou comme faux.

II.

Au défaut de cette méthode directe nous en propoſerons une qui, à la vérité, eſt indirecte, mais dont on pourra faire des applications très-utiles.

Suppoſons que u déſigne la probabilité d'un évènement A, & e celle d'un évènement N, que u' & e' déſignent les probabilités de deux autres évènemens A' & N'; $\frac{uu'}{uu' + ee'}$ exprimera la probabilité de la combinaiſon des évènemens A, A'; & $\frac{ee'}{uu' + ee'}$ la probabilité de celle des évènemens N, N'.

Or il eſt aiſé de voir que ces deux combinaiſons A, A', & N, N' peuvent déſigner deux évènemens contradictoires entr'eux, pourvu que la production de ces évènemens ſoit dépendante de deux conditions.

Suppoſons, par exemple, que l'on ait $u + e$ urnes, que u de ces urnes contiennent u' jetons d'or, & e' jetons d'ivoire; & que e de ces urnes contiennent e' jetons d'argent & u' jetons de bois.

La probabilité, d'avoir une pièce d'or plutôt qu'une pièce d'argent ſera $\frac{uu'}{uu' + ee'}$, & celle d'avoir une pièce d'argent plutôt qu'une pièce d'or ſera $\frac{ee'}{uu' + ee'}$; en ſorte que, ſi l'on ſuppoſe les jetons métalliques égaux en poids l'un à l'autre, de même que les jetons d'ivoire & de bois, & que ſans voir celui qui a été tiré, on reconnoiſſe au poids qu'il eſt métallique, les probabilités qu'il ſera d'or ou d'argent ſeront

$$\frac{uu'}{uu' + ee'}, \quad \frac{ee'}{uu' + ee'}.$$

Suppoſons maintenant que u & e repréſentent les probabilités de la vérité d'un évènement extraordinaire & de la

fausseté du même évènement, & qu'en même-temps u' & e' expriment la probabilité qu'un témoignage sera ou non conforme à la vérité, & qu'un témoin ait assuré de la vérité de cet évènement. On voit que l'évènement extraordinaire déclaré vrai, représente ici le jeton d'or, que l'évènement extraordinaire faux & déclaré vrai représente le jeton d'argent, qu'on est ici dans le cas précisément où l'on sait d'avance que le jeton est de métal, & qu'ainsi la probabilité que l'évènement extraordinaire déclaré vrai l'est réellement, sera $\frac{u\,u'}{u\,u' + e\,e'}$, & celle qu'il est faux $\frac{e\,e'}{u\,u' + e\,e'}$.

Supposons par exemple, $e = \frac{999999}{1000000}$, & $u = \frac{1}{1000000}$; $u' = \frac{999}{1000}$, $e' = \frac{1}{1000}$, nous aurons $\frac{u\,u'}{u\,u' + e\,e'} = \frac{999}{1000998}$, & $\frac{e\,e'}{u\,u' + e\,e'} = \frac{999999}{1000998}$. L'on voit par cet exemple, qu'un témoignage duquel, pour un évènement ordinaire ou dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, il résulteroit une probabilité $\frac{999}{1000}$ de l'évènement affirmé, ne donneroit cependant, pour un évènement très-extraordinaire, qu'une probabilité moindre que $\frac{1}{1000}$.

I I I.

La probabilité u de l'évènement désigne ici cette probabilité prise en elle-même, & telle qu'elle existe, lorsqu'indépendamment de toute preuve relative à cet évènement individuel, on demande quelle est la probabilité qu'il a eu lieu plutôt que l'évènement contradictoire.

Mais on doit observer que cette probabilité doit être celle d'un évènement déterminé, comparée à la probabilité d'un autre évènement déterminé, qui ne peut subsister avec le premier, & non à celle d'un évènement quelconque de la somme des évènemens possibles.

Ainſi, par exemple, ſi on dit que dans une loterie de 100000 billets, c'eſt le numéro 99 qui eſt ſorti le premier: comme la ſortie de ce billet eſt auſſi probable que celle de tout autre billet déterminé, je dois regarder ſa ſortie comme auſſi probable que celle d'un évènement contradictoire. Je ferai donc dans ce cas $u = \frac{1}{2}$, & le témoignage qui m'aſſure de la ſortie de ce billet ne doit rien perdre de ſa force. Il n'en eſt pas de même ſi le témoignage a précédé la ſortie du billet; alors cette propoſition: *le numéro 99 ſortira*, eſt l'équivalent de celle-ci: *j'ai deviné d'avance le numéro qui doit ſortir*, la probabilité u d'avoir deviné juſte, ne doit être que $\frac{1}{100000}$; & ſi un témoin, dont la probabilité eſt $\frac{999}{1000}$, annonce qu'il a vu ſe réaliſer la prédiction d'un pareil évènement, la probabilité qui réſultera pour la vérité de ſon aſſertion, ſera $\frac{999}{100998}$.

Suppoſons encore qu'on ait un jeu de quarante cartes, & que l'on conſidère la probabilité d'avoir tiré deux fois de ſuite une carte déterminée, comme le roi de pique; il eſt clair que la probabilité de tirer deux fois le roi de pique, eſt en elle-même $\frac{1}{1600}$: mais ſi on la cherche relativement à celui qui annonceroit cet évènement comme étant arrivé, on obſervera que l'on doit regarder comme également poſſibles tous les évènemens où l'on aura amené deux fois la même carte. On ne doit donc regarder comme l'évènement contradictoire à l'évènement qui eſt arrivé, que celui d'amener une carte ſemblable, après avoir amené la première; & par conſéquent $\frac{1}{40}$ ſera la valeur de u. La détermination de ce qu'on doit regarder comme le fait contradictoire à celui dont on veut connoître la probabilité, peut avoir quelques difficultés dans l'application, mais on parviendra toujours à les lever au moyen du principe que nous venons d'expoſer.

IV.

QUANT aux quantités u' & e' qui déſignent ici la proba-

bilité d'un témoignage, il faut observer qu'il s'agit seulement de la probabilité du témoignage en lui-même, c'est-à-dire, de la probabilité de voir les objets bien ou mal, & de rendre ce qu'on a vu avec vérité; & il faut la considérer ici indépendamment du degré de possibilité que présente le fait considéré en lui-même, & par conséquent u' & e' expriment la probabilité du témoignage telle qu'on pourroit la connoître d'après les faits ordinaires qui ont une probabilité égale à celle du fait contradictoire. En effet, dans ce cas $u = \frac{1}{2}$ & $e = \frac{1}{2}$; donc $\frac{uu'}{uu' + ee'} = u'$, & $\frac{ee'}{uu' + ee'} = e'$. Cependant cette probabilité du témoignage n'est pas la même pour tous les faits; elle dépend, 1.° de la difficulté de les bien observer, 2.° des causes d'erreurs qui peuvent avoir une influence plus ou moins grande sur les témoignages, 3.° de la complication du fait en lui-même.

Quant à ce dernier objet, il faut remarquer, 1.° que l'on ne doit pas entendre cette expression, un fait simple, dans un sens rigoureux & métaphysique; mais dans ce sens, qu'un fait simple, est celui dont un homme d'une capacité ordinaire peut saisir l'ensemble & les détails d'un seul coup-d'œil sans un trop grand effort d'attention.

2.° Que par fait compliqué, on ne doit pas entendre deux faits isolés, mais une combinaison de deux faits d'où résulte une conséquence qui ne soit légitime que lorsque les deux faits sont vrais en même temps.

Cela posé, soit u' la probabilité du témoignage pour un fait simple, elle sera $u'u'$ pour un fait composé de deux faits simples, u'^3 pour un fait composé de trois faits simples, &c. Ainsi supposant en général une égale justesse & une égale bonne foi aux témoins, il est clair que celui qui peut d'un seul coup-d'œil voir un ensemble de trois faits dont chacun exigeroit toute l'attention d'un autre, aura pour ce fait une probabilité u', tandis que chacun des autres n'aura qu'une probabilité u'^3.

Il arrivera aussi très-souvent que des témoins peu éclairés, & ne sachant pas que la vérité d'un fait compliqué suppose celle de plusieurs faits simples, se croiront sûrs de la réalité de ce fait, quoiqu'ils n'aient vu ou cru voir que quelques-uns & quelquefois même un seul des faits qui forment cette combinaison; alors si le nombre des faits qu'ils ont vus est m, & n celui des faits qu'il auroit fallu observer de plus pour avoir vu l'ensemble du fait dont ils affirment la vérité, la probabilité de leur témoignage, au lieu d'être u'^{m+n}, ne sera plus que $\frac{u'^{m}}{2^n}$.

Soit donc u' & e' la probabilité de la vérité & de la fausseté produite par des témoignages, u'' celle d'un témoignage sur un fait simple, on aura ici pour la probabilité d'un témoignage $u' = \frac{u''^m}{2^n}$, & $e' = 1 - \frac{u''^m}{2^n}$; & si le nombre des témoins concordans est p, on aura $\frac{u'^p}{u'^p + e'^p}$ & $\frac{e'^p}{u'^p + e'^p}$, qu'il faut substituer à u' & e' dans la formule ci-dessus.

Comme la plupart des faits extraordinaires sont des faits compliqués, & presque toujours ne doivent ce caractère qu'à la réunion de plusieurs circonstances dont chacune en particulier ne seroit qu'un fait ordinaire, on sent combien la considération précédente doit affoiblir encore la force des témoignages.

V.

Si maintenant on cherche la probabilité que le fait extraordinaire déclaré faux par un témoin, sera vrai, elle sera exprimée par $\frac{u e'}{u e' + e u'}$, & celle que ce fait extraordinaire étant déclaré faux, est réellement faux, sera exprimée par $\frac{e u'}{u e' + e u'}$.

Suppoſons enfin p témoins qui atteſtent la vérité du fait extraordinaire, & q témoins qui la nient, la probabilité de la vérité de ce fait ſera exprimée par $\frac{uu'^p e'^q}{uu'^p e'^q + eu'^q e'^p}$, & celle de la fauſſeté par $\frac{ee'^p u'^q}{uu'^p e'^q + eu'^q e'^p}$; ſi $q = p$, ces deux probabilités deviennent $\frac{u}{u+e}$ & $\frac{e}{u+e}$, comme cela doit être, puiſque les témoignages n'ajoutent & n'ôtent rien ici à la probabilité du fait.

De plus grands détails ſeroient ici ſuperflus; il nous ſuffit d'avoir montré comment on peut expliquer par le calcul l'affoibliſſement qu'éprouvent les témoignages lorſqu'ils tombent ſur des faits extraordinaires.



THÉORÈME
SUR LES
ÉQUATIONS EN DIFFÉRENCES FINIES.

Par M. CHARLES.

Lû le 23 Nov. 1785.

CE théorème qui s'est présenté à moi sur les Équations en différences finies, à la suite d'un travail que j'ai entrepris sur ce sujet, peut s'énoncer ainsi, *il y a des équations en différences finies, qui ont deux intégrales complètes.*

DÉMONSTRATION.

Soit $V = 0$ l'intégrale complète de l'équation en différences finies du premier ordre $Z = 0$. (V est fonction de x, y, & d'une arbitraire a qui n'est pas dans Z). Si on différencie V en faisant a constant, & si on élimine l'arbitraire par le moyen des équations $V = 0$, & $V = 0$, il est clair qu'on retrouvera $Z = 0$. (δ indique que a n'a pas varié). Mais si on fait varier aussi a, on aura

$$\Delta V = \delta V + R \Delta a;$$

or cette équation, combinée avec $V = 0$, donnera également $Z = 0$ si $R = 0$, ce que M. de la Grange a remarqué depuis long-temps, pour les équations en différences infiniment petites.

Dans cette dernière supposition, a est donné par une équation sans différences, & par conséquent sa substitution dans V donne une équation unique sans arbitraire, qui satisfait encore à $Z = 0$, & qui n'auroit pu résulter de $V = 0$ par aucune valeur constante de a; tout cela est très-connu.

Mais dans le cas des différences finies, R contiendra le plus

plus souvent Δa, a dépendra donc d'une équation du premier ordre, & par conséquent contiendra une arbitraire.

EXEMPLE I.

Soit l'équation $g y = x \Delta y + \frac{\Delta y^2}{4 n^2}$ dont l'intégrale complète est $g y = 2 n a x + a^2$. ($\Delta x =$ la constante g); différenciant, on a $\Delta y = 2 n a$, équation qui combinée avec l'intégrale, donne la proposée.

Maintenant, si on fait varier à la fois x & a, on aura

$$\Delta y = 2 n a + \frac{\Delta a}{g} [2 n (x + g) + 2 a + \Delta a];$$

équation qui se réduira à $\Delta y = 2 n a$, si on fait

$$2 n (x + g) + 2 a + \Delta a = 0;$$

multipliant par $(-1)^{\frac{x}{g} + 1}$ & intégrant, on aura

$$-a(-1)^{\frac{x}{g}} = b + n(-1)^{\frac{x}{g}} \left(\frac{g}{2} + x\right).$$

(b est l'arbitraire). Substituant cette valeur de a dans la première intégrale complète, on trouve la seconde

$$g y = -n^2 x^2 + \left[\frac{g n}{2} + b(-1)^{\frac{x}{g}}\right]^2,$$

qui vérifie aussi la proposée.

Faisant varier b dans cette seconde intégrale, & suivant le même procédé, on trouveroit la première.

EXEMPLE II.

Soit $\Delta y = g \frac{\lambda - 1}{\lambda^{\frac{x}{g}}} \left[-n + \sqrt{\left(\frac{y}{g} \lambda^{\frac{x}{g}} + n^2\right)}\right]$,

dont l'une des intégrales est $y = 2 n a + a^2 \lambda^{\frac{x}{g}}$;

on trouvera pour la seconde

$$y = -\frac{4n^2\lambda g}{(\lambda+1)^2\lambda^{\frac{x}{g}}} + \frac{2n(\lambda-1)}{\lambda+1}b(-1)^{\frac{x}{g}} + \frac{b^2}{g}\lambda^{\frac{x}{g}}$$

a & b sont les arbitraires.

COROLLAIRE.

On sent bien qu'il y a des remarques analogues à faire sur les équations d'un ordre plus élevé ; par exemple, soit l'équation du second ordre

$$y = \frac{(m+n-2)\Delta y - \Delta^2 y}{(m-1)\times(n-1)} + \frac{k}{g}$$
$$\times \frac{[\Delta^2 y - (n-1)\Delta y]\times[(m-1)\Delta y - \Delta^2 y]}{(mn)^{\frac{x}{g}}(m-1)\times(n-1)\times(m-n)^2},$$

dont l'intégrale est $y = am^{\frac{x}{g}} + bn^{\frac{x}{g}} + \frac{kab}{g}$.
Différentiant, en faisant varier en même temps les arbitraires a & b, & faisant

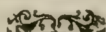
$$mm^{\frac{x}{g}}\Delta a + nn^{\frac{x}{g}}\Delta b + \frac{k}{g}\Delta(ab) = 0,$$

$$m(m-1)m^{\frac{x}{g}}\Delta a + n(n-1)n^{\frac{x}{g}}\Delta b = 0.$$

Les valeurs de Δy & $\Delta^2 y$, seront comme si les arbitraires n'avoient pas varié ; il faudra donc tirer a & b de ces dernières équations, ce qui donnera pour seconde intégrale,

$$y = -\left(\frac{m-n}{mn-1}\right)^2\frac{g}{k}(mn)^{\frac{x}{g}}$$
$$+[A+B(-1)^{\frac{x}{g}}].[\sqrt{(mn)}^{\frac{x}{g}}+f(A,B)];$$

f désigne une fonction déterminée des nouvelles arbitraires.



DE L'ACTION DU FEU,

Animé par l'air vital, sur les substances minérales les plus réfractaires.

Par M. LAVOISIER.

INTRODUCTION.

J'AI donné, dans un Mémoire imprimé dans le Recueil de l'Académie, *année 1782, page 466,* une description détaillée d'un soufflet, ou plutôt d'une espèce de trombe, au moyen de laquelle on peut entretenir & animer le feu des charbons avec cet air que M. Priestley a appelé *air déphlogistiqué,* & que je continuerai à appeler *air vital,* d'après l'Historien de l'Académie. J'ai fait voir qu'avec cet appareil on obtenoit un effet sensiblement plus fort qu'avec les plus grands verres ardens qu'on eût employés jusqu'ici, & j'ai promis de communiquer à l'Académie une suite d'expériences faites avec ce nouvel agent sur les substances minérales les plus réfractaires. Je m'empresse de remplir aujourd'hui une partie de l'engagement que j'ai contracté: je serai incessamment en état d'y joindre tout ce qui concerne les pierres précieuses *, & je ne doute pas que lorsque mes expériences auront été discutées par l'Académie, & qu'elles auront acquis de la publicité, les observations & les réflexions qui me seront communiquées, ne me mettent en état de donner par la suite plus d'étendue & de perfection à mon travail.

La manière dont j'ai opéré dans le très-grand nombre des expériences rapportées dans ce Mémoire, consiste à pratiquer un petit creux dans un gros charbon; à l'allumer à la flamme d'une chandelle ou d'une bougie, par le moyen d'un chalumeau; à mettre dans le charbon ainsi creusé & allumé, la

* Cette partie de mon travail a été imprimée dans le volume de 1782, *pages 436 & suivantes.*

matière ſur laquelle je veux opérer, & à le préſenter au courant d'air vital.

J'ai fait auſſi quelques expériences au dard de la flamme d'une lampe d'émailleur, à travers laquelle je faiſois paſſer un courant d'air vital, & je rendrai compte particulièrement des effets que j'ai obtenus; mais je préviens les lecteurs, qu'à moins que je n'avertiſſe du contraire d'une manière préciſe, les corps ſur leſquels j'ai opéré ont toujours été expoſés ſur un charbon ardent dont le feu étoit animé par l'air vital.

Pour rendre ce travail plus intéreſſant, j'ai cru devoir en rapprocher les expériences que nous avons faites en 1772, par ordre de l'Académie, avec le grand verre ardent de Tſchirnhauſen, qui lui a été donné par M. le Régent. Nous opérions le plus communément, dans ces expériences, ſur des ſupports de grès ou de porcelaine dure, & le foyer de la grande lentille étoit rétréci & raccourci par le moyen d'une ſeconde lentille. Les réſultats que nous avons obtenus n'ont point encore été publiés.

J'avois d'abord ſuivi, pour l'arrangement des matières, le ſyſtème adopté par M. Daubenton, au Cabinet du Roi; mais le réſultat même de mes expériences m'a forcé d'y apporter quelques modifications, & je me ſuis trouvé inſenſiblement rapproché de l'ordre qui depuis a été adopté par M. Bergman dans ſa Sciagraphie, & par M. Kirwan dans ſes Élémens de Minéralogie.

L'air vital dont je me ſuis ſervi, étoit tiré du mercure précipité rouge: j'ai quelquefois eſſayé de me ſervir de celui tiré du nitre, mais j'ai reconnu qu'il produiſoit moins d'effet.

Quoique ce genre d'expériences ſoit cher, il ne l'eſt pas cependant autant qu'on le croiroit au premier coup-d'œil: il eſt rare qu'une expérience emploie plus de ſix pintes d'air vital; la pinte revient à peu-près à quatre ſous ſix deniers, tout évalué, ainſi chaque expérience coûte vingt-cinq à trente ſous tout au plus. Les mêmes expériences, tentées avec un feu de charbon, coûteroient davantage; & en employant beaucoup plus de temps, on auroit beaucoup moins d'effet.

Je ne me diſſimule pas qu'on peut faire deux objections principales contre ce genre d'expériences : premièrement, les corps ſur leſquels on opère ayant le contact du charbon embraſé, les métaux ſe revivifient, & la plupart des ſels neutres ou des ſubſtances minérales, dans la compoſition deſquelles il entre un acide, ſe décompoſent.

Secondement, on n'eſt pas ſûr ſi le charbon ne fournit pas de l'alkali & de la terre aux corps ſoumis aux expériences, & ſi cette circonſtance ne favoriſe pas leur fuſibilité.

Sans diſconvenir entièrement de la réalité de la première de ces objections, j'obſerverai que ſi quelquefois il peut y avoir de l'inconvénient à mettre les corps en contact avec le charbon, il y en a bien davantage, ſur-tout dans les expériences de Lithéogéognoſie, à les placer dans des creuſets, c'eſt-à-dire, à les mettre en contact avec des matières plus ou moins fuſibles : cette conſidération eſt d'une telle importance, que dans les expériences qui ont été faites juſqu'ici, on ne peut preſque jamais juger ſi une ſubſtance fuſible l'eſt par elle-même ou par ſa combinaiſon avec l'argile du creuſet. Par une ſuite de ce même inconvénient, on ne peut preſque jamais répondre ſi les ſubſtances fondues ſont pures ; on a toujours à craindre qu'elles n'aient été altérées par l'argile du creuſet, & le *liquor ſilicum* fournit un exemple frappant de cette vérité. Cette combinaiſon de l'alkali fixe & du ſable attaque tellement les creuſets, qu'à moins d'avoir opéré dans un vaſe de fer, on obtient un réſultat plus ou moins mêlé d'argile, & qui donne de l'alun avec l'acide vitriolique, tandis que le *liquor ſilicum* fait dans le creux d'un charbon, eſt parfaitement pur, & qu'on ne peut y démontrer que de l'alkali fixe & de la terre quartzeuſe.

Quant à la ſeconde objection, je puis aſſurer, d'après une longue expérience, qu'elle eſt à peu-près deſtituée de tout fondement : le courant d'air qui frappe le charbon eſt ſi rapide, qu'il entraîne & diſſipe tous les corps qui ſont ſoumis à ſon action, à moins qu'ils ne ſoient en maſſes aſſez fortes ; à plus forte raiſon doit-il diſſiper les molécules terreuſes qui

ſe trouvent dans un état de diviſion exceſſif quand elles ſe dégagent d'un charbon qui brûle.

Au ſurplus, quand il ſeroit vrai qu'il ſe combine quelqueſois de petites parcelles terreuſes avec les corps mis en expérience, elles ſont ſi ténues & en ſi petite quantité, qu'elles ne peuvent produire un effet bien ſenſible, ſur-tout dans les expériences qui ne durent que deux ou trois minutes. Enfin ſi cette objection étoit fondée, le criſtal de roche fondroit dans toutes les expériences de ce genre, & cependant on verra qu'il n'éprouve qu'un très-léger ramolliſſement.

PREMIER ORDRE.

Terres & Pierres.

PREMIÈRE CLASSE.

Pierres quartzeuſes ou ſiliceuſes, dont le caractère eſt de faire feu avec l'acier : on y a joint quelques pierres mélangées, dans leſquelles la terre ſiliceuſe ſe rencontre en quantité prédominante par rapport aux autres matières.

Criſtal de Roche.

ON a placé un morceau de criſtal de roche de Madagaſcar dans le creux d'un charbon ardent, & on l'a expoſé à un courant d'air vital tiré du précipité rouge. Quoique l'activité du feu fût très-grande, il n'a pas fondu pendant l'eſpace de 2 minutes 30 ſecondes qu'a duré l'expérience, mais il s'eſt étonné & fendillé dans toutes ſes parties, ſes angles ſe ſont un peu arrondis, & il a donné quelques ſignes de ramolliſſement : l'ayant laiſſé refroidir; il étoit chatoyant & couleur d'opale dans quelques endroits, ce qui venoit de la ſéparation des couches, qui avoit été occaſionnée par la violence de la chaleur & des diverſes réfractions & réflexions qui réſultoient de cette ſéparation.

Suivant M. Bergman, le criſtal de roche n'eſt pas la terre ſiliceuſe pure; il eſt composé de quatre-vingt-treize parties de terre ſiliceuſe, de ſix d'argile & d'une de terre calcaire : il eſt probable que c'eſt ce mélange qui lui donne un commencement de diſpoſition à la fuſibilité, & je ſerois aſſez porté à croire que la terre ſiliceuſe très-pure ſeroit abſolument infuſible au degré de feu produit par mon appareil.

Dans les nombreuſes expériences que nous fîmes en 1772, ſur le criſtal de roche expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, il s'éclata, décrépita, s'étonna, mais nous ne pûmes obtenir aucune apparence de ramolliſſement, ni d'aucune autre altération; le foyer du grand verre étoit, dans cette expérience, comme dans toutes celles qui ſeront citées dans ce Mémoire, raccourci & rétréci par l'addition d'une ſeconde lentille.

Quartz blanc.

Un morceau de quartz blanc demi-tranſparent, a été expoſé ſur un charbon ardent à un courant d'air vital tiré, comme le précédent, du mercure précipité rouge. L'expérience a commencé à $9^h\,44'\,5''$: le quartz a donné des ſignes non équivoques de ramolliſſement à $9^h\,45'\,0''$; mais quoiqu'on ait continué à lui faire éprouver le même degré de chaleur pendant plus d'une demi-minute, on n'a pu parvenir à le fondre: l'ayant laiſſé refroidir, & l'ayant examiné à la loupe, il étoit caſſé en pluſieurs fragmens; on s'apercevoit que la ſurface avoit fondu en une eſpèce d'émail blanc très-poli, très-luiſant, & qui étoit rempli de petites bulles; l'intérieur ne préſentoit pas de marques bien ſenſibles d'altération.

Ce même quartz expoſé à un courant d'air vital tiré du nitre, a commencé à bouillonner au bout d'une minute & demie, & s'eſt couvert d'un émail blanc; on a fini au bout de deux minutes ſans l'avoir fondu.

Il réſulte de cette expérience, que l'action du feu animé par l'air vital, eſt un peu plus ſenſible ſur le quartz que ſur le criſtal de roche, puiſqu'il prend un commencement de fuſion à ſa ſurface.

L'expérience ſuivante ſemble encore confirmer cette différence entre le criſtal de roche & le quartz, en ſuppoſant toutefois qu'on puiſſe compter à un certain point ſur la pureté du quartz porphyriſé : au reſte, comme le quartz contient plus de terre argileuſe que le criſtal de roche, & que c'eſt cet excès de terre qui en diminue la tranſparence, il n'eſt pas étonnant qu'étant moins pur il ſoit plus fuſible.

Le quartz expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, n'éprouve pas plus d'altération que le criſtal de roche.

Quartz blanc porphyriſé.

EXPOSÉ au feu à 6h 10′ 5″, il a commencé à prendre une conſiſtance pâteuſe à 6h 11′ 5″: l'ayant touché avec un inſtrument de fer à 12′ 10″, il a cédé ſans être cependant parfaitement fondu; on l'a retiré peu de temps après: le morceau refroidi ſormoit une maſſe demi-vitreuſe, demi-tranſparente ſans couleur, luiſante à ſa ſurface, & contenant beaucoup de petites bulles dans ſon intérieur.

Le quartz avoit été porphyriſé ſous des meules de grès, & m'avoit été donné par M. Macquer.

Grès très-dur & très-fin de Sceaux-lès-Chartreux.

CE grès étoit luiſant dans les caſſures, & d'un grain preſque auſſi fin que du quartz; expoſé au feu à 10h 23′ 45″, ſes angles ſe ſont émouſſés à 10h 24′ 20″; il a commencé à bouillonner en quelques endroits à 24′ 25″, & a donné des ſignes non équivoques de ramolliſſement à 24′ 40″; on a fini à 24′ 50″: le morceau, en refroidiſſant, avoit une coûleur phoſphorique verdâtre; refroidi, il étoit très-dur, ſa ſurface étoit vitreuſe, & on y remarquoit de petites bulles, mais l'intérieur n'avoit rien de vitreux; dans cet état il reſſembloit parfaitement à un morceau de quartz très-blanc & d'un grain très-fin.

On voit que cette eſpèce de grès eſt à peu-près du même degré de pureté que le quartz, & qu'il ſe comporte comme lui à un très-grand degré de chaleur.

Le

Le même grès exposé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, n'a donné aucun indice de ramolliſſement, ni d'altération.

Sablon blanc, ou *Quartz aréneux d'Étampes, porphyriſé.*

On l'a exposé avec précaution au courant d'air pour empêcher la diſperſion des molécules : il a commencé à reſſentir l'impreſſion du grand feu à 57′ 0″ ; bientôt il a paru s'agglutiner, ſur-tout vers les bords, & a fondu complétement à 58′ 30″ : toute la matière s'eſt raſſemblée enſuite en une maſſe ronde qui a bouillonné dans des endroits ; mais la quantité de matière s'eſt trouvée trop conſidérable pour qu'elle ait pu fondre complétement juſqu'au centre.

On a fini à 7ʰ 0′ 30″ ; le morceau refroidi & caſſé, préſentoit une couche extérieure blanche vitreuſe, opaque, & qui avoit parfaitement fondu : quant à l'intérieur, il étoit d'un blanc opaque, & avoit toute l'apparence d'un morceau de porcelaine ; les parties en étoient bien liées, ſans qu'elles euſſent cependant éprouvé de fuſion complète. Ce ſablon m'avoit été donné par M. Macquer, mais j'ignore quelles précautions on avoit priſes pour éviter tout mélange de matières étrangères pendant la porphyriſation.

Quartz gris du Trou-du-Diable près le Valdajeon dans les Voſges.

Exposé au feu à 10ʰ 10′ 0″, il a bouillonné à 10′ 20″ en quelques endroits ; il s'eſt ramolli à 10′ 25″, & s'eſt fondu à peu-près complétement à 10′ 40″ ; la fuſion étoit un peu pâteuſe ; on a fini à 11′ 0″. La matière refroidie & vue à la loupe, conſiſtoit en une maſſe vitreuſe étonnée dans toute ſa ſubſtance, & très-caſſante ; elle étoit d'un blanc vitreux avec quelques taches noires dans des endroits, il y avoit des bouillons dans l'intérieur.

Ce quartz eſt opaque, d'une pâte fine ; il ſe caſſe en morceaux qui ont leur ſurface plane, à la différence des ſilex &

des pierres de ce genre qui se cassent le plus communément en morceaux dont les surfaces sont convexes ou concaves.

Le résultat de cette expérience annonce évidemment que le quartz qui en fait l'objet, est une pierre mélangée; il n'en a point encore été fait d'analyse chimique.

Quartz phosphorique des environs d'Alençon.

CE quartz, au premier coup-d'œil, a quelque rapport avec le grès, mais il a une apparence plus grasse dans ses fractures; on pourroit encore le confondre avec certaines pierres à plâtre, quoiqu'il n'ait cependant aucune propriété chimique commune avec elles; c'est le *petunt se* de M. Guettard: il a la propriété de devenir très-phosphorique quand on le fait chauffer à un degré de chaleur un peu supérieur à l'eau bouillante.

Exposé au feu à $10^h\ 4'\ 30''$, il s'est ramolli à $4'\ 45''$; il s'est trouvé complétement fondu à $4'\ 50''$, la fusion étoit cependant un peu pâteuse; il s'est rassemblé en un globule presque rond à $5'\ 25''$; on a fini à $5'\ 30''$. Cette matière demeure encore long-temps rouge après avoir été retirée du feu; cassée & vue à la loupe après qu'elle a été refroidie, elle s'est trouvée absolument vitreuse, tant à l'extérieur que dans l'intérieur, elle étoit seulement étonnée, fendillée & fêlée, comme il arriveroit à un corps vitreux qu'on auroit fait rougir & tremper dans l'eau.

Il est évident par le résultat de cette expérience, que l'espèce de quartz ou de grès qui en fait l'objet, est une pierre mélangée; sa qualité phosphorique mériteroit qu'il en fût fait un examen particulier.

Cette même substance exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y fond avec assez de facilité, & forme un verre gris-verdâtre demi-transparent.

Agate d'un blanc laiteux.

EXPOSÉE au courant d'air vital sur un charbon, elle s'y est ramollie en moins d'une minute, & on a obtenu un verre demi-transparent rempli de bulles.

Les agates, la calcédoine, les cailloux, la pierre à fusil étant un mélange de terre siliceuse & de terre argileuse, il n'est pas étonnant qu'elles soient toutes plus ou moins fusibles, & qu'elles se convertissent en une espèce de verre à un très-grand degré de chaleur.

Les différentes espèces d'agates que nous avons exposées en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'ont point éprouvé de fusion; quelques-unes se sont gonflées, se sont divisées par feuillets, & sont devenues friables & pulvérulentes: en même-temps il s'en élevoit une fumée sensible qui paroissoit n'être que de l'eau en vapeurs; toutes se sont décolorées.

Agate noire.

MISE au feu à $11^h\ 9'\ 35''$, elle a fondu par places, sur-tout à la surface; elle a perdu sa couleur & est devenue comme un émail blanc; elle a été retirée du feu à $11^h\ 10'\ 35''$.

Le morceau refroidi s'est trouvé rempli de petites bulles, tant intérieurement qu'extérieurement; sa surface sur-tout avoit pris une apparence tout-à-fait vitreuse; quelques parties, principalement dans l'intérieur, n'avoient point éprouvé une fusion complète, & conservoient encore la couleur noire.

Calcédoine.

MISE au feu à $11^h\ 19'\ 40''$, elle a augmenté de volume, & s'est ramollie à $20'\ 40''$; il s'y est ensuite formé beaucoup de gros bouillons ou trous: ayant donné un grand coup de feu, elle a fondu à peu-près complétement à $22'\ 0''$; le résultat de l'expérience, refroidi & vu à la loupe, consistoit en un verre très-blanc demi-transparent, rempli de bulles & de cavités de différentes grandeurs. On peut regarder cette pierre comme absolument fusible.

On sait par les expériences chimiques, que la calcédoine est un mélange de terre siliceuse & de terre argileuse.

La calcédoine, au foyer du grand verre ardent de Tschirn-

haufen, fe divife & fe décolore, mais fans aucun indice de fufion.

Cornaline.

ELLE a été expofée au feu à 11^h 7′; elle a commencé à paroître blanche à 7′ 35″; elle répandoit alors une lumière verte & phofphorique; on a fini à 9′ 30″.

Le morceau refroidi étoit prefque fans couleur; il avoit une furface vitreufe & luifante, & étoit arrondi par les angles; l'intérieur ne peut mieux fe comparer qu'à du criftal de roche étonné au feu, il étoit rempli de petites bulles très-fines, qui annoncent que la matière avoit été ramollie, quoiqu'il n'y eût pas eu, à proprement parler, de fufion: la couleur avoit entièrement difparu.

La cornaline, par l'analyfe chimique, fournit les mêmes principes que les autres agates & la calcédoine; la terre filiceufe en forme la bafe, & cette terre eft mêlée à un peu d'argile; à l'égard de la fubftance colorante, on en ignore abfolument la nature.

Cette fubftance n'a point été éprouvée au foyer du grand verre ardent.

Silex ou *Pierre à fufil.*

ON a employé la pierre à briquet brune & noirâtre qui fe trouve dans les craies; elle eft affez connue pour ne point exiger de defcription: on fait qu'elle ne diffère de l'agate que par le défaut de tranfparence, & parce qu'elle n'eft pas d'une pâte auffi fine: du refte tous les cailloux donnent, comme l'agate, par l'analyfe, environ un quart de leur poids d'argile, une très-petite portion de terre calcaire; le furplus eft de la terre quartzeufe.

Mife au feu à 9^h 54′ 35″, elle a rougi à 54′ 45″, en produifant une lumière phofphorique; à 54′ 55″, fes angles fe font arrondis; à 55′ 30″ elle a bouillonné à la furface; à 55′ 55″ elle a pris une demi-fufion pâteufe comme le quartz; à 56′ 30″ elle eft devenue molle, fans entrer

en fuſion complète. L'expérience n'a pas été portée plus loin. Le réſultat ayant été caſſé, & examiné à la loupe, ſa ſurface extérieure étoit luiſante, elle avoit un beau poli vitreux & étoit remplie de bulles aſſez groſſes. L'intérieur n'avoit pas éprouvé une fuſion auſſi complète & il n'avoit pas le brillant vitreux; il étoit devenu cependant parfaitement blanc & étoit rempli de petites bulles qui n'étoient pas dans la pierre à fuſil avant ſon expoſition au feu; ces deux circonſtances annoncent au moins un ramolliſſement très-conſidérable.

La diſpoſition à la fuſion eſt ordinairement d'autant plus grande dans les cailloux, qu'ils ſont plus colorés & mélangés d'une plus grande quantité de terre argileuſe.

Cette même pierre à fuſil expoſée au foyer du grand verre ardent, y a blanchi; elle a répandu de la fumée, mais elle n'a éprouvé ni ramolliſſement, ni fuſion.

Silex blanchâtre opaque des environs de Villers-Cotterets.

MIS au feu à $10^h\ 1'\ 7''$, ſes angles ſe ſont émouſſés à $1'\ 35''$; il a enſuite bouillonné à ſa ſurface, s'eſt gonflé & s'eſt ramolli à $2'\ 10''$ ſans ſe fondre complètement, mais en jetant une lumière phoſphorique: vu à la loupe après avoir été refroidi, ſa ſurface extérieure étoit abſolument vitreuſe & luiſante, remplie de bouillons; l'intérieur étoit d'un blanc plus mat; on y apercevoit des bouillons preſque par-tout; on n'oſeroit cependant pas aſſurer que la fuſion ait été juſqu'au centre: toute la ſubſtance étoit de la plus grande blancheur.

Caillou d'Égypte.

IL a été expoſé au feu à $10^h\ 27'\ 22''$, bientôt il s'eſt gonflé, & s'eſt préparé à la fuſion; mais le charbon s'étant caſſé à $27'\ 50''$, on n'a pas pouſſé l'expérience plus loin. Les endroits qui ont été le plus échauffés, ſe ſont convertis en une ſubſtance blanche, vitreuſe, remplie de bouillons.

Praſe.

LA Praſe eſt une eſpèce d'agate d'un beau vert, demi-

tranſparente. M. Bergman prétend que la terre ſiliceuſe qui en forme la baſe y eſt unie à un peu de magnéſie, à un peu de terre calcaire & de terre argileuſe. M. Achard a reconnu que 100 parties de cette pierre contiennent 95 parties de terre ſiliceuſe, 1,7 de terre calcaire, 1,2 de magnéſie, 0,4 de fer & 0,6 de cuivre.

Cette ſubſtance a été expoſée ſur un charbon allumé au courant d'air vital, à 10^h 57′ 40″, & elle en a été retirée à 59′ 55″; pendant cette épreuve elle avoit perdu ſa couleur, & ſes angles s'étoient arrondis. Refroidie & vue à la loupe, elle étoit brillante, & très-émaillée à ſa ſurface, blanche; on y remarquoit de petites bulles aſſez nombreuſes: l'intérieur reſſembloit parfaitement, pour le grain, à celui d'une porcelaine très-fine, avec cependant quelque choſe de plus vitreux.

Cette ſubſtance n'a pas été éprouvée au grand verre ardent.

Jade blanchâtre.

Mis au feu à 11^h 16′ 20″, il s'eſt fondu à 16′ 40″, en bouillonnant; on a fini à 17′ 15″. Le morceau vu à la loupe, préſentoit à ſa ſurface un verre opaque, jaunâtre & caverneux; l'intérieur étoit blanc, & avoit un coup-d'œil lamelleux, à peu-près comme de la craie de Briançon : le tout étoit fort dur, & la partie fondue étoit inattaquable à la lime.

Cette expérience annonce que le jade eſt une ſubſtance compoſée; la terre ſiliceuſe en fait cependant la baſe principale, d'après les expériences de M. d'Arcet.

Le jade expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, y fond en un verre demi-tranſparent qui contient de gros bouillons; lorſque le jade eſt coloré, on obtient un verre d'un brun-noir tranſparent.

Jaſpe gris, veiné de rouge.

Le jaſpe, d'après les expériences de M. d'Arcet & d'après celles de M. Bayen, eſt un compoſé de terre ſiliceuſe unie à une argile martiale.

Le morceau mis en expérience a été exposé au feu à 2^h $27'$ $0''$, & en a été retiré à $29'$ $35''$; il a blanchi, s'est déformé, s'est gonflé, est devenu poreux & a formé un résultat semi-vitreux, d'un blanc grisâtre.

On a été curieux de reconnoître si la fusion seroit plus complète en employant un plus grand courant d'air vital, & en conséquence le même morceau de jaspe a été exposé de nouveau au feu pendant deux minutes, en employant un plus gros ajutoir; mais il n'a pas été plus ramolli que la première fois, peut-être même l'a-t-il été moins. Refroidi & vu à la loupe, sa surface étoit absolument vitreuse & couverte de petits bouillons ou bulles; l'intérieur avoit une apparence quartzeuse. Il paroît que dans toutes ces pierres, la matière colorante s'évapore, & qu'elles deviennent de moins en moins fusibles, à mesure qu'elles en sont mieux dépouillées.

Jaspe vert, sanguin.

Mis au feu à 9^h $47'$ $35''$, il a donné des signes de ramollissement à $47'$ $50''$; il s'est gonflé sensiblement à $48'$ $0''$, & a fondu à $48'$ $10''$, en prenant une blancheur phosphorique; la fusion n'a pas été cependant assez complète pour que la matière pût se réunir en globules. On a fini à $48'$ $35''$; le morceau étoit devenu d'un blanc grisâtre, & avoit pris un coup-d'œil vitreux jusque dans son intérieur; il étoit rempli de bouillons qui annonçoient que la fusion avoit pénétré jusqu'au centre; la surface extérieure étoit très-lisse, elle avoit le poli du verre, & l'apparence encore plus vitreuse que l'intérieur.

Un échantillon du même morceau, essayé avec l'air tiré du nitre, a bouillonné, s'est déformé, mais la fusion n'a pas été complète, quoique le feu ait duré deux minutes; d'où l'on croit être en droit de conclure que l'air vital tiré du mercure précipité rouge, donne plus d'activité au feu, que celui tiré du nitre.

Cette propriété qu'a le jaspe, d'être très-réfractaire, quoique

très-coloré, semble annoncer que la terre siliceuse, dans cette pierre, est plus pure & moins mélangée de terre argileuse qu'on ne le croit communément. C'est à l'analyse chimique, par la voie humide, à donner des idées justes de sa composition.

Jaspe fleuri.

Il a été exposé au feu pendant 1′ 45″, pendant cet intervale il s'est ramolli par places, il a bouillonné & est devenu d'une consistance pâteuse sans se fondre.

L'expérience s'est faite avec de l'air vital tiré du nitre.

Espèce de Jaspe des environs de Plombières.

Ce jaspe est gris & rouge; quoique dur, il n'est pas susceptible d'un très-beau poli.

Il a été exposé à 5^h 50′ 0″, au courant d'air vital tiré du précipité rouge; à 5^h 50′ 25″ il s'est ramolli & a répandu une lumière phosphorique; il s'est gonflé à 51′ 5″, sans fondre complétement, cependant il bouillonnoit bien sensiblement à sa surface à 51′ 25″; on a fini à 51′ 55″. Le résultat refroidi étoit devenu parfaitement blanc, tant au dehors que dans l'intérieur; la surface avoit le poli & le luisant du verre, elle étoit parsemée de bulles; l'intérieur n'avoit pas tout-à-fait le même brillant, mais il àvoit l'aspect vitreux, & étoit rempli de bouillons qui n'existoient pas dans la pierre avant son exposition au feu, ce qui est une preuve de ramollissement.

Un fragment de ce même morceau de jaspe des environs de Plombières, exposé, le 1.er Juillet, sur un charbon ardent animé par de l'air vital tiré du nitre pendant une minute & demie, a bouillonné, s'est ramolli & rassemblé en globule rond; la fusion étoit pâteuse: l'expérience a fini parce que le charbon s'est troué.

Le même jaspe exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y a perdu sa couleur, mais il n'a donné aucun indice d'altération, ni de fusion.

Feld-spath

Feld-ſpath ou *Spath étincelant opaque de la montagne de Tarare près de Lyon.*

Le morceau ſur lequel on a opéré étoit très-régulièrement criſtalliſé, en ſorte qu'il ne peut y avoir aucun doute ſur ſa qualité & ſur ſa pureté. On ſait que les Chimiſtes regardent le feld-ſpath comme un mélange de terre ſiliceuſe, d'argile & d'un peu de terre magnéſienne. Suivant l'analyſe de cette ſubſtance, qui a été publiée par M. Kirwan, 100 parties de feld-ſpath en contiennent 67 de terre ſiliceuſe, 14 de terre argileuſe, 11 de terre peſante & 8 de magnéſie.

Expoſé graduellement au plus fort degré de feu que puiſſe produire l'appareil, il s'eſt ramolli, s'eſt arrondi & a formé un globule pâteux & mal fondu : c'étoit une eſpèce d'émail ou de ſubſtance vitreuſe, opaque & laiteuſe. Il a paru que plus on continuoit long-temps l'opération, plus la fuſion devenoit pâteuſe ; en ſorte que cette matière paroîtroit devenir de plus en plus réfractaire à meſure qu'elle éprouve plus long-temps l'action du feu. Cette circonſtance dépend probablement de ce qu'elle contient pluſieurs ſubſtances qui ſe communiquent réciproquement un peu de fuſibilité, mais à meſure que la plus volatile ſe diſſipe, la portion qui reſte eſt plus réfractaire.

Cette ſubſtance n'a point été eſſayée au verre ardent.

Conſéquences des expériences ſur les Pierres quartzeuſes.

Il réſulte des expériences dont on vient de rendre compte ſur les pierres quartzeuſes ou ſiliceuſes expoſées au feu animé par l'air vital ; premièrement, que le criſtal de roche n'eſt point ſuſceptible d'une véritable fuſion, au moins par aucun des degrés de feu que nous ayons pu employer juſqu'ici.

Secondement, que le commencement de ramolliſſement qu'éprouve cette ſubſtance, tient vraiſemblablement à la petite portion de terre argileuſe qui entre dans ſa compoſition.

Troiſièmement, que le quartz, les agates, les cailloux,

& en général toutes les pierres quartzeuses & siliceuses, même celles qui sont absolument sans couleur, éprouvent non-seulement un ramollissement sensible, mais encore une sorte de fusion, en raison de ce que la terre argileuse entre pour une portion plus considérable dans leur composition, ainsi que l'analyse chimique le démontre.

Quatrièmement, que toutes les pierres quartzeuses ou siliceuses colorées, sont plus ou moins fusibles, suivant la quantité de matière colorante qu'elles contiennent, mais que dans toutes, cette matière colorante est volatile; & qu'à mesure qu'elle quitte la terre quartzeuse, cette dernière diminue de fusibilité.

Cinquièmement, que le sablon ne doit pas être regardé comme une substance absolument homogène & pure, qu'il tient plus du quartz que du cristal de roche, & qu'il est même plus fusible que le premier.

Sixièmement, que toutes les expériences faites sur les terres & pierres de cette classe, prouvent évidemment que le feu produit par mon appareil est beaucoup plus fort que celui qu'on obtient au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, même lorsqu'il est armé d'une seconde loupe qui en raccourcit & qui en rétrécit le foyer.

DEUXIÈME CLASSE.

Terres & pierres argileuses, & leurs composés salins : le caractère de ces pierres & terres est de ne point faire effervescence avec les acides, ni feu avec l'acier, à moins qu'elles n'aient été poussées au feu.

Terre d'alun.

ON a humecté de la terre d'alun avec de l'eau pure; mais quelques précautions que l'on ait prises, dès qu'elle étoit sèche, elle étoit emportée par le courant d'air : on est

cependant parvenu, avec de grandes précautions, à en conserver une petite portion dans le creux du charbon; elle y a fondu, sans cependant prendre la figure ronde. Le morceau refroidi étoit d'un vert sale hépatique; il étoit ramifié comme un bois de cerf; il étoit dur & rayoit très-bien le verre.

Cette même terre exposée, en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'a donné aucun indice de ramollissement, de fusion ni d'altération. On s'est persuadé que la couleur blanche de cette terre, en réfléchissant les rayons solaires, devoit diminuer l'action du foyer: en conséquence on a essayé d'y mêler du noir de fumée, & il en a résulté une poudre grise qui ne s'est pas fondue davantage; le charbon a brûlé & la terre est restée blanche.

On a essayé de substituer du noir d'ivoire au noir de fumée, & alors il y a eu fusion, parce que le noir d'ivoire contient une sélénite phosphorique qui a servi de fondant.

Alun vitriolique.

On a exposé de l'alun, déjà préalablement calciné à un feu doux, au courant d'air vital; il s'est opéré dans le premier instant une fusion aqueuse; la matière a bouillonné, elle s'est desséchée, elle s'est rapprochée sur elle-même & a diminué beaucoup de volume; enfin il n'est plus resté qu'une matière grise opaque, demi-vitreuse, en très-petite quantité proportionnellement à celle de l'alun qui avoit été employé; elle étoit en petites ramifications comme des bois de cerf. L'alun se décompose dans cette opération; l'acide forme du soufre; une partie de la terre ou base de l'alun est entraînée & volatilisée, une petite portion reste dans un état de demi-fusion.

La petite ramification refroidie étoit une substance vitreuse, opaque, d'un blanc grisâtre, & inattaquable par la lime.

Alun nitreux.

On a exposé, sur un charbon au courant d'air vital, le sel résultant de la combinaison de l'acide nitreux & de la terre de l'alun; il s'est opéré dès le premier instant une fusion

aqueuſe : lorſque la matière a été à peu-près deſſéchée, il n'y a point eu de détonation proprement dite, mais elle brûloit dans les endroits où elle étoit en contact avec le charbon, avec une eſpèce de flamme phoſphorique. En continuant de pouſſer au feu, la matière a pris de la retraite, & il n'eſt plus reſté qu'une ramification griſe, opaque, ſemi-vitreuſe.

L'expérience a duré 4 à 5 minutes : le réſultat refroidi s'eſt trouvé être une ſubſtance blanche un peu griſâtre, abſolument opaque, aſſez bien fondue, très-dure, inattaquable à la lime, & rayant le verre.

Argile blanche très-douce au toucher, ou *eſpèce de Kaolin de Bétheux.*

CETTE terre échauffée trop bruſquement, décrépite & ſe diſſipe en éclats : elle a été expoſée au feu pendant deux minutes; d'abord elle n'a fondu que vers les angles, & même avec beaucoup de difficulté, inſenſiblement la fuſion eſt devenue complète, mais très-pâteuſe.

Il eſt reſté un globule de verre tranſparent, blanc, un peu jaunâtre, rempli de bulles dans ſon intérieur; il étoit dur, rayoit le verre, & la lime ne l'entamoit qu'avec quelque difficulté.

Toutes les ſubſtances argileuſes, même celles qui ſont ſans couleur, fondent au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, & donnent des verres plus ou moins colorés, plus ou moins tranſparens; ce qui prouve que les argiles en général ne ſont point des ſubſtances pures, & qu'elles ſont toutes un mélange de ſubſtances de différentes natures.

Argiles mêlées de terre ſiliceuſe ou calcaire.

TOUTES les argiles expoſées au feu animé par l'air vital, fondent avec aſſez de facilité lorſqu'elles contiennent de la terre ſiliceuſe; il en réſulte une fuſion pâteuſe, & des verres demi-tranſparens parſemés de bulles, & plus ou moins durs.

Le mélange de terre calcaire rend également les argiles

plus fusibles, les verres qu'on obtient sont en général plus transparens.

Enfin l'addition du fer rend toutes ces matières beaucoup plus faciles à fondre, & on en obtient des verres colorés, foncés en couleur à peu-près comme le verre de bouteilles.

Conséquences sur la terre de l'alun, & sur les terres & pierres argileuses.

Il résulte de ces expériences, que la terre d'alun, qui est l'argile dans son plus grand état de pureté, est susceptible de prendre une fusion pâteuse, & de se transformer par l'action du feu, en un genre de pierre très-dure, qui coupe le verre comme les pierres précieuses, & qui se laisse difficilement entamer par la lime: on verra dans la suite, que l'addition d'une matière étrangère quelconque augmente encore cette fusibilité: on peut donc établir comme un principe, que toutes les pierres argileuses sont vitrifiables par elles-mêmes & sans addition, que les plus pures sont les plus réfractaires, & qu'elles sont d'autant moins fusibles qu'elles sont plus mêlées de substances étrangères.

TROISIÈME CLASSE.

Terres & pierres calcaires, avec les composés salino-terreux qui résultent de leur combinaison avec différens acides.

Chaux de marbre blanc.

Elle a été exposée au feu à 39′ 0″, elle a commencé à répandre une lumière bleue, ensuite elle a paru s'aglutiner, & ses angles se sont hérissés : on l'a laissée environ trois minutes sans qu'elle se soit fondue.

Refroidie & examinée au bout de quelques jours, elle étoit plus croquante sous la dent que n'est ordinairement la

chaux ; elle étoit cependant encore friable, & avoit le goût alkalin.

La chaux de marbre exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'éprouve aucune espèce d'altération.

Chaux vive faite avec de la pierre calcaire dure des environs de Melun, aussi pure que la chaux de marbre blanc.

L'EXPÉRIENCE ne s'est faite qu'avec beaucoup de difficulté, parce que le courant d'air emportoit la chaux qui étoit en poudre ; on est cependant parvenu à $5^h\ 13'\ 10''$, à en exposer une petite portion à l'ardeur du feu. On a fini à $5^h\ 15'\ 15''$: la chaux n'étoit point fondue, mais elle avoit diminué de volume; ses particules s'étoient aglutinées, avoient pris une demi-fusion; elle avoit l'apparence d'un quartz poreux, & une assez grande dureté : ayant laissé cette même matière exposée quelques jours à l'air, elle s'y est effleurie, comme il arrive à la chaux vive; ce qui prouve qu'il n'y avoit eu, ni fusion, ni altération sensible de cette substance.

Cette même chaux exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, ne donne aucun indice d'altération.

Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.

CE spath dont j'ai donné l'analyse chimique dans mes Opuscules physiques & chimiques, est composé de chaux très-pure combinée avec de l'eau & avec de l'air fixe; il a été exposé au courant d'air lentement & avec précaution, dans la crainte de le dissiper, parce qu'il étoit en poudre; la matière a paru fondre sur les bords dans le premier instant, & les grains se sont aglutinés, mais elle n'avoit point éprouvé de fusion complète; l'ayant laissée exposée à l'air pendant quelques jours, elle s'y est effleurie & avoit le goût alkalin de la chaux éteinte.

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'y calcine, il perd son eau de cristallisation,

& ſe réduit en chaux vive, mais il n'éprouve aucune autre eſpèce d'altération.

Autre eſpèce de Spath calcaire.

Il a décrépité au moment qu'il a été expoſé à la chaleur, parce qu'il n'avoit pas été réduit en poudre; cependant étant parvenu à en conſerver quelques fragmens au courant d'air vital, ils y ont ſouffert un degré de feu très-violent pendant près de 2′ 30″, ſans ſe fondre; ils étoient devenus noirâtres: expoſés à l'air, ils ſe ſont effleuris & éteints, comme il arrive à toute chaux vive.

Craie.

Elle a été expoſée au feu à 25′ 20″, elle a commencé par ſe gonfler & à ſe gercer; puis elle a paru diminuer de volume, mais il n'y a point eu de fuſion; on a fini à 27′ 30″. Les morceaux refroidis, vus à travers la lumière, avoient une demi-tranſparence comme de la porcelaine, ils étoient aſſez durs & ne paroiſſoient pas diſpoſés à s'effleurir comme la chaux, même après pluſieurs jours d'expoſition à l'air; ce qui ſemble annoncer qu'il ſe trouve dans la craie, du moins dans celle ſur laquelle j'ai opéré, aſſez de matière étrangère à la terre calcaire pour former avec elle une demi-fuſion & une eſpèce de pâte de porcelaine.

La craie expoſée au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, ſe calcine & ſe réduit en chaux vive ſans éprouver aucune autre altération.

Sélénite formée par l'union de l'acide vitriolique & de la terre des os.

Exposée au feu, elle a fondu en 15″, & a paru diminuer & s'évaporer; enſuite elle a perdu peu-à-peu ſa fluidité, & il n'eſt plus reſté qu'un réſidu aglutiné qui a refuſé conſtamment de ſe fondre; ce réſidu étant demeuré quelques jours expoſé à l'air, s'y eſt effleuri, comme il arrive à la

chaux vive, & il en eſt réſulté une chaux éteinte parfaitement blanche.

Cette ſélénite étoit dans l'état d'un ſel triple; elle contenoit, indépendamment de l'acide vitriolique & de la terre calcaire, une portion d'acide phoſphorique; les deux acides ont été décompoſés, & ont formé, l'un du ſoufre, l'autre du phoſphore, qui ſe ſont diſſipés, & il n'eſt reſté que de la terre calcaire dans l'état de chaux.

Cette ſélénite n'a point été éprouvée au foyer du verre ardent.

Gypſe de Montmartre très-pur, qui avoit été préalablement calciné.

Il a été expoſé au feu à 18′ 10″; il a bouillonné & s'eſt fondu à 18′ 30″; la fuſion n'étoit pas abſolument complète; on a fini à 20′ 30″. Vers la fin la fuſion paroiſſoit devenir de moins en moins facile; il y a apparence que ſi on eût continué aſſez long-temps l'expérience pour diſſiper tout l'acide vitriolique, la matière ſeroit devenue abſolument infuſible, & qu'il ne ſeroit reſté que de la chaux vive. Les morceaux refroidis formoient une eſpèce de frite qui ſe réduiſoit aſſez aiſément en poudre, mais dont les particules cependant avoient une dureté aſſez conſidérable.

Le gypſe calciné expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, n'éprouve aucune altération; on a eſſayé d'y mêler du noir de fumée, mais il ne s'eſt pas fondu davantage, & n'a paru même avoir aucune diſpoſition à ſe fondre.

Spath fluor phoſphorique, en criſtaux cubiques jaunâtres, des Voſges.

La terre calcaire ou plutôt la chaux, dans ce ſpath, eſt neutraliſée par l'acide ſpathique, & c'eſt ce qui m'a déterminé à le ranger dans la claſſe de la terre calcaire & de ſes compoſés.

Expoſé

Exposé au feu à $10^h\ 54'\ 55''$, il s'est fondu à $55'\ 0''$, en un globule parfaitement rond, & qui étoit clair & transparent comme de l'eau; mais à mesure qu'on a continué plus long-temps l'expérience, il a paru de plus en plus difficile de le tenir en fusion parfaite; on a fini à $56'\ 40''$. Le globule, en refroidissant, de transparent qu'il étoit, est devenu opaque; il n'avoit plus le brillant vitreux du spath, mais il ressembloit à un sel fondu; ses parties avoient peu de liaison, & il se réduisoit aisément en poudre.

Ce résultat fournit un caractère fort simple pour distinguer le spath fluor ou spath vitreux, d'avec le spath pesant : ce dernier en effet brûle & détone, tandis que le spath cubique au contraire fond paisiblement à la manière des sels.

Le spath fluor a d'ailleurs d'autres caractères qui ne permettent pas de le confondre avec aucun autre; 1.° celui de répandre une lumière phosphorique assez éclatante à une chaleur médiocre; 2.° de donner par sa combinaison avec trois parties d'acide vitriolique, un gaz particulier, connu sous le nom de *gaz spathique*.

Ce spath exposé sur un support de grès au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, ne s'est point fondu; mais l'ayant placé dans le creux d'un gros charbon, & l'ayant exposé, dans cet état, à l'action du foyer, il a fondu avec facilité, & a formé un globule très-fluide, très-bien arrondi, qui est devenu d'un blanc d'émail en refroidissant.

Même Spath fluor phosphorique, d'un blanc tirant sur l'améthiste tendre.

Il a été exposé au feu à $10^h\ 34'\ 35''$; il a fondu en $15''$, en un globule rond qui circuloit avec une grande vivacité dans le creux du charbon : la fusion n'étoit point pâteuse comme celle des pierres, mais fluide comme l'eau, & analogue à celle des substances salines : le globule refroidi étoit opaque, très-friable, & se réduisoit avec une grande facilité en une poussière d'un blanc opaque.

Ce ſpath expoſé au ſoyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, s'y eſt comporté comme le précédent.

Même Spath fluor phoſphorique, couleur d'améthiſte.

EXPOSÉ au feu à $10^h\ 37'\ 50''$, il a fondu à $38'\ 10''$, au moment où il commençoit à rougir; il a formé un globule rond très-fluide, qui n'avoit point la conſiſtance pâteuſe des ſubſtances pierreuſes & vitreuſes en fuſion, mais qui avoit une fluidité ſaline: ce globule refroidi étoit opaque, griſâtre à l'extérieur, blanc dans l'intérieur; on y apercevoit encore quelque choſe de lamelleux; il ſe réduiſoit aiſément en poudre.

Ce ſpath expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen s'y eſt comporté comme les deux précédens.

Eſpèce de Spath des Voſges, qui a en apparence beaucoup de rapport avec le ſpath peſant.

CE ſpath eſt gris, opaque, lamelleux, d'une peſanteur ſpécifique très-grande.

Il a été expoſé au feu à $10^h\ 45'\ 55''$, & on a fini à $46'\ 55''$; il s'eſt fondu complètement en un globule rond, veiné de gris & de blanc à la ſurface; ce globule caſſé avoit dans l'intérieur le coup-d'œil ſpathique avec beaucoup de gros bouillons.

Le même ſpath expoſé au feu à $11^h\ 51'\ 0''$, s'eſt également fondu à $11^h\ 51'\ 40''$, en un globule rond qui a bouillonné; le charbon s'eſt caſſé à $52'\ 20''$, & l'expérience a ceſſé.

Il ſeroit très-facile, d'après les caractères extérieurs, de confondre ce ſpath avec le vrai ſpath peſant, dont la baſe eſt la terre peſante; cependant on voit qu'expoſés à un feu violent, ils donnent des réſultats bien différens, puiſque le ſpath peſant a la propriété de détoner au feu, & que celui-ci y fond au contraire très-paiſiblement.

On a cru devoir ranger proviſoirement ce ſpath avec les terres calcaires & leurs composés, parce qu'on a lieu de croire que ſa peſanteur tient à la nature de l'acide qui entre dans

ſa compoſition, & non à celle de la baſe : c'eſt une ſubſtance au ſurplus qui mérite d'être analyſée avec ſoin, ce ne ſera qu'alors qu'on pourra, avec quelque certitude, lui aſſigner ſa véritable place.

Ce même ſpath expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, a fondu en une eſpèce d'émail blanc opaque.

Conſéquences ſur la terre calcaire.

Il réſulte de ces expériences, que la terre calcaire pure, ou plus exactement la chaux, eſt abſolument infuſible par le plus grand degré de feu qu'on ait pu lui faire éprouver juſqu'à préſent ; que la plupart des acides qui y ſont combinés lui donnent de la fuſibilité, mais qu'elle la perd à meſure qu'ils ſe diſſipent pour reprendre le caractère de la chaux vive.

Quatrième Classe.

Terre peſante, & les compoſés ſalino-terreux qui réſultent de ſa combinaiſon avec les acides : le caractère des ſubſtances de cette Claſſe, eſt de brûler avec une ſorte de détonation quand on les expoſe au feu animé par l'air vital.

Terre peſante.

On a expoſé, avec les précautions convenables, de la terre peſante au courant d'air vital ; en quelques ſecondes elle s'eſt fondue, elle s'eſt étendue & appliquée ſur le charbon, après quoi elle a commencé à brûler & à détoner juſqu'à ce que preſque tout fût diſſipé.

La petite portion de réſidu qu'on a raſſemblée n'étoit encore que de la terre peſante qui, expoſée à l'air, s'y eſt effleurie, & qui avoit le goût de la chaux éteinte, mais moins de cauſticité : il y a apparence que le goût hépatique qu'on a eu dans d'autres expériences, tenoit à ce qu'on avoit employé

de la terre pesante, qui contenoit encore de l'acide vitriolique & peut-être du soufre.

On a répété plusieurs fois cette expérience, & même avec plusieurs terres pesantes diversement préparées; elles ont toujours donné le même résultat, c'est-à-dire, qu'elles ont brûlé avec flamme & une sorte de détonation.

Spath pesant, ou *Barosélénite de Sainte-Marie-aux-Mines.*

Ce spath est du plus beau blanc; il est opaque, sa structure est lamelleuse.

Exposé au feu à 11^h 5′ 5″, il s'est fondu à 5′ 50″, & a commencé à brûler avec une espèce de détonation, comme celle d'un nitre à base terreuse : l'expérience finie, il restoit sur le charbon un enduit blanc âcre & amer, avec un goût de foie de soufre : l'ayant examiné avec plus d'attention, on a reconnu que c'étoit un foie de soufre à base de terre pesante.

Cette expérience a été recommencée plusieurs fois, & a toujours donné le même résultat.

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, sur un support de grès, s'est calciné sans se fondre; l'ayant exposé au même foyer dans le creux d'un charbon, il y a éprouvé une sorte de combustion, il a répandu des vapeurs sulfureuses, & il est resté une espèce de chaux qui conservoit encore un goût très-décidé de foie de soufre.

Conséquences sur la Terre pesante.

Il résulte de ces expériences, que la terre pesante, quand elle est pure, est infusible comme la terre calcaire ordinaire, ce qui établit encore un nouveau degré de ressemblance entre ces deux terres; mais en même temps l'espèce d'inflammation qu'elle éprouve lorsqu'on l'expose à l'action de l'air vital, est un caractère commun avec les substances métalliques, & on ne peut guère douter que cette terre ne soit une chaux métallique, comme M. Bergman l'a déjà soupçonné.

CINQUIÈME CLASSE.

Terre magnéſienne.

Magnéſie du Sel d'Epſum.

CETTE terre a été expoſée au feu pendant 3′ 30″; comme elle étoit très-poreuſe, elle a pris de la retraite & a diminué beaucoup de volume; le morceau qui étoit, dans le commencement, de la groſſeur d'une noiſette, s'eſt réduit à la groſſeur d'un pois, mais la violence du feu n'y a occaſionné aucune autre altération : ayant laiſſé refroidir, on a reconnu que la matière n'avoit pas été fondue, elle s'étoit ſeulement rapprochée ſur elle-même & avoit pris plus de conſiſtance; elle ſe réduiſoit encore cependant aiſément en poudre, mais les molécules étoient croquantes ſous la dent.

Cette ſubſtance expoſée au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, s'eſt calcinée ſans donner aucun autre indice d'altération.

Terre précipitée de l'eau du lac de Gomore.

CETTE terre eſt un compoſé de terre magnéſienne & d'un peu de terre calcaire; elle a été expoſée au feu à 31′ 20″, elle a répandu de la fumée, elle a diminué de volume, mais elle n'a donné aucune apparence de fuſion: on a fini à 34′ 15″.

Conſéquences ſur la Terre magnéſienne.

IL réſulte de ces expériences, que la terre magnéſienne eſt infuſible comme la terre calcaire & la terre peſante.

SIXIÈME CLASSE.

Terres & Pierres réſultantes de la combinaiſon des terres ſimples.

QUOIQU'IL ne ſe rencontre, à proprement parler, dans le règne minéral, aucune ſubſtance rigoureuſement pure,

que la terre ſiliceuſe, même dans le criſtal de roche, ſoit le plus ſouvent mélangée d'un peu d'argile & de terre calcaire; & qu'on en puiſſe dire autant de preſque toutes les autres ſubſtances ſimples; on ne peut cependant ſe diſpenſer, dans un ſyſtème de Minéralogie, de ranger les matières ſuivant leur caractère prédominant, & c'eſt à quoi l'on s'eſt attaché dans les claſſes précédentes. Il n'en eſt pas de même des ſubſtances qui forment cette ſixième claſſe; le mélange ou plutôt la combinaiſon y eſt dans des proportions telles que le compoſé prend un caractère qui lui eſt propre, & jouit de propriétés que n'avoit point en particulier chacune des ſubſtances qui entrent dans ſa combinaiſon.

Ces mélanges au ſurplus ſont ou dans un état de combinaiſon chimique, c'eſt-à-dire dans une proportion conſtante qui conſtitue un degré exact de ſaturation, & alors les ſubſtances qui en réſultent ſont ſuſceptibles de criſtalliſer régulièrement ; ou bien elles ne ſont, pour ainſi dire, que mécaniquement mélangées, & alors elles n'affectent aucune figure régulière, & ne ſont point ſuſceptibles de criſtalliſer: cette diſtinction a obligé de ſéparer les ſubſtances non ſimples en deux claſſes; ſavoir, *ſubſtances compoſées* & *ſubſtances mélangées.*

PREMIÈRE DIVISION.

Pierres précieuſes.

J'AI donné dans un Mémoire particulier, imprimé dans le *Volume de 1782*, le détail des expériences que j'ai faites ſur les pierres précieuſes. Ces pierres, d'après les expériences de M.[rs] Bergman & Achard, ſont compoſées de terre ſiliceuſe, de terre argileuſe, d'un peu de terre calcaire & d'un peu de fer. D'après ce réſultat de l'analyſe, on auroit pu ranger ces pierres indifféremment, ou dans la claſſe de la terre ſiliceuſe, ou dans celle de la terre argileuſe; mais comme elles ont des caractères qui leur ſont propres & qui ne permettent pas de les confondre avec aucune autre ſubſtance, il a paru plus naturel d'en faire une diviſion à part dans la claſſe des terres & pierres com-

posées; on en peut dire autant des schorls, de la tourmaline, de la zéolithe, &c. qui forment la seconde division de cette classe.

DEUXIÈME DIVISION.

Tourmalines, Schorls, Zéolithe, Lapis-Lazuli.

Tourmaline de Ceylan.

De la tourmaline très-pure en aiguilles régulières, a été exposée, à $5^h\ 0'\ 20''$, à une chaleur très-modérée, puis à la grande activité du feu, à $5^h\ 0'\ 40''$: elle a fondu à $0'\ 45''$, s'est gonflée & a bouillonné; on a fini à $5^h\ 1'\ 20''$: on a obtenu de cette expérience un globule rond, très-dur, qu'on n'a pas pu casser: il se laisse cependant attaquer, mais difficilement par la lime; c'est un verre noir, dont on ne peut mieux donner une idée, qu'en le comparant à de gros verre de bouteille, foncé en couleur.

M. Bergman, dans son examen de la tourmaline, nous a appris que cette substance étoit composée, comme il suit:

Terre argileuse	39	Parties.
Terre siliceuse	37	
Terre calcaire	15	
Fer	9	
TOTAL	100.	

La tourmaline a la propriété de devenir électrique par la chaleur seule, sans frottement: ces pierres étoient encore peu connues en 1772; elles n'ont point été essayées au verre ardent.

Schorl noir.

On s'est servi de schorl très-pur en aiguilles; il a été exposé au feu à $4'\ 0''$, il a commencé à fondre à $4'\ 10''$, il a pris une fusion pâteuse, & cependant il s'est arrondi. Le globule refroidi, étoit un verre noir, luisant dans ses fractures, comme des fragmens de poix noire; il rayoit le verre & se laissoit attaquer difficilement par la lime.

La composition chimique du schorl, ne diffère de celle de la tourmaline qu'en ce qu'il contient une petite portion de terre magnésienne.

Cette substance exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y fond facilement en un verre noir qui file quand on le tire avec une baguette de fer ou de verre.

Schorl vert.

Ce schorl étoit en belles aiguilles & très-pur; il a été exposé à un feu modéré à 10′ 20″, & au grand feu à 11′ 0″; il s'est fondu & s'est gonflé, puis il s'est réuni en un globule rond qui tournoyoit; on a fini à 12′ 0″. La matière refroidie étoit entièrement vitreuse, c'étoit un globule rond, semblable à de gros verre de bouteille foncé.

Zéolithe.

La zéolithe, d'après les expériences de M. Pelletier, est composée, comme il suit :

Terre siliceuse	50	Parties.
Terre argileuse	20	
Terre calcaire	8	
Eau	22	
TOTAL	100	

Cette substance se boursoufle & fond avec beaucoup de facilité au feu animé par l'air vital; elle n'a point été essayée au verre ardent en 1772.

TROISIÈME DIVISION.

Stéatite, Amiante, Talc, &c.

Craie de Briançon porphyrisée.

La pierre à laquelle on a donné très-improprement le nom de *Craie de Briançon*, est une espèce de stéatite mêlée avec du talc; on en obtient par l'analyse chimique, environ les

les trois quarts ou les quatre cinquièmes de terre ſiliceuſe, & un cinquième de magnéſie mêlée avec un peu d'argile.

Elle a été expoſée au feu à 35′ 20″, & s'eſt fondue à 35′ 40″; la fuſion étoit pâteuſe; elle s'eſt cependant raſſemblée en un globule rond qui circuloit; elle a paru diminuer de volume & devenir moins fuſible à meſure qu'elle étoit expoſée plus long-temps au feu: on a fini à 39′ 0″; le globule refroidi & caſſé, étoit d'un blanc ſale, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur; il avoit l'apparence d'une mauvaiſe porcelaine, dont le grain étoit groſſier.

Cette ſubſtance n'a pas été eſſayée au verre ardent, mais en général les ſtéatites s'y fondent avec aſſez de facilité.

Amiante.

D'APRÈS les expériences de M. Bergman, l'amiante eſt compoſée ainſi qu'il ſuit :

Terre ſiliceuſe	640	Parties.
Magnéſie	186	
Terre calcaire	69	
Terre peſante	60	
Argile	33	
Fer	12	
TOTAL	1000	

Cette ſubſtance expoſée au feu à 4^h 54′ 0″, a fondu à 4^h 54′ 25″; mais comme le morceau étoit gros on ne pouvoit en tenir en fuſion qu'une petite portion ; on eſt parvenu cependant à mettre la matière en globule : l'expérience a fini à 56′ 30″.

Le globule reſtant n'étoit pas entièrement vitreux; c'étoit une eſpèce de lave noirâtre, d'un grain très-fin, qui reſſembloit à du baſalte, mais qui ne paroiſſoit pas avoir autant de peſanteur ſpécifique; on y voyoit quelques bulles rondes dans l'intérieur : cette ſubſtance étoit aſſez dure pour rayer le verre, mais elle ſe laiſſoit entamer par la lime; elle n'étoit nullement attirable à l'aimant.

L'amiante exposée au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, ſe fond à l'inſtant même où elle y eſt préſentée, & donne un verre d'un jaune-brun.

L'amiante dure ou aſbeſte ſe fond au verre ardent avec la même facilité, & donne un verre noirâtre.

Talcs, Pierres talqueuſes, Serpentines, Stéatites.

TOUTES ces ſubſtances expoſées au courant d'air vital ſur un charbon allumé, s'y fondent avec beaucoup de facilité; la fuſion n'eſt pas fluide, mais pâteuſe; les verres qu'on obtient ſont communément bruns, noirâtres, enfumés, quelquefois verdâtres, & reſſemblent aſſez bien à du verre de bouteille.

Ces mêmes ſubſtances fondent au verre ardent avec la même facilité, & donnent des verres jaunes foncés, bruns & noirâtres.

Baſalte d'Iſlande.

L'ÉCHANTILLON, ſur lequel on a opéré, étoit d'un gris noirâtre, d'un grain très-fin, & parſemé de petits points ou facettes brillantes: expoſé au feu à 53′ 35″, il s'eſt ramolli à 53′ 50″, & s'eſt formé en un globule rond à 54′ 45″; le morceau refroidi & caſſé, avoit dans ſon intérieur l'apparence d'un morceau de verre de bouteille foncé; on y remarquoit des bulles aſſez groſſes.

Un morceau du même échantillon, expoſé, en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, a fondu ſur le champ en un verre noir de conſiſtance pâteuſe.

Suivant M. Bergman, le baſalte eſt compoſé de cinquante-ſix parties de terre ſiliceuſe, de quinze parties d'argile, de quatre de terre calcaire, & de vingt-cinq de chaux de fer.

Autre eſpèce de Baſalte.

EXPOSÉ au feu à 10h 16′ 50″, il s'eſt fondu au moment où il a commencé à rougir: à 17′ 10″, il formoit un globule rond; on a fini à 17′ 30″. Le réſultat refroidi conſiſtoit en un verre d'un brun-noir, aſſez ſemblable à du verre de bouteille très-foncé; il étoit preſque ſans bouillons à

la surface, mais il en étoit rempli dans l'intérieur; ces bouillons étoient assez gros & très-ronds.

Espèce de Basalte, dont sont en partie composées les Montagnes des environs de Giromagny dans les Vosges.

EXPOSÉ au feu à 10h 19′ 30″, il a commencé à fondre en bouillonnant: à 19′ 45″, plusieurs morceaux se sont réunis en globules ronds qui ont bouillonné; on a fini à 20′ 30″. La matière refroidie étoit vitreuse jusque dans son intérieur, & couleur de verre de bouteille, sans bouillons à la surface, mais on en remarquoit de très-gros dans l'intérieur.

Un fragment du même échantillon, exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'est fondu sur le champ en un verre noirâtre.

Conséquences sur les pierres composées.

LES conséquences que présentent les expériences faites sur cette classe de pierres, sont en général, que toute pierre composée est fusible: ce principe ne reçoit d'exception qu'à l'égard des pierres composées des trois terres calcaires, c'est-à-dire, de la terre calcaire ordinaire, de la terre magnésienne, & de la terre pesante: une pierre, ou en général un composé de ces trois terres ou de deux de ces trois terres, ne seroit point fusible; mais pour peu qu'à ces trois terres ou à l'une d'elles, vienne s'en ajouter une autre, telle que la siliceuse ou l'argileuse, même en assez petite quantité, la fusion s'opère avec facilité, ainsi qu'on le verra par les expériences ci-après. Les matières volcaniques étant en général très-composées, elles sont toutes très-fusibles.

SEPTIÈME CLASSE.

Terres & Pierres formées de substances mécaniquement & grossièrement mélangées.

Schites & Ardoises.

TOUTES les pierres de cette classe fondent avec une grande

facilité quand on les expose au feu animé par l'air vital. Il résulte de leur fusion des substances vitreuses dans un état pâteux, & qui, refroidies, ressemblent à du gros verre de bouteille plus ou moins foncé en couleur.

Ces pierres exposées au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, donnent absolument le même résultat.

Granites, grès micacés propres à faire des meules.

TOUTES ces pierres fondent lorsqu'on les expose sur un charbon ardent au courant d'air vital, & donnent des verres plus ou moins colorés; elles fondent également au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, quoiqu'avec un peu plus de difficulté : le grès à faire des meules, ou mollasse grise des Vosges, donne, au verre ardent, un verre noir comme celui qu'on obtient de l'ardoise.

Porphyre rouge.

ON a exposé au feu à $11^h\ 4'\ 8''$, un morceau de porphyre rouge; il a commencé à se ramollir à $5'\ 30''$, & bientôt après il a fondu complètement en un globule rond caverneux : ce verre refroidi étoit noir & opaque, il avoit un peu de transparence vers les bords, & il avoit la couleur de gros verre de bouteille; sa surface, vue à la loupe, avoit le poli du verre, on y remarquoit des taches blanches en quelques endroits & de petites bulles.

Porphyre vert.

EXPOSÉ au feu à $11^h\ 23'\ 40''$, il étoit fondu complètement à $24'\ 5''$; il s'est formé en un globule rond qui bouillonnoit; on a fini à $24'\ 40''$.

Le globule cassé s'est trouvé être un verre, blanc par places & demi-transparent, noir & opaque dans d'autres, & à peu-près semblable à du verre de bouteille.

EXPÉRIENCES *sur la combinaison artificielle des Terres simples:*

ON a exposé au feu, avec beaucoup de précautions,

partie égale de terre d'alun & de quartz porphyrisé : le mélange s'est ramolli presque aussitôt & a bouillonné; la matière s'est réunie en une fusion pâteuse qui s'est arrondie de plus en plus, & enfin a formé un globule vitreux, à peu-près comme il arrive aux pierres précieuses : le résultat refroidi étoit un verre blanc, demi-transparent, rempli de fentes & de bulles, qui étoit fort dur, qui rayoit le verre, mais qui se laissoit entamer par la lime.

Terre d'alun	4	Parties.
Quartz porphyrisé	4	
Terre calcaire aérée	1	

La fusion a été très-pâteuse; on a obtenu un globule de verre blanc transparent, mais étonné & fendillé dans toutes ses parties, comme du cristal de roche qu'on auroit fait rougir & qu'on auroit éteint dans de l'eau.

Terre d'alun	Parties égales.
Sablon porphyrisé	
Terre calcaire aérée	

Le mélange a fondu avec facilité & s'est réuni en un globule vitreux, de consistance pâteuse : refroidi, il étoit demi-transparent; il se laissoit entamer par la lime : examiné dans son intérieur, il étoit rempli de petites bulles rondes.

Terre d'alun	2	Parties.
Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines	5	

Pour empêcher que la matière pulvérulente ne fût emportée par le courant d'air, on l'a imbibée avec de la cire, & alors on est parvenu à la fondre très-facilement : l'expérience ayant été répétée deux fois, on a obtenu deux globules ronds très-durs, opaques, couleur de marron clair : les ayant cassés, ils ont présenté une fracture un peu grasse, comme on l'observe dans un assez grand nombre de substances quartzeuses colorées.

Terre d'alun	2	parties.
Sablon porphyriſé	2	
Terre calcaire	1	

On a obtenu une fuſion pâteuſe, un peu plus décidée cependant que celle que prennent les pierres précieuſes; le globule refroidi, étoit abſolument vitreux, blanc, tranſparent, mais fendillé dans toutes ſes parties comme du criſtal de roche qui auroit été chauffé & rougi, & qui auroit été jeté dans de l'eau.

Mélange de parties égales de Chaux de marbre & de Terre d'alun.

CETTE poudre, qui étoit très-légère, a été expoſée au feu à 57′ 35″, une partie a été emportée par le courant d'air, mais une petite portion s'eſt fondue en 10″; elle s'eſt bientôt parfaitement arrondie. Le petit globule refroidi, étoit tranſparent & couleur d'aigue-marine, il avoit le coup-d'œil des pierres précieuſes, mais il n'en avoit pas la dureté, car il rayoit difficilement le verre.

Mélanges de parties égales de Quartz porphyriſé & de Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.

COMME ces matières étoient réduites en poudre très-fine, elles étoient aiſément emportées par le courant d'air; mais au moment où on parvenoit à leur faire éprouver l'action du feu, elles fondoient très-facilement, & ſe raſſembloient en globules qui bouillonnoient. La matière paroiſſoit cependant devenir moins fuſible à meſure qu'elle étoit expoſée plus long-temps au feu: les globules refroidis, étoient parfaitement blancs, ils avoient le luiſant de l'émail en dehors, & ils reſſembloient dans leur intérieur à une porcelaine vitreuſe : on y remarquoit peu de bouillons. Il y a quelque apparence que l'une des deux terres s'évapore par la violence du feu, & que c'eſt par cette raiſon que la fuſibilité diminue.

Mélange d'à peu-près parties égales de Terre pesante, & de Terre d'alun.

Ce mélange a paru se fondre au moment où il a été exposé au courant d'air vital, mais ensuite il est devenu moins fusible: il y a apparence que la terre pesante s'évapore & se dissipe, & que la terre de l'alun reste seule. On a interrompu l'expérience avant que la terre pesante pût être entièrement évaporée.

Le résidu étoit une substance bleuâtre, un peu fritée, qui conservée, s'est effleurie: la terre pesante a présenté les phénomènes de la chaux vive, & le morceau, qui étoit assez bien lié, s'est réduit en grande partie en poudre; d'où il semble résulter que ces deux terres ne contractent point d'union.

Mélange d'à peu-près parties égales de Terre pesante & de Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.

Le mélange paroît s'aglutiner & même se fondre au premier instant; mais bientôt on s'aperçoit que les deux terres conservent leur caractère: la terre pesante brûle ou décrépite, & la terre calcaire reste seule infusible: les parties qui ont paru s'aglutiner, exposées à l'air, s'y effleurissent & se réduisent en chaux éteinte.

Mélange de parties égales de Terre pesante & de Quartz porphyrisé.

Ce mélange exposé au courant d'air déphlogistiqué, avec les précautions convenables, se ramollit & s'aglutine presque sur le champ; il bouillonne, il se boursoufle, & se réunit ensuite en un globule qui occupe beaucoup moins de volume. Le globule refroidi étoit blanc, opaque, absolument vitreux, rempli de bulles, il se cassoit aisément & rayoit à peine le verre.

Magnésie du sel d'Epsum & Quartz porphyrisé.

On a exposé parties égales de ces deux matières au feu,

dans le creux d'un charbon, où on l'avoit taſſé; on a fait enſuite tomber le courant d'air tout autour de la matière, pour qu'elle s'aglutinât avant de ſe diſſiper. On eſt parvenu ainſi à la fondre, principalement ſur les bords, & enſuite juſqu'au centre. La fuſion étoit difficile & pâteuſe, il en a réſulté un émail blanc, très-luiſant à l'extérieur, vitreux & opaque dans ſon intérieur, qui étoit très-dur & qui rayoit le verre.

Magnéſie & Quartz expoſés ſur le charbon en plus petite quantité.

Il en a réſulté un émail blanc ſemblable au précédent, mais plus vitreux & mieux fondu.

Conſéquences générales ſur les Terres ſimples & ſur leurs combinaiſons.

Il réſulte des expériences qu'on vient de rapporter, que parmi les terres ſimples, trois, ſavoir la terre calcaire, la terre magnéſienne & la terre peſante, ſont abſolument infuſibles.

Secondement, que le criſtal de roche n'eſt ſuſceptible que d'un ramolliſſement très-léger & à peine ſenſible, & qu'on pourroit même attribuer à la petite portion d'argile qui lui eſt intimement combinée.

Troiſièmement, que le quartz & toutes les pierres quartzeuſes & ſiliceuſes diffèrent du criſtal de roche, en ce qu'elles ſont toutes ſuſceptibles de prendre par l'action d'un feu très-violent, un degré de ramolliſſement très-ſenſible, ce qui tient à la portion d'argile qui y eſt mélangée.

Quatrièmement, que la terre argileuſe, même dans ſon plus grand état de pureté, eſt ſuſceptible de ſe fondre ſeule & ſans addition.

Cinquièmement, que les trois terres calcaires, ſavoir la terre calcaire ordinaire, la terre magnéſienne & la terre peſante, mêlées enſemble dans toutes proportions, ne ſe communiquent

communiquent point réciproquement de fusibilité ; mais qu'elles forment chacune une espèce de chaux vive particulière, qui s'effleurit à l'air, & qui s'éteint avec chaleur par l'addition de l'eau.

Sixièmement, que le mélange des deux autres terres, soit entr'elles, soit avec l'une des trois terres calcaires, forme des composés qui se vitrifient, qui donnent des verres plus ou moins transparens ; & qu'une très-petite quantité de terre calcaire suffit pour communiquer à la terre quartzeuse ou à celle de l'alun, une très-grande fusibilité.

SECOND ORDRE.

Substances salines.

Borax.

On a exposé à $5^h\ 6'\ 10''$, au courant d'air vital, du borax qui avoit déjà été calciné; il a fondu sur le champ, s'est boursouflé, s'est tourmenté, puis il s'est réuni en un globule que la violence du feu entretenoit rouge, mais qui étoit fluide comme de l'eau : à $8'\ 10''$, on s'est aperçu qu'il diminuoit considérablement de volume, qu'il bouillonnoit & se volatilisoit, & en effet à $9'\ 40''$, il étoit entièrement évaporé.

Tartre vitriolé.

On a exposé à $5^h\ 24'\ 0''$, du tartre vitriolé en poudre à l'action du feu ; à $24'\ 25''$ il étoit fondu ; il a paru comme brûler & fuser en répandant une odeur de soufre, & s'est dissipé en entier.

Dans cette expérience, le tartre vitriolé se convertit en soufre par le contact du charbon, une portion de soufre brûle avec flamme & se dissipe, & l'alkali s'évapore.

Ce sel exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, fond avec quelque difficulté, & donne une substance demi-vitrifiée, blanchâtre & demi transparente.

Sel de Glauber.

CE ſel fond à l'inſtant même où il ſent l'impreſſion de ſa chaleur ; mais à cette première fuſion, purement aqueuſe, en ſuccède enſuite une réelle; alors le ſel s'étend ſur le charbon, & ce n'eſt plus qu'avec peine qu'on peut le faire brûler; la flamme du charbon eſt très-jaune, il ſe répand une odeur de ſoufre; ſur la fin il y a une eſpèce de combuſtion ou de détonation, moins ſenſible cependant qu'avec la terre peſante; enfin la totalité de la matière ſe diſſipe & diſparoît.

Ce ſel fondu au grand verre ardent de Tſchirnhauſen, ſur un morceau de grès, a pénétré en partie le ſupport, & l'a recouvert d'une incruſtation ſaline blanche, ſans que la fuſion ſe ſoit communiquée au ſupport.

Alkali fixe végétal cauſtique.

ON a expoſé au feu, de l'alkali fixe végétal cauſtique qui ne faiſoit preſque aucune efferveſcence avec les acides; il s'eſt fondu ſur le champ en bouillonnant, & s'eſt étendu ſur le charbon en contractant avec lui une forte adhérence; en même temps il a répandu une vapeur ou fumée très-conſidérable, & il s'eſt entièrement évaporé; l'expérience a duré 1′ 5″.

Ayant répété l'expérience, afin de conſerver une petite portion de cet alkali avant qu'il fût entièrement évaporé, on a obſervé que le ſel ne ſouffroit aucune altération par ce degré de feu violent, & qu'il étoit auſſi cauſtique & auſſi déliqueſcent qu'au commencement de l'expérience.

Alkali fixe végétal ſaturé d'air fixe.

CE ſel décrépite, & on a été obligé de l'expoſer au feu avec beaucoup de précautions; mais quand l'eau interpoſée entre les criſtaux, a été une fois évaporée, il a fondu & bouillonné, puis il s'eſt étendu ſur le charbon qu'il paroiſſoit pénétrer & qu'il empêche abſolument de brûler : en promenant le courant d'air vital autour des places que l'alkali avoit

ainſi pénétré, on eſt parvenu à l'évaporer en totalité en une fumée blanche épaiſſe.

Alkali minéral ſaturé d'air fixe.

On a expoſé au feu de l'alkali minéral effleuri; il a fondu aiſément, a commencé à diminuer de volume, & s'eſt enfin entièrement évaporé: mais une circonſtance remarquable, c'eſt qu'il paroiſſoit y avoir, pendant l'évaporation, une eſpèce de combuſtion ou de détonation analogue à celle qu'on éprouve avec la terre peſante, à l'exception qu'elle eſt beaucoup moins forte. L'alkali de la ſoude, & les ſubſtances alkalines en général ſeroient-elles des eſpèces de chaux métalliques?

Sel marin décrépité.

Exposé au courant d'air vital, à 11′ 30″, il a fondu à 11′ 35″; il a répandu une fumée épaiſſe; à 11′ 50″ il s'eſt étendu ſur le charbon, & l'a pénétré au point de l'empêcher de brûler: il y a apparence qu'en continuant l'expérience, on parviendroit à l'évaporer en entier; mais il reſte de l'incertitude, au moyen de ce qu'il eſt très-difficile de faire brûler le charbon.

On a répété cette expérience, dans la vue de déterminer ſi le ſel marin ſe décompoſoit & s'alkaliſoit: on a commencé à 5^h 13′ 25″, & on a fini à 5^h 19′ 30″ Les circonſtances ont été les mêmes que dans l'expérience précédente; la fumée étoit épaiſſe, mais ſans odeur d'acide marin, & ce qui eſt reſté de ce ſel n'étoit nullement décompoſé.

Tartre phoſphorique.

On a expoſé au courant d'air vital une combinaiſon d'acide phoſphorique & d'alkali fixe: l'expérience a commencé à 2′ 35″; il a fondu ſur le champ en bouillonnant, & ſe bourſouflant preſque comme de l'alun: à cette première fuſion, qui n'étoit occaſionnée que par l'eau de criſtalliſation,

en a ſuccédé une d'un autre genre, & la matière s'eſt miſe en un globule clair, & fluide comme de l'eau: on a fini à 4′ 0″; le globule refroidi & conſervé quelque temps, s'eſt humecté & fendillé. Le ſel phoſphorique avoit perdu tout ſon excès d'acide, & il avoit très-peu de goût.

Il s'eſt dégagé pendant cette expérience une légère odeur de phoſphore, & il y a quelqu'apparence que ſi l'on eût pouſſé plus loin cette expérience, l'acide phoſphorique ſe ſeroit diſſipé peu à-peu en ſe convertiſſant en phoſphore, & que l'alkali ſe ſeroit volatiliſé à ſon tour.

Conſéquences ſur les Subſtances ſalines.

Il réſulte des expériences qu'on vient de rapporter:

1.° Que le tartre phoſphorique eſt le plus fixe de tous les ſels, ce qui le rend très-propre à être employé comme fondant dans les expériences faites, ſoit à la flamme du chalumeau ordinaire, ſoit au feu de charbon animé par l'air vital.

2.° Que le ſel marin ſe volatiliſe en entier à un degré de feu violent, ſans ſe décompoſer.

3.° Qu'il en eſt de même de l'alkali fixe végétal, de l'alkali fixe minéral & du borax; que ces trois ſels ſe diſſipent en quelques inſtans & avec beaucoup de facilité.

4.° Que tous les ſels vitrioliques métalliques ou autres, ſe décompoſent par le contact du charbon; que leur acide ſe convertit en ſoufre qui ſe diſſipe, & que la baſe reſte à nu & jouit de toutes ſes propriétés.

TROISIEME ORDRE.

Soufre & Bitumes.

Les ſubſtances qui compoſent cet ordre de minéraux, expoſées à l'action du feu animé par l'air vital, ne préſentent d'autre phénomène que celui d'une combuſtion très-rapide & très-prompte. Ce ſeroit groſſir inutilement ce Mémoire que d'entrer dans le détail des expériences.

QUATRIEME ORDRE.

Subſtances métalliques.

Platine brute.

La platine brute expoſée au courant d'air vital, fond en 15 ou 20 ſecondes, quand la quantité n'excède pas cinq à ſix grains; la fuſion eſt même très-complète, & le métal ſe met en globules très-ronds: mais quand la quantité eſt d'un gros & au-delà, la fuſion eſt difficile, on a de la peine à entretenir le morceau en fuſion dans toutes ſes parties, & on ne peut pas le réunir en un globule rond. La meilleure proportion qu'on puiſſe employer, eſt celle de 12 à 15 grains; alors on obtient des globules bien fondus & bien ronds.

La platine expoſée au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, s'y aglutine à la longue; mais dans les nombreuſes expériences auxquelles nous l'avons ſoumiſe en 1772 & 1773, il ne nous a pas été poſſible de la fondre.

Platine ſéparée de ſon ſable magnétique.

La platine qui a été dépouillée par l'aimant du ſable magnétique qu'elle contient, préſente à peu-près les mêmes phénomènes que la platine brute; elle fond quand elle eſt expoſée au courant d'air vital, & forme des globules ronds.

Or de départ.

Exposé au feu, il a fondu en 10 ſecondes: il ne s'en eſt pas élevé de fumée bien ſenſible; cependant une cuiller d'argent placée à quelques pouces de diſtance au-deſſus du globule pendant la fuſion, a été ſenſiblement dorée. On n'a point obſervé la moindre apparence de flamme.

M. Macquer a rendu compte, dans un très-grand détail, des expériences qui ont été faites ſur l'or expoſé au foyer du grand verre ardent; il en réſulte qu'il s'y volatiliſe à la longue.

Platine forgée.

On a expoſé ſur un charbon de la platine forgée, apportée

par M. le Comte de Milly; l'expérience a commencé à 0′ 25″: la platine a commencé à fondre à 1′ 20″, & s'eſt miſe en globule à 1′ 35″; elle a enſuite bouillonné à la ſurface, & il s'y eſt formé une ſcorie vitreuſe. Il paroîtroit que la platine forgée eſt un peu plus fuſible que la platine brute: on n'a point obſervé la moindre apparence de flamme dans toutes les expériences ſur la platine.

Argent de coupelle.

EXPOSÉ au feu, il a fondu en 10 ſecondes; il a répandu une fumée conſidérable, mais ſans flamme. Une pomme de canne d'or, expoſée à la vapeur blanche, n'a point été ſenſiblement argentée; mais comme on opéroit la nuit, on ne peut pas compter à un certain point ſur cette obſervation. Quoique l'argent fût fort pur, il s'eſt formé à la partie ſupérieure du globule, une petite croûte vitreuſe jaunâtre, provenant ſans doute de la calcination & de la vitrification de quelques portions de métal allié à l'argent.

On a répété cette même expérience, en ſe ſervant d'un grand ajutoir, & en l'expoſant ainſi à un courant d'air vital très-conſidérable, pour examiner ſi l'argent répandoit de la flamme comme la plupart des autres métaux; il a fondu en peu de temps, & il s'eſt formé à ſa ſurface ſupérieure une très-petite couche de chaux jaunâtre, mais il n'y a point eu de flamme.

L'argent expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, y eſt dans un état d'évaporation lente, mais continuelle.

Argent au titre de Paris.

IL fond en quelques inſtans, & ſe couvre d'une pellicule vitreuſe qui eſt ſans doute dûe à la calcination & à la vitrification des métaux dont il eſt allié; c'eſt une manière commode & expéditive de coupeler l'or & l'argent.

Cuivre rouge.

EXPOSÉ au feu, il a fondu en 15 ſecondes; il a bouillonné & a commencé à répandre une flamme verte & de

différentes autres couleurs, qui ſubſiſtoit même quand on avoit retiré le charbon du courant d'air vital; en peu de temps le cuivre s'eſt volatiliſé en entier.

Ce métal expoſé au foyer du grand verre ardent, ſur un ſupport de grès, ſe réduit en chaux.

Vitriol de cuivre.

On a expoſé à 54′ 45″, au courant d'air vital, du vitriol de cuivre calciné; la flamme qui s'élevoit du charbon, s'eſt colorée de vert & de jaune: la matière a commencé à ſe fondre à 55′ 10″, & après avoir bouillonné long-temps, il eſt reſté un culot de cuivre; l'expérience a fini à 56′ 30″.

Le cuivre reſtant étoit attaquable à la lime; il n'étoit pas cependant exactement dans ſon état métallique, il étoit plus caſſant, & avoit quelque rapport en apparence avec de la mine d'argent rouge.

Étain.

Exposé au feu, il s'eſt fondu preſque ſur le champ; il a bouillonné, puis il eſt devenu rouge; il s'en eſt élevé enſuite une fumée blanche ſemblable aux fleurs de zinc ou *nihil album;* elle étoit accompagnée d'une flamme blanche: inſenſiblement le métal s'eſt réduit entièrement en chaux; juſque-là il a continué à bouillonner avec une grande force.

Ce métal expoſé au foyer du grand verre ardent de Tſchirnhauſen, fond en un globule blanc & brillant comme de l'argent; il s'en élève une fumée blanche aſſez abondante, claire & lumineuſe, & qui pourroit bien être une flamme: l'ayant retiré du foyer au bout de 12 minutes, il eſt reſté une matière fondue non vitreuſe, opaque, couleur de chamois, très-dure, mais caſſante; recouverte en partie par une chaux très-blanche, qui, vue à la loupe, étoit compoſée d'aiguilles fines tranſparentes comme du verre.

Si on tient très-long-temps de l'étain au verre ardent, il ſe diſſipe en entier.

Plomb.

EXPOSÉ au feu, il a fondu presque sur le champ: bientôt après il est devenu rouge & a bouillonné fortement, en même-temps il s'en élevoit une fumée roussâtre avec flamme.

On a répété la même expérience pour en mieux saisir toutes les circonstances, & on a été lentement dans le commencement : d'abord le plomb a commencé par se calciner à sa surface, ensuite la chaux qui s'étoit formée s'est fondue & a commencé à entrer en évaporation; dans les instans où l'on donnoit un grand degré de feu, la matière qui étoit en partie dans l'état de métal & en partie dans l'état de chaux, brûloit avec une flamme blanche.

Il ne s'est trouvé aucune note sur la manière dont le plomb se comporte au verre ardent : quant au *minium* il s'y convertit en une belle litharge très-brillante, sans qu'il y ait aucune parcelle de plomb réduit.

Fer.

LE fer exposé sur un charbon au courant d'air vital, fond avec assez de facilité; mais au moment où il est dans un état de fusion parfaite, il commence à brûler avec fracas, & à jeter de toutes parts & à une grande distance, des étincelles brillantes comme une gerbe d'artifice de composition chinoise : cette combustion dure jusqu'à ce que la totalité du fer se soit dissipée. Si on réunit sur une feuille de papier les molécules de fer qui se sont ainsi éclaboussées de toutes parts en brûlant, on aperçoit qu'elles sont la plupart en petites boules creuses, qui se réduisent facilement en poudre, & qui ne sont autre chose que de l'éthiops martial.

Le fer exposé au verre ardent, présente des phénomènes à peu-près semblables : voyez Mémoire de M. Homberg, *année 1706, page 158.*

Colcothar.

EXPOSÉ au feu à 57′ 35″; il s'en détachoit de temps en temps de petites étoiles d'artifice; il a fondu assez bien

à 58′ 30″; il a bouillonné & a formé un globule rond très-blanc; à 59′ 0″ il continuoit de s'en détacher des étoiles ou étincelles; on a fini à 59′ 50″.

Le morceau, refroidi, étoit un culot de fer caſſant, poreux, preſque dans l'état d'éthiops martial, mais qui ſouffroit encore un peu la lime; il étoit parfaitement attirable par l'aimant.

Eſpèce de Mine de fer micacée, d'un filon qui ſe trouve au pied du pic de la montagne du Bon-homme dans les Voſges.

CETTE mine eſt noire, brillante, elle ſalit les doigts comme de la manganèſe; on douteroit, au premier coup-d'œil, ſi c'eſt une mine de fer, & on pourroit la confondre avec de la molybdène, mais elle en diffère, en ce qu'elle eſt attirable à l'aimant.

Comme cette ſubſtance eſt légère, on l'a expoſée au feu avec précaution, pour empêcher qu'elle ne ſe diſſipât: on a commencé à 32′ 20″, & elle s'eſt fondue à 32′ 50″, en un grand nombre de petits boulets très-ronds, dont quelques-uns paroiſſoient ſe diſſiper, les autres ſe ſont réunis peu-à-peu à 35′ 25″, en un ſeul globule dont la fuſion n'étoit pas bien décidée; ce qui annonce que cette ſubſtance eſt très-réfractaire. Il s'eſt détaché pendant le cours de l'opération, quelques petites étoiles d'artifice, ſemblables à celles que produit le fer en brûlant; mais à cela près, le métal fondu n'avoit point les caractères du fer; pendant le refroidiſſement il s'en eſt élevé de la fumée blanche ſemblable à du pompholix.

Le réſidu examiné étoit une maſſe brune reſſemblante à de la poix, mais avec moins de brillant dans les fractures; elle étoit caſſante & très-attirable à l'aimant.

Il y a apparence que cette mine contient du fer & de la manganèſe.

Sable magnétique de la platine.

EXPOSÉ au feu avec précaution, pour l'empêcher d'être emporté par le courant d'air, il s'eſt aglutiné en 10″, & s'eſt fondu complètement en 45″, il ne s'eſt pas cependant mis

en globules exactement ronds; il a été retiré du feu au bout d'une minute 45 secondes.

Ayant laissé refroidir le morceau, il étoit grenu dans l'intérieur, il avoit une apparence demi-métallique à peu-près comme certaines espèces de blende; il étoit très-cassant sans être cependant très-dur : on voit par cette expérience, que ce sable magnétique n'est pas du fer pur, mais que probablement il est allié.

Sable magnétique de Bar.

On a été curieux de mettre en comparaison avec le sable magnétique de la platine, celui de Bar en Alsace : en 25 secondes les globules se sont aglutinés, & 25 secondes après, c'est-à-dire, après 50 secondes en tout, il étoit assez bien fondu : on a continué de l'exposer au courant d'air vital pendant 1′ 15″ en tout, après quoi, l'ayant laissé refroidir, le globule étoit noir à l'extérieur, avec quelques apparences métalliques; il paroissoit n'avoir qu'une pesanteur spécifique médiocre : cassé, son intérieur étoit brillant, ou plutôt luisant comme de la résine; il ressembloit à une espèce de blende.

Cette matière a beaucoup de rapport, quant aux effets, avec la précédente, mais elle est un peu plus fusible.

Régule de Manganèse.

Il est difficile d'obtenir du régule de manganèse pur, & qui ne contienne pas une portion plus ou moins grande de fer, ou même de l'arsenic : les phénomènes que présente cette substance métallique lorsqu'on l'expose au feu animé par l'air vital, ne sont pas en conséquence toujours constans : si elle contient de l'arsenic, il se décèle par l'odeur d'ail; si elle est alliée de beaucoup de fer, elle fond & brûle en répandant des étincelles : enfin, si le régule de manganèse est pur, ou à peu-près pur, il brûle dans le premier instant, il se calcine & redevient chaux noire de manganèse; dans cet état, il ne brûle plus, & il se dissipe lentement & peu-à-peu par l'extrême violence du feu.

L'exposition du régule de manganèse au feu animé par l'air vital, n'est point, comme on auroit pu le penser, un moyen d'en séparer le fer; car ayant opéré sur un régule très-sensiblement attirable à l'aimant, il ne l'étoit pas moins après avoir été refroidi; il paroissoit même l'être devenu un peu davantage.

Mercure précipité per se.

Dès que cette substance a été exposée au feu, elle s'est évaporée, & s'est volatilisée en entier, sans présenter aucun phénomène particulier.

Zinc.

Exposé au feu, il a fondu presque sur le champ, & a commencé à brûler presque aussitôt, & même avant d'être rouge: la flamme étoit de couleur rouge dans son milieu & bleue vers la pointe; en même-temps, le métal s'est réduit en chaux, & il s'en est élevé des fleurs qui se sont répandues dans l'air du laboratoire: lorsque tout le métal a été calciné, il n'est plus resté qu'une chaux blanche qui, exposée à la grande ardeur du feu, ne s'est point fondue, mais qui a continué à s'évaporer avec une flamme bleue: il est probable que cette flamme étoit occasionnée par une nouvelle combustion d'une portion de métal qui se revivifioit par le contact du charbon.

Ce demi-métal ayant été exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, sur un grès, s'est fondu très-facilement, & s'est recouvert d'une chaux blanche; il en sortoit une fumée épaisse, accompagnée de flocons blancs de laine philosophique; la matière se gonfloit dans des endroits, & il s'y faisoit comme des éruptions subites de volcan: la chaux blanche qui s'étoit formée, présentoit des herborisations composées de petites aiguilles blanches, transparentes comme le plus beau cristal.

Vitriol de Zinc.

On a exposé à $7^h\ 2'\ 30''$, au courant d'air vital, du

vitriol de zinc calciné; il a répandu de la fumée, il s'eſt fondu avec peine & imparfaitement; les parties ont pris difficilement de la liaiſon: il y a eu pendant l'opération une flamme jaune & bleue: on a fini à 5′ 25″; alors il ne reſtoit plus que de la chaux de zinc ſur le charbon.

Eſpèce de Blende écailleuſe griſe, qui a le facies metallica.

CETTE blende eſt une mine de zinc, mêlée, à ce qu'il paroît, avec une autre ſubſtance métallique.

Expoſée au feu à 52′ 0″, elle a brûlé avec flamme bleue & vapeurs blanches, comme le zinc lui-même; il s'eſt répandu en même temps une odeur d'arſenic & de ſoufre; à 53′ 15″ il y avoit bien une eſpèce de fuſion, mais elle étoit pâteuſe: on a fini à 54′ 30″.

Le morceau refroidi, étoit une ſubſtance métallique, d'un grain fin, caſſante, & qui paroiſſoit être compoſée principalement de zinc.

Blende.

CETTE eſpèce de blende eſt évidemment une mine de zinc; expoſée au feu, elle décrépite d'abord, puis elle brûle comme le zinc, avec flamme bleue & fumée blanche de pompholix: il s'en élève une légère odeur d'arſenic, juſqu'à évaporation complète, & il reſte en conſéquence une petite portion de chaux de zinc ſur le charbon.

Blende de Sainte-Marie-aux-Mines.

CETTE blende n'a pas le *facies metallica;* elle eſt de couleur rouſſe écailleuſe.

Quoique cette ſubſtance, à l'extérieur, ait beaucoup de rapport avec la mine de zinc qui porte le même nom, elle en diffère eſſentiellement par ſa nature; expoſée au feu, à 40′ 30″, elle s'eſt ramollie à 41′ 25″, ſans brûler & ſans répandre de fumée; elle a fondu aſſez bien à 41′ 25″, mais comme elle eſt très-réfractaire, la fuſion n'a été complète qu'à 42′ 30″; on a fini à 42′ 50″; on n'a point remarqué d'odeur pendant le cours de l'opération.

Blende lamelleuse jaune phosphorisque de Derbyshire.

Cette blende doit être réduite en poudre avant d'être exposée au courant d'air vital, autrement elle décrépite & se dissipe en éclats.

En conduisant l'expérience avec les précautions convenables, on a d'abord l'odeur de soufre, qui se continue pendant presque toute l'opération; en même temps la matière brûle sans se fondre, avec une flamme verte & bleue, & en laissant échapper une fumée blanche cotonneuse qui paroît être de la chaux de zinc : en continuant assez long-temps l'expérience, presque toute la matière se dissipe.

Cette blende est donc principalement composée de soufre & de zinc.

Antimoine cru.

Exposé au feu, il se fond à l'instant, répand une flamme blanche, & se dissipe en une fumée blanche.

Régule d'Antimoine.

Exposé au feu, il s'est fondu en 10 secondes, & a commencé à répandre une fumée blanche, ensuite il a rougi & a commencé à brûler avec une flamme blanche.

Régule d'Arsenic du Commerce.

Exposé au courant d'air vital sur un charbon allumé, il a brûlé avec une flamme d'un blanc-bleu, & s'est dissipé entièrement avec l'odeur qui lui est propre.

Pyrite ferrugineuse & arsenicale des environs de Sainte-Marie-aux-Mines dans les Vosges.

On trouve dans les décombres de mines anciennement exploitées à Sainte-Marie-aux-Mines, une substance métallique cassantte, d'un jaune d'or pâle, faisant beaucoup de feu avec le briquet, & que les ouvriers nomment *Kis :* cette matière exposée au feu animé par l'air vital, a brûlé avec une flamme verte, en répandant une fumée blanche & une odeur

d'arſenic inſupportable ; il eſt reſté un petit culot métallique encroûté d'une matière griſâtre, & qui s'eſt briſé très-aiſément ; il étoit blanc comme de l'argent dans ſon intérieur, & il préſentoit une cavité qui étoit remplie de petits criſtaux métalliques ; ce culot étoit très-attirable à l'aimant. On voit que le kis de Sainte-Marie-aux-Mines eſt une vraie pyrite arſenicale ferrugineuſe, mais il ſeroit poſſible qu'il y entrât du cuivre ou du zinc, & la couleur verte de la flamme ſembleroit l'annoncer.

Si cette ſubſtance étoit très-abondante & qu'on la trouvât en filon, elle mériteroit d'être analyſée avec plus de ſoin pour bien connoître la nature des ſubſtances métalliques qui la compoſent.

Conſéquences ſur les ſubſtances métalliques.

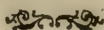
Il réſulte des expériences ci-deſſus,

1.° Que toutes les ſubſtances métalliques, à l'exception de la platine, ſont volatiles au degré de feu que produit l'action de l'air vital ; mais que la fixité de l'or & de l'argent eſt incomparablement plus grande que celle des autres métaux.

2.° Que toutes les ſubſtances métalliques peuvent ſe diviſer en deux claſſes, dont les unes, telles que la platine, l'or, l'argent & le mercure, ſont incombuſtibles ; les autres au contraire brûlent avec une flamme très-marquée.

3.° Que la combuſtion du fer eſt ſur-tout remarquable ; qu'elle ſe fait avec un bouillonnement rapide qui lance au loin des étincelles exactement comme les étincelles d'artifice.

4.° Que le courant d'air vital eſt un moyen très-commode pour coupeller en très-peu de temps l'or & l'argent, puiſque les métaux imparfaits brûlent & ſe diſſipent à ce feu, tandis que les métaux parfaits y réſiſtent beaucoup davantage ; mais que ce moyen très-expéditif ne peut donner des réſultats rigoureuſement exacts, parce qu'une petite portion de l'or & de l'argent ſe diſſipe pendant l'opération.



MÉMOIRE

Sur une nouvelle Machine à électriser, qu'on peut regarder comme une véritable Pompe à feu électrique : *cette machine étant construite de manière que son effet consiste uniquement à tirer le fluide électrique des corps, & à les électriser par-là* négativement, *ou par* raréfaction.

Par M. LE ROY.

J'AI déjà exposé tant de fois à l'Académie, la théorie des deux électricités *positive* & *négative*, ou par *condensation* & par *raréfaction ;* j'ai fait voir en tant d'occasions, avec quel succès elles rendent compte des principaux phénomènes électriques, que je crois qu'il seroit absolument superflu de revenir sur cette matière : je me contenterai seulement de faire remarquer à la Compagnie, qu'il y a déjà près de trente ans que j'ai dit & fait voir que si l'on avoit commencé par faire de l'*électricité positive*, ou de celle que donnent les machines ordinaires, c'étoit par un pur effet du hasard, & qu'on auroit pu également produire d'abord de l'*électricité négative*, si, tout restant d'ailleurs de même, on avoit isolé le coussin, au lieu d'isoler le conducteur; ou qu'on eût, comme *Otto Guerick*, fait de l'électricité en frottant des globes de soufre : j'ajoutai à cette observation, que ce qu'on avoit prétendu en avançant que les phénomènes de l'*électricité négative* ne tenoient qu'à une électricité plus foible, étoit non-seulement sans aucun fondement, mais encore absolument contraire aux phénomènes. En effet, je fis voir alors, ainsi que je l'ai souvent montré depuis, que cette électricité étoit tout aussi forte que l'autre, c'est-à-dire, que les étincelles

des corps électrifés *négativement*, font tout auffi vives & partent d'une auffi grande diftance que celles des corps électrifés *pofitivement.* Cependant, comme les machines avec lefquelles j'avois fait ces expériences, n'avoient pas été difpofées pour faire de l'*électricité négative* uniquement, j'ai penfé depuis, qu'il feroit utile & intéreffant d'en conftruire une de façon qu'elle ne produisît que de cette efpèce d'électricité, comme les machines ordinaires ne donnent que de l'*électricité pofitive;* j'ai cru que par-là on pourroit en rendre les effets plus confidérables, & en faire plufieurs applications utiles qu'on ne connoiffoit pas encore, fur-tout par rapport à l'électricité médicale. Cela me paroiffoit d'autant plus néceffaire, que toutes les machines, ou du moins celles qui étoient venues à ma connoiffance, & avec lefquelles on avoit prétendu faire de l'*électricité négative* pour électrifer des malades, étoient, il faut le dire, trop mal conftruites, pour en donner qui eût quelque degré de force, & qui fût propre par-là à nous faire connoître ce qu'on pouvoit attendre de cette électricité appliquée au corps humain. Une autre raifon importante me déterminoit encore en faveur de la machine que je méditois, c'eft qu'il ne devoit y avoir, par la nature de fon effet, aucune électricité de perdue pour le conducteur; au lieu que dans les machines ordinaires il y en a toujours, parce que ce conducteur ne reçoit pas toute celle que le corps frotté enlève aux couffins; mais ceci demande une explication.

Lorfqu'on électrife à la manière ordinaire, foit avec un globe, comme on le faifoit autrefois, foit avec un cylindre, comme les Anglois le font aujourd'hui, foit enfin avec un plateau, comme nous le pratiquons actuellement, il faut, quand cette opération fe fait avec le globe ou le cylindre, qu'ils aient fait l'un & l'autre une demi-révolution, ou à peuprès, pour que la partie du verre frottée par le couffin ou par la perfonne qui en fait la fonction, arrive au conducteur & lui communique l'électricité dont elle eft chargée: or, fi ce globe ou ce cylindre eft d'un certain diamètre, ou fe meut avec trop de lenteur, il arrivera, pour peu que l'air ne

ne ſoit pas bien ſec, que la partie frottée de leur circonférence perdra une certaine quantité de ſon fluide électrique, avant qu'elle ſoit parvenue au conducteur, & par conſéquent que ce ſera autant de moins qu'il en recevra; cela eſt ſi évident qu'il eſt preſque inutile de s'arrêter à le prouver: cependant je ne puis m'empêcher d'ajouter, pour montrer la certitude de cet effet, que dès que l'air eſt un peu humide, on ne peut faire avec ma machine *(a)* aux électricités *poſitive* & *négative*, l'extinction de ces deux électricités l'une par l'autre; car le plateau ayant perdu, avant d'arriver au conducteur de l'*électricité poſitive*, par cette humidité de l'air, une partie du fluide électrique qu'il avoit pompé de celui de l'*électricité négative* (au moyen des couſſins), il ſe trouve par-là, que ce plateau ne pouvant en communiquer autant au premier, qu'il en a enlevé au ſecond, l'équilibre ne peut être rétabli entre ces deux conducteurs; & par conſéquent qu'on ne peut produire l'extinction des deux électricités dont je viens de parler: c'eſt ce que je ferai voir à l'Académie dans un moment, ſur cette machine, ſi le temps eſt favorable; j'y ai fait faire une petite addition *(b)* par laquelle on prévient facilement cet effet qui empêche la démonſtration de ce phénomène. Au reſte, dans toutes les machines ordinaires, à globe &

(a) Cette machine à électriſer que j'ai imaginée en 1771, & dont je lûs la deſcription à la rentrée de Pâques de l'année 1772, eſt décrite dans le volume de nos Mémoires de cette année; l'ancienneté de cette date fait que je ne puis m'empêcher d'obſerver ici qu'il vient de paroître une machine de M. Nairne, habile Artiſte de Londres, propre à produire de même les deux électricités, & qui eſt conſtruite en général de la même manière; elle n'en diffère réellement qu'en ce qu'elle a un cylindre, au lieu du plateau qui eſt dans la mienne: il me paroît en conſéquence qu'on a eu tort de donner à cette machine le nom de *machine à électriſer* de M. Nairne, puiſque, comme on vient de le voir, cette machine eſt toute ſemblable à celle que j'ai imaginée, fait exécuter, & rendue publique plus de dix ans auparavant.

(b) Cette addition conſiſtoit dans un fil de laiton qui s'attachoit ſur le conducteur *de l'électricité poſitive*, & qui, s'avançant circulairement du côté des couſſins, alloit prendre l'électricité du plateau, avant qu'il eût fait ſa demi-révolution, & lorſqu'il avoit ſeulement décrit un arc où je n'avois pas à craindre qu'il eût déjà perdu une partie du fluide électrique dont il s'étoit chargé dans le frottement des couſſins.

à cylindre, avec lesquelles on fait de l'*électricité positive*, l'inconvénient dont je viens de parler est sans remède; & plus ces globes & ces cylindres sont grands, plus cet inconvénient augmente. Et si les grandes machines ou celles qui ont de grands globes ou de grands cylindres, n'ont pas toujours des effets qui répondent à leurs dimensions, c'est en grande partie par cette raison; car s'ils ne se meuvent pas fort vîte, ce qui est le cas de tous ceux qu'on tourne à la main, les parties frottées perdent de leur électricité d'une manière assez sensible avant d'arriver aux conducteurs: il y a plus, c'est que souvent il est impossible de remédier à ce défaut, parce que dans plusieurs cas ou pour certaines espèces de verre, quand on les fait tourner avec trop de vîtesse, leur électricité diminue, parce qu'ils s'échauffent trop. En vain, croiroit-on remédier à l'inconvénient dont il est question, en faisant approcher davantage le conducteur du coussin, parce que dans ce cas il perdroit de son électricité par sa trop grande proximité de ce coussin, ainsi que je l'ai prouvé dans mon Mémoire de 1753. Dans les machines à plateau, disposées à la manière ordinaire, une partie de cet inconvénient n'existe pas, parce que dans ces machines la partie frottée du plateau ne fait qu'un quart de révolution avant d'arriver au conducteur; mais aussi on retrouve ici ce qui arrive aux conducteurs, des globes ou des cylindres, qu'on approche trop près des coussins, il y a de l'électricité qui se perd par leur voisinage *(c)*. Or, la machine à plateau que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, & qui est sous ses yeux, est, par sa construction, entièrement exempte de cet inconvénient des machines à globe, à cylindre, &c. car au premier instant où le frottement commence, à ce premier instant l'électricité

(c) Je dois observer cependant, relativement à ce que je viens de dire, que la méthode qui s'est introduite, de mettre un taffetas ciré qui part du coussin & s'étend à une certaine distance sur le plateau ou sur le cylindre, prévient une partie de la perte du fluide électrique dont je viens de parler; mais cet inconvénient n'en est pas moins un inhérent à cette manière de produire l'électricité positive avec le verre.

commence auſſi, ou ſe manifeſte dans le conducteur, c'eſt-à-dire, que quelque petit que ſoit l'arc qu'on fait parcourir au plateau, il ſuffit pour que les couſſins & le conducteur qui communique bien exactement avec eux, ſoient électriſés: par-là il eſt évident que l'humidité de l'air ne peut ſe faire ſentir dans cette machine qu'autant que cette humidité peut avoir action ſur le verre pour le rendre moins ſuſceptible d'électricité, ou ſur le conducteur pour la lui dérober plus promptement; or, en cela elle n'éprouve rien qui lui ſoit particulier, & que n'éprouvent toutes les autres. Mais il faut en venir à la deſcription de cette machine que j'ai imaginée il y a déjà pluſieurs années, mais qui n'a été faite que l'année paſſée pour le Cabinet de Phyſique du Roi à Paſſy.

Elle eſt compoſée d'une roue de près de cinq pieds de diamètre qui fait tourner une poulie de ſix pouces de rayon ou à-peu-près, qui eſt montée ſur le même arbre que le plateau, & qui en eſt aſſez éloignée pour ne lui dérober que le moins d'électricité poſſible; ce plateau a trois pieds de diamètre, il eſt porté, ou plutôt ſon arbre eſt ſoutenu par des colonnes de verre auxquelles ſont accolées deux autres colonnes en arc-boutans, afin de leur donner plus de force pour réſiſter aux ébranlemens cauſés par la rotation du plateau. Les couſſins deſtinés à le frotter, ſont placés à l'extrémité de ſon diamètre horizontal, & à l'oppoſite de la roue qui le fait tourner; ces couſſins ſont portés par une forte colonne de verre afin qu'ils ſoient bien iſolés; ils ſont mobiles autour de leur centre, ſi cela ſe peut dire, afin qu'on puiſſe les changer de poſition par rapport au ſens dans lequel le plateau tourne, & par-là redonner une nouvelle force à l'électricité, quand la machine a été en action un certain temps, ainſi que je l'ai ſuffiſamment expliqué, dans mon Mémoire de 1772. L'inſtant où la partie frottée du plateau ſort de deſſous les couſſins, étant l'inſtant le plus critique, ſi cela ſe peut dire, ou le plus eſſentiel pour qu'elle ſoit électriſée avec le plus d'avantage, ou qu'elle en ſorte le plus chargée qu'il eſt poſſible d'électricité, & l'action du

plateau tendant toujours à les faire bâiller, il y a au bord ſupérieur de chaque couſſin deux vis, pour qu'en les ſerrant on les faſſe bien appuyer dans cette partie ſur ce plateau. De l'autre côté des couſſins, & ſur le même diamètre, on voit une pièce en forme de griffe qui s'avance horizontalement en embraſſant les deux faces du plateau, mais ſans les toucher; cette pièce porte des fils de laiton, on en verra l'uſage dans un moment; elle eſt ſoutenue par une colonne de verre, qui n'eſt là uniquement que pour le cas où on voudroit faire de l'*électricité poſitive;* mais comme la machine ne peut donner la plus grande *électricité négative,* qu'en faiſant ceſſer cet iſolement, il y a une chaîne de cuivre qu'on attache à la griffe, pour tranſmettre inceſſamment au plancher toute l'électricité qu'apporte le plateau; afin de rendre même cet effet plus aſſuré, la chaîne eſt chargée en-bas d'un petit poids; il eſt preſque inutile d'ajouter que pour empêcher que cette machine ne perde de l'électricité, la corde qui la fait mouvoir eſt de ſoie, & que tout ce qui eſt en verre eſt recouvert de cire d'Eſpagne.

J'ai fait tourner le plateau au moyen d'une roue, parce que j'ai conſtamment remarqué que quand on les fait tourner à la main, non-ſeulement on ne leur communique pas aſſez de vîteſſe, mais encore qu'on ne peut jamais les faire mouvoir auſſi également ou uniformément, que quand on les fait tourner par une grande roue: je me ſuis ſervi d'un plateau, mais c'eſt parce que je n'ai pu avoir de cylindre bien fait, d'un diamètre aſſez conſidérable, car je l'aurois certainement préféré, non pas parce que les Anglois ſe ſervent de cylindre aujourd'hui, mais parce que cette forme eſt ſans contredit la meilleure de toutes; on en ſentira la raiſon dans un moment. Toutes les expériences nous ont appris que pour tirer d'un certain verre donné, le *maximum* d'électricité qu'il peut fournir, il faut qu'il tourne ou qu'il ſoit frotté avec une certaine vîteſſe: or, il eſt évident que dans les globes & dans les plateaux, s'il y a une partie qui ſe meuve avec la vîteſſe néceſſaire pour qu'elle donne le plus d'électricité poſſible, il

n'y aura que celle-là, par la forme de ces globes & de ces plateaux, qui jouira de cet avantage; au lieu que dans les cylindres, si une fois vous avez trouvé la vîtesse propre aux verres dont ils sont formés, vous êtes sûr que cette vîtesse conviendra à toutes les parties qui seront frottées, puisqu'elles seront toutes à la même distance de l'axe; mais en voilà assez sur la construction de cette machine, il faut maintenant en expliquer l'effet: on le concevra sans peine.

La roue faisant tourner le plateau au moyen de la poulie, les coussins qui le frottent l'électrisent; mais ils ne peuvent le faire qu'en lui fournissant une partie du fluide électrique qu'ils contiennent, ils en perdent donc à chaque instant; or, puisqu'ils en perdent, ils en ont donc moins qu'ils n'en avoient auparavant, ou celle qui leur reste est donc plus raréfiée, ils seront donc électrisés par *raréfaction* ou *négativement;* mais les parties du plateau revenant après une révolution, rapporteroient aux coussins l'électricité dont elles avoient été chargées précédemment, excepté celle qu'elles pourroient avoir perdue en traversant l'air, comme je l'ai observé plus haut; or, en rendant par-là aux coussins à peu-près ce qu'elles leur avoient enlevé, ils se retrouveroient presque comme s'ils n'avoient pas été électrisés. La griffe dont j'ai parlé, sert à prévenir cet effet, parce que communiquant avec le plancher, au moyen de la chaîne & du petit poids, &c. elle enlève incessamment aux parties du plateau qui arrivent à elle en tournant, le fluide électrique dont elles étoient chargées; par-là elles reviennent aux coussins, toujours dépouillées de celui qu'elles leur avoient enlevé, & par-là sont propres à leur en enlever de nouveau, & de cette manière les coussins étant fortement électrisés *négativement* ou par *raréfaction,* sont par-là dans le cas de tirer ou de pomper le fluide électrique du conducteur ou de tous les corps qui en approchent; ainsi cette machine est par-là, comme je l'ai avancé, une véritable pompe à feu électrique; & il résulte évidemment de sa construction, qu'au premier instant où on fait mouvoir le plateau, à ce premier instant, ainsi que je l'ai dit, les coussins deviennent électriques;

d'où il ſuit que le conducteur avec lequel ils communiquent, eſt électriſé de même ſur le champ & ſans qu'il y ait la moindre électricité de perdue, comme cela arrive néceſſairement dans les machines ordinaires : or, il eſt important d'obſerver que ceci prouve non-ſeulement ce que j'ai avancé, en diſant que l'*électricité négative* n'eſt pas plus foible que l'*électricité poſitive,* mais encore qu'elle doit être plus forte par la manière dont on l'obtient avec le verre, puiſque dans l'opération qui la produit, il n'y en a pas de perdue.

L'Académie va voir quel eſt le degré de force de cette machine, j'en ai obtenu ſouvent, quand le temps étoit ſavorable, des étincelles de plus de ſix pouces de long, quoique le centre du plateau & ſes environs ne ſoient pas garnis de cire d'Eſpagne, pour empêcher le fluide électrique de ſe porter de l'arbre vers les couſſins, & que je n'aie pas encore employé pluſieurs autres petits moyens propres à en augmenter les effets.

Je pourrois ajouter beaucoup de choſes ſur cette nouvelle machine, & ſur la néceſſité d'adopter généralement cette diſpoſition pour faire de l'électricité, parce qu'il n'y en a & ne peut jamais y en avoir de perdue : mais je crois en avoir aſſez dit pour faire ſentir les avantages de ſa conſtruction, & l'utilité dont elle peut être, 1.° pour électriſer des malades négativement, ce qui n'a pas encore été fait, ainſi que je l'ai obſervé, avec une électricité aſſez forte ; 2.° pour faire mieux connoître les phénomènes des corps qui n'acquièrent l'électricité que par la diminution du fluide électrique, qu'ils contenoient.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Il faut regarder cette Planche comme divisée en deux parties.

Celle d'en bas qui représente toute la machine vue en perspective.

Et celle d'en haut qui fait voir en détail les différentes parties dont elle est composée.

Partie d'en bas, *Figure 1.*

P P est le plateau de verre.

C C sont les coussins avec leur ressort.

C D est le conducteur.

G G la griffe qui sert à enlever constamment au plateau le fluide électrique qu'il a pompé des coussins ; elle est armée de légers fils de laiton qui reposent ou flottent sur ce plateau, pour le toucher dans un grand nombre de points.

c h est la chaîne métallique qui y est attachée pour faire cesser l'isolement produit par la colonne ou le support de verre *f*.

S, S, S, S, S, S, S sont les supports de verre.

R R, grande roue qui, au moyen de la corde, fait tourner le plateau.

M M, manivelles servant à faire tourner la roue & placées sur son arbre, non à l'opposite l'une de l'autre, comme cela se pratique souvent, mais de manière qu'elles forment entr'elles un angle droit.

r r, poulie sur laquelle passe la corde, & qui est montée sur le même arbre que le plateau; elle est censée vue à travers ce plateau.

L L, levier ou mécanique qui sert à tenir la corde toujours tendue au même degré : cet effet s'opère au moyen du poids *p p,* qui, entraînant le levier en en bas, fait que le large rouleau qu'il porte, appuie de même constamment sur la corde qui passe au-dessous, & par-là la tend toujours de la même façon ; si elle se relâche en augmentant le poids, on reproduit encore la même tension.

Partie d'en haut, *Figure 2 & suivantes.*

Le dessin des différentes parties de cette machine est si détaillé, qu'il suffira de les indiquer par les numéros des figures, sans en dire davantage.

Les *figures 2, 3* & *4* représentent tout ce qui appartient aux coussins *C C.*

On voit dans la première de ces figures les trous *TTT*, dans lesquels entrent les vis qui servent à faire appuyer ces coussins contre le plateau.

Dans la troisième, on voit ces vis en place.

Et dans la qnatrième, on voit le ressort *rt* sans les vis, qui sont représentées au-dessous.

La *figure 5* représente la manière dont l'arbre du plateau est contenu dans ses palliers.

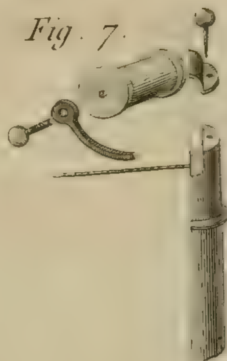
Dans la *figure 6*, on voit comment la griffe est montée sur son support, le ressort des coussins est monté de même sur le sien.

On voit dans la même figure l'extrémité en crochet de la chaîne qu'on y pend pour faire cesser l'isolement de la griffe.

Enfin, on a représenté dans les *figures 7* & *8*, tout ce qui appartient à la mécanique, qui sert à tenir la corde toujours tendue au même degré.



OBSERVATION



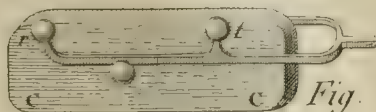
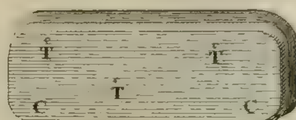


Fig. 3.





Fossier del.

Fig 7

Fig 7

Fig 8

Fig 8

Fig 6

Fig 5

Fig 4

Fig 3

Fig 2

Fig 1

Fig 1

3 6 9 12

1 2 3 Pieds

OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE, DU 18 MARS 1783.

Faite au cabinet de Physique du Roi, à Passy.

Par M.[rs] le Duc DE LA ROCHEFOUCAULD, l'Abbé ROCHON & MÉCHAIN.

Temps vrai.	*Immersions,*
7h 41′ 2″	Commencement de l'éclipse.
7. 42. 55.	*Grimaldus* entre dans l'ombre.
7. 44. 20.	*Idem* couvert.
7. 51. 44.	*Mare humorum* entre dans l'ombre.
7. 53. 46.	*Aristarchus* entre.
7. 54. 10.	*Idem* à moitié.
7. 54. 56.	*Idem* couvert
7. 54. 36.	*Keplerus* à moitié.
7. 56. 36.	*Schikardus* à moitié.
8. 1. 56.	*Copernicus* entre.
8. 3. 25.	*Idem* à moitié.
8. 4. 41.	*Idem* tout dans l'ombre.
8. 2. 47.	*Reinoldus* à moitié.
8. 7. 54.	*Tycho* entre.
8. 9. 7.	*Tycho* à moitié, & commencement d'*Ératosthènes.*
8. 10. 7.	*Tycho* tout dans l'ombre.
8. 10. 0.	*Mare nubium* toute entière.
8. 13. 56.	*Plato* entre.
8. 14. 40.	*Idem* à moitié.
8. 15. 26.	*Idem* tout dans l'ombre.
8. 17. 42.	*Manilius* entre.
8. 18. 17.	*Idem* à moitié.
8. 18. 51.	*Idem* couvert.

Temps vrai.			*Immerſions.*
8ʰ	18′	17″	*Mare ſerenitatis* entre dans l'ombre.
8.	21.	27.	*Mare tranquillitatis* & *Menelaüs* entrent.
8.	25.	8.	*Plinius* à moitié.
8.	27.	18.	*Poſſidonius* à moitié.
8.	28.	28.	*Idem* tout couvert.
8.	32.	28.	*Mare fœcunditatis* entre.
8.	34.	0.	*Proclus* à moitié.
8.	35.	38.	*Mare Criſium* entre dans l'ombre.
8.	37.	13.	*Idem* à moitié.
8.	39.	7.	*Idem* toute dans l'ombre.
8.	41.	10.	Immerſion totale.
			Émerſions.
10.	21.	43.	On ſoupçonne que le bord de la Lune commence à ſortir.
10.	22.	34.	Le bord de la Lune paroît très-clair.
10.	25.	39.	*Grimaldus* commence à ſortir.
10.	26.	26.	*Idem* à moitié.
10.	26.	49.	*Idem* tout entier.
10.	32.	12.	*Mare humorum* commence à ſortir.
10.	35.	24.	*Idem* & *Ariſtarchus* à moitié.
10.	37.	15.	*Keplerus* commence à ſortir.
10.	37.	40.	*Idem* à moitié.
10.	38.	15.	*Idem* tout entier.
10.	38.	45.	*Mare humorum* quitte l'ombre.
10.	44.	9.	*Tycho* commence.
10.	44.	53.	*Idem* à moitié.
10.	45.	46.	*Idem* tout entier.
10.	47.	18.	*Copernicus* à moitié.
10.	48.	6.	*Idem* tout entier.
10.	51.	35.	*Plato* commence à ſortir.
10.	52.	35.	*Idem* à moitié.
10.	53.	15.	*Idem* tout entier.
10.	59.	5.	*Mare ſerenitatis* commence.
11.	1.	5.	*Manilius* commence.
11.	1.	44.	*Idem* à moitié.

Temps vrai.	Émersions.
11^h 2′ 2″	*Manilius* tout entier.
11. 4. 32.	*Menelaüs.*
11. 11. 6.	*Mare ſerenitatis* en entier.
11. 14. 58.	*Proclus* à moitié.
11. 18. 26.	*Mare criſium* commence à ſortir.
11. 20. 28.	*Idem* à moitié.
11. 21. 36.	*Idem* en entier.
11. 22. 30.	On eſtime la fin de l'Éclipſe.
11. 24. 10.	L'éclipſe eſt entièrement finie.

Il faut ajouter 14″ aux temps marqués ci-deſſus, pour les réduire au Méridien de l'Obſervatoire royal de Paris.

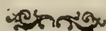
M. le Duc de la Rochefoucauld ſe ſervoit d'un téleſcope à réflexion; M. l'abbé Rochon d'une lunette achromatique de deux pieds & demi de foyer; & moi j'obſervois avec une lunette achromatique, dont l'objectif, compoſé de trois verres, & qui a 7 pieds de foyer, a été travaillé par M. l'abbé Rochon; l'oculaire adapté à cette lunette, n'amplifioit les objets que trente fois environ, & donnoit un champ de deux degrés.

Obſervation de la même Éclipſe, faite à Toulouſe par M. Darquier.

7^h 37′ 40″	Commencement.
8. 38. 25.	Immerſion totale.
10. 20. 40.	Commencement de l'émerſion.
11. 20. 30.	Fin.

M. Carouge a fait les obſervations ſuivantes chez moi, à Paris, 7″ de temps à l'orient de l'Obſervatoire royal; il s'eſt ſervi d'un téleſcope d'un pied, qui appartient à M. le Préſident de Saron.

7^h 41′ 10″	Commencement.
8. 41. 15.	Immerſion totale.
10. 23. 22.	Commencement de l'émerſion.
11. 22. 59.	Fin.



OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE, DU 10 SEPTEMBRE 1783.

Comparée aux correspondantes faites à Bagdad, à Yorck & à Laon.

Par M. MÉCHAIN.

Temps vrai.			*Immersions.*
9^h	$36'$	$0''$	La pénombre est sensible à la vue simple & par la lunette.
9.	55.	53.	Commencement de l'Éclipse.
9.	58.	33.	*Grimaldus* touche l'ombre & *Gallileus* est à moitié.
9.	59.	28.	*Grimaldus* tout couvert.
10.	2.	3.	*Aristarchus* entre dans l'ombre.
10.	2.	38.	*Idem* tout entré.
10.	4.	33.	*Keplerus* à moitié.
10.	7.	33.	*Mare humorum* entre.
10.	11.	18.	*Copernicus* entre.
10.	12.	5.	*Idem* à moitié.
10.	12.	57.	*Idem* tout entré.
10.	13.	16.	*Reinoldus* à moitié.
10.	13.	33.	*Mare humorum* en entier.
10.	15.	43.	*Bullialdus* à moitié.
10.	18.	37.	*Plato* touche.
10.	19.	2.	*Timocharis* entre.
10.	19.	18.	*Plato* à moitié.
10.	19.	52.	*Idem* & *Timocharis* en entier.
10.	21.	51.	*Archimedes.*
10.	22.	47.	*Mare imbrium* toute dans l'ombre.
10.	23.	13.	*Mare nubium* toute dans l'ombre.
10.	24.	14.	*Mare serenitatis* entre.
10.	25.	34.	*Tycho* & *Manilius* entrent.

Temps vrai.	Immersions.
10^h 26′ 29″	*Tycho* à moitié & *Manilius* en entier.
10. 27. 19.	*Tycho* tout entier.
10. 28. 9.	*Eudoxus* & *Ariſtoteles* à moitié.
10. 29. 19.	*Menelaüs* à moitié.
10. 30. 9.	*Mare tranquillitatis* entre.
10. 30. 56.	*Plinius* à moitié.
10. 33. 19.	*Poſſidonius* touche l'ombre.
10. 34. 8.	*Idem* à moitié.
10. 34. 59.	*Idem* tout entré.
10. 35. 34.	*Mare ſerenitatis* en entier.
10. 37. 17.	*Hermes* entre.
10. 38. 24.	*Idem* tout dans l'ombre.
10. 39. 5.	*Promontorium acutum.*
10. 42. 28.	*Proclus* à moitié.
10. 43. 56.	*Mare criſium* entre.
10. 46. 34.	*Idem* à moitié.
10. 49. 11.	*Idem* en entier.
10. 50. 8.	*Mare fœcunditatis* entièrement dans l'ombre.
10. 52. 56.	*Langrenus.*
10. 55. 15.	Immerſion totale.
	Émerſions.
12. 35. 5.	Le premier bord de la Lune ſort de l'ombre.
12. 36. 48.	*Grimaldus* à moitié.
12. 37. 25.	*Idem* tout entier.
12. 39. 16.	*Gallileus* à moitié.
12. 42. 50.	*Ariſtarchus* commence à ſortir.
12. 43. 26.	*Idem* tout entier, & *Mare humorum* commence.
12. 45. 35.	*Keplerus* à moitié.
12. 46. 26.	*Mare humorum* un peu plus de moitié.
12. 49. 26.	*Idem* ſortie un peu plus tôt.
12. 52. 21.	*Copernicus* commence à ſortir.
12. 53. 21.	*Idem* à moitié.
12. 54. 28.	*Idem* entièrement ſorti.
12. 56. 8.	*Plato* commence.
12. 57. 9.	*Idem* en entier.

Temps vrai.	*Émerſions.*
12h 57′ 11″	*Tycho* commence à ſortir de l'ombre.
12. 58. 46.	*Tycho* en entier.
13. 4. 6.	*Mare ſerenitatis* commence à ſortir.
13. 7. 10.	*Manilius* à moitié.
13. 7. 46.	*Idem* en entier.
13. 10. 33.	*Menelaüs* à moitié.
13. 11. 15.	*Dionyſius.*
13. 14. 21.	*Plinius* tout entier.
13. 16. 6.	*Mare ſerenitatis* totalement ſortie.
13. 24. 6.	*Proclus.*
13. 24. 36.	*Mare criſium* commence à ſortir.
13. 27. 6.	*Idem* à moitié.
13. 29. 36.	*Idem* en entier.
13. 31. 14.	*Mare fœcunditatis* totalement ſortie.
13. 34. 36.	Fin de l'éclipſe, eſtimée.
13. 34. 56.	Fin certaine.

J'ai fait ces obſervations ſous un méridien qui eſt 6 à 7″ de temps plus oriental que celui de l'Obſervatoire royal de Paris : je me ſuis ſervi d'une lunette achromatique dont l'objectif, compoſé de trois verres, a trois pieds & demi de foyer; j'y avois appliqué un oculaire qui n'amplifioit les objets que quarante fois.

Obſervation de la même Éclipſe à Bagdad, par M. l'abbé de Beauchamp, Grand-Vicaire de Babylone.

12h 44′ 04″	Commencement de l'Éclipſe.
13. 42. 46.	Immerſion totale.
15. 23. 56.	Commencement de l'émerſion.
16. 23. 11.	Fin de l'Éclipſe.

En comparant ces quatre phaſes aux correſpondantes ci-deſſus, on trouve par un milieu la différence des méridiens de 2h 48′ 13″, ou 2h 48′ 20″ en rapportant au méridien de l'Obſervatoire royal de Paris.

A York, par M. Pigott.

Temps vrai.	*Immerſions.*
9h 45′ 32″	*Gallileus* à moitié dans l'ombre.
9. 57. 20.	*Copernicus* entre dans l'ombre.
9. 58. 55.	*Idem* à moitié.
10. 5. 7.	*Plato* entre.
10. 6. 18.	*Idem* en entier.
10. 11. 32.	*Manilius* entre.
10. 11. 57.	*Tycho* entre.
10. 13. 32.	*Idem* couvert.
10. 15. 41.	*Menelaüs* à moitié.
10. 17. 25.	*Dionyſius* entre.
10. 24. 55.	*Promontorium acutum* à moitié.
10. 26. 17.	*Fracaſtorius* entre.
10. 27. 44.	*Idem* couvert.
10. 29. 0.	*Proclus* à moitié.
10. 30. 18.	*Mare criſium* enrre dans l'ombre.
10. 35. 55.	*Langrenus* entre.
10. 37. 0.	*Idem* couvert.
	Émerſions.
12. 21. 14.	Commencement de l'émerſion, douteux.
12. 21. 44.	*Idem* plus certain.
12. 23. 30.	*Grimaldus* commence à ſortir.
12. 23. 59.	*Idem* ſorti.
12. 28. 59.	*Ariſtarchus* à moitié.
12. 39. 3.	*Eratoſthenes* à moitié.
	L'air devient un peu brumeux.
12. 43. 6.	*Tycho* commence à ſortir.
12. 44. 49.	*Idem* ſorti.
13. 21. 0.	Fin de l'éclipſe; douteuſe.

En comparant neuf immerſions & ſix émerſions aux correſpondantes que j'ai obſervées, je trouve la différence des Méridiens, entre Yorck & l'Obſervatoire royal de Paris, de 13′ 34″ de temps.

A Laon par M.rs Cotte, Correspondant de l'Académie; Tournant & de Cambronne.

Commencement des immersions des Taches.	*Émersions totales des Taches.*	
10^h 0′ 0″	12^h 41′ 0″	Commencement de l'éclipse & de l'émersion.
10. 5. 0.	12. 41. 35.	*Grimaldus.*
....	12. 48. 49.	*Aristarchus.*
10. 9. 56.	12. 51. 44.	*Keplerus.*
10. 16. 52.	12. 59. 46.	*Copernicus.*
10. 31. 30	....	*Tycho.*
....	13. 13. 26.	*Manilius.*
10. 46. 16.	13. 18. 26.	*Cleomedes.*
10. 48. 34	....	*Mare crisium.*
....	13. 34. 46.	*Langrenus.*
11. 0. 23.	13. 40. 0.	Immersion totale & fin de l'éclipse.

Le commencement & la fin avec six immersions & six émersions comparées aux correspondantes à Paris, donnent la différence des Méridiens, entre Laon & l'Observatoire royal de Paris, de 5′ 29″ de temps; cette différence est de 5′ 10″ par les triangles de la France.



OCCULTATIONS

OCCULTATIONS DE QUELQUES ÉTOILES DES PLÉÏADES,

OBSERVÉES À PARIS LE 9 FÉVRIER 1783,

Et comparées aux correſpondantes obſervées à Bude, à Drontheim & à Bagdad.

Par M. MÉCHAIN.

LE temps a été très-défavorable à Paris, la Lune n'a paru que par intervalles, de ſorte que je n'ai pu obſerver aucune des immerſions, je n'ai vu que les trois émerſions ſuivantes.

Temps vrai.

$6^h\ 50'\ 45''$ Émerſion de *Mérope* de deſſous le bord éclairé de la Lune. *Bonne obſervation.*

8. 22. 52. Émerſion d'*Atlas*, douteuſe à 4 ou 5".

8. 38. 1. Émerſion de *Pleyone*, *aſſez bonne obſervation.*

J'obſervois à l'hôtel de Noailles, ſous une latitude de $48^d\ 51'\ 59''$, & $2''\ \frac{1}{2}$ de temps à l'occident de l'Obſervatoire royal.

M. Meſſier a vu l'immerſion de *Mérope* à $5^h\ 32'\ 59''\ \frac{1}{2}$, temps vrai à l'hôtel de Clugni, ou $5^h\ 32'\ 56''\ \frac{1}{2}$, Méridien de l'hôtel de Noailles; je me ſuis ſervi de cette immerſion, & de l'émerſion de la même étoile que j'ai obſervée, pour déterminer la conjonction vraie de la Lune avec *Mérope*, & l'erreur des Tables. Voici les principaux élémens de la Lune qui m'ont été communiqués par M. Cagnoli, il les a calculés ſur les Tables de Mayer, qui ſont inſérées dans la deuxième édition de l'*Aſtronomie de M. de la Lande.*

à 5h 47′ 23″,0	à 8h 52′ 41″,0	Temps moyen.
— 14. 40,0	— 14. 40,1	Équation du temps.
1s 26d 27. 50,0	1s 27d 59. 45,5	Long. vraie ☾ par les tables.
29. 45,9	29. 44,3	Mouv. horaire en longit.
4. 23. 57,9	4. 28. 16,9	Latitude vraie ☾, boréale.
1. 25,3	1. 21,4	Mouv. horaire en latitude.
54. 23,1	54. 21,0	Paral. horiſ. ☾ à Paris.
29. 42,0	29. 40,9	Diamètre horizontal ☾.

La longitude apparente de *Mérope*, ſelon le Catalogue de Mayer, étoit pour cette époque de 1s 26d 40′ 24″,2 ; & la latitude apparente de 3d 56′ 4″,4, en ayant égard à la diminution de l'obliquité de l'écliptique, depuis 1756 juſqu'en 1783, à raiſon de 33″ $\frac{1}{2}$ en un ſiècle.

D'après ces élémens, & en ſuppoſant l'aplatiſſement de la Terre de $\frac{1}{230}$, l'inflexion des rayons de 3″ $\frac{1}{2}$, je trouve que la conjonction vraie de la Lune avec *Mérope* a eu lieu à 5h 58′ 58″ $\frac{1}{2}$, temps vrai du Méridien de l'hôtel de Noailles, ou 5h 59′ 0″, Méridien de l'Obſervatoire royal; la Lune ayant une latitude vraie, corrigée de 4d 23′ 50″,8, les Tables de Mayer donnent la latitude trop grande pour cet inſtant de 25″,7, & la longitude trop avancée de 28 ſecondes.

A Bude, par M. l'Abbé Weiſſ.

Temps vrai.

7h 16′ 53″,5. Immerſion de *Mérope*.
8. 19. 17,8. Émerſion de *Mérope*.
8. 0. 22,0. Immerſion d'*Alcyone*.
9. 16. 5,0. Émerſion d'*Alcyone*.

Longitude apparente d'*Alcyone* 1s 26d 57′ 54″,2; latitude apparente 4d 1′ 44″,4.

La latitude de l'Obſervatoire de Bude eſt de 47d 29′ 44″, & ſa longitude environ 1h 6′ $\frac{1}{2}$ de temps à l'orient de Paris.

Par l'immerſion & l'émerſion de *Mérope*, je trouve que la conjonction

vraie ☾ avec cette Étoile, est arrivée à 7^h 5′ 32″, temps vrai à Bude;
Mais on l'a déterminée ci-dessus à.. 5. 59. 0., à l'Obs. de Paris.

Donc, différ. des Mér. de Paris & Bude 1. 6. 32.

Cette longitude paroît devoir approcher d'autant plus de la véritable, que l'erreur des Tables de la Lune en latitude, qui est de 25″,7, par l'observation de Paris, se trouve de 26″,0 par celle de Bude; & que plusieurs immersions & émersions du premier satellite de Jupiter, observées ces années dernières à Bude, comparées aux correspondantes que j'ai observées à Paris, donnent 1^h 6′ 35″.

L'immersion & l'émersion d'*Alcyone*, donnent la conjonction vraie de la Lune avec cette Étoile à 7^h 41′ 6″ $\frac{1}{2}$, temps vrai à Bude, ou 6^h 34′ 34″ $\frac{1}{2}$ à Paris, & l'erreur des Tables en latitude de 23″,6.

A Drontheim par M.rs Rick & Wibe, Officiers Danois, chargés par le Gouvernement de faire des observations astronomiques, pour rectifier les Cartes des côtes du Danemarck & de la Norvège.

à 7^h 14′ 31″ Temps vrai, immersion d'*Alcyone*.
8. 17. 45. Émersion douteuse d'*Alcyone*.

Ces Messieurs ont déterminé la latitude du lieu où cette occultation a été observée, de 63^d 25′ 47″; le Pere Hell & M. Bugge l'ont observée de 63^d 26′ 8″, au Temple de Sainte-Marie, qui est 15 secondes plus Nord.

L'immersion & l'émersion d'*Alcyone*, combinées ensemble, donnent la conjonction vraie ☾ avec cette Étoile à 7^h 6′ 46″ t. vr. Drontheim.
Elle a été déterminée ci-dessus à.... 7. 41. 6. $\frac{1}{2}$ à Bude.
Ainsi Drontheim seroit à l'occ. de Bude 34. 20. $\frac{1}{2}$,
Ou à l'Orient de Paris de........ 32. 12.

Mais comme l'émersion est marquée douteuse à Drontheim, ce qui paroît d'ailleurs, puisque l'erreur des Tables en latitude, qui a été trouvée de 23″,6, soustractive par l'observation

de Bude, est de 1″,5 additive par celle de Drontheim; il vaut mieux chercher le temps de la conjonction dans ce dernier lieu, par la seule immersion qui s'est faite sous le bord obscur de la Lune, & en corrigeant la latitude de la Lune, selon l'observation de Bude: on trouve alors la conjonction vraie à Drontheim, à $7^h\ 6'\ 6''$, & la différence des Méridiens avec Paris, de $31'\ 32''$ de temps, ou en degrés, $7^d\ 53'$.

A Bagdad, par M. l'Abbé de Beauchamp, Correspondant de l'Académie.

M. de Beauchamp qui est muni de tous les instrumens nécessaires pour faire de très-bonnes observations relatives à la Géographie, & qui a toutes les connoissances & le zèle qu'on peut désirer, a déterminé la latitude de Bagdad, de $33^d\ 21'\ 46''$; il a fait dans ce même lieu un assez grand nombre d'observations propres à en fixer la longitude, nous avons déjà rapporté celle de l'éclipse de Lune du 10 Septembre 1783, dont nous avons conclu la différence des Méridiens entre Bagdad & Paris, de $2^h 48' 20''$; voici plusieurs occultations des Pléïades que M. de Beauchamp a observées le 9 Février de la même année, je ne rapporterai que celles qui m'ont paru les plus exactes & que j'ai calculées.

à $8^h\ 54'\ 13''$ Temps vrai, immersion de *Celeno.*
9. 36. 15. Immersion de *Maïa.*
10. 48. 0. Émersion de *Maïa.*
10. 51. 41. Immersion d'*Alcyone.*
11. 12. 48. Émersion de *Maïa.*

Selon le Catalogue de Mayer, on a, pour le 9 Février 1783, la longitude apparente de *Celeno,* de $1^s\ 26^d\ 24'\ 32'',2$; la latitude apparente de $4^d\ 20'\ 36'',4$; celles de *Maïa,* de $1^s\ 26^d\ 39'\ 12'',2$, & $4^d\ 22'\ 6'',4$.

L'immersion & l'émersion d'*Alcyone* combinées ensemble, donnent la conjonction vraie de la Lune avec cette Étoile

à Bagdad, à $9^h\ 21'\ 52''$, & la différence des Méridiens avec Bude, de $1^h\ 40'\ 45''\frac{1}{2}$, ou avec Paris de $2^h\ 47'\ 18''$, & l'erreur des tables en latitude, de 17 secondes $\frac{1}{2}$, au-lieu de 23 secondes $\frac{1}{2}$, que j'ai trouvées par l'obſervation de Bude. Cette différence de l'erreur des Tables en latitude, annonce qu'une des deux obſervations de Bagdad eſt incertaine; mais comme les émerſions ſe faiſoient de deſſous le bord éclairé de la Lune, on doit ſuppoſer que les immerſions qui ſe faiſoient ſous le bord obſcur, ont été obſervées plus exactement; & d'ailleurs il arrive ſouvent de manquer l'inſtant précis d'une émerſion, lorſqu'on ne ſait pas, à très-peu-près, à quel point du diſque de la Lune l'étoile doit ſortir. J'ai donc préféré l'immerſion, & ayant corrigé la latitude de la Lune ſelon l'obſervation de Bude, j'ai trouvé par la ſeule immerſion à Bagdad,

La conjonction vraie à.................... $9^h\ 22'\ 44''$.
Et la différence des Méridiens avec Paris, de... 2. 48. 10.

En opérant de même pour l'immerſion de *Celeno*, & comparant la longitude de la Lune qui en réſulte, à celle conclue par l'immerſion & l'émerſion de *Mérope*, à Paris, je trouve

La différence des Méridiens de............... $2^h\ 47'\ 46''$.
L'immerſion de *Maïa* calculée de même, donne.. 2. 48. 9.

M. de Beauchamp a encore obſervé en 1783, un aſſez grand nombre d'éclipſes des ſatellites de Jupiter, voici celles du premier,

Avril 14 à	$16^h\ 33'\ 14''$	Immerſion du premier.
30	14. 51. 15	Immerſion.
Mai 23	15. 0. 31	Immerſion.
Juin 15	15. 5. 59	Immerſion.
24	11. 26. 20	Immerſion.
29	13. 18. 52	Immerſion.
Août 11	8. 32. 30	Émerſion du premier.
18	10. 29. 7	Émerſion.
25	12. 26. 24	Émerſion.
27	6. 55. 7	Émerſion.
Septembre 3	8. 53. 1	Émerſion.

J'ai obſervé à Paris l'immerſion du 15 Juin, à 12^h 17′ 47″, temps vrai, méridien de l'Obſervatoire royal; l'émerſion du 18 Août, à 7^h 40′ 44″; celle du 25 Août, à 9^h 37′ 47″: ces obſervations comparées à celles de Bagdad, donnent, par un milieu, la différence des méridiens de 2^h 48′ 24″. En corrigeant les Tables par les obſervations faites à Paris dans les temps les plus voiſins de celles de Bagdad, qui n'ont point eu de correſpondantes directes, je trouve, par un milieu, entre les réſultats des ſix immerſions & des cinq émerſions, la différence des méridiens entre Bagdad & Paris, de 2^h 48′ 17 à 18″.

Les trois immerſions des Pléïades rapportées ci-deſſus, donnent par un milieu	2^h	48′	2″
On a trouvé par l'éclipſe de Lune	2.	48.	20.
Le milieu de toutes ces déterminations ſera donc . . .	2.	48.	13.
Pour la différence des méridiens de Bagdad & de Paris, ou en degrés	42^d	3.	20.

Cette longitude doit être très-près de la vraie, elle eſt ſuffiſamment exacte pour la Géographie; la petite incertitude qui peut encore y reſter, ſera bientôt levée par les obſervations que M. de Beauchamp continue de faire à Bagdad. Il a déterminé la déclinaiſon de l'aiguille aimantée en 1783, de 9^d 30′ nord-oueſt.



OBSERVATIONS DES ÉCLIPSES DU SOLEIL, DES 14 JUIN 1779 ET 17 OCTOBRE 1781,

Faites à Paris; avec la comparaison de celle de 1779 aux Correspondantes à Vienne, à Prague & à Kongsvinger en Norwège.

Par M. MÉCHAIN.

J'OBSERVAI l'Éclipse du 14 Juin 1779, conjointement avec M. le Duc d'Ayen, & dans son Cabinet de Physique à l'hôtel de Noailles, sous la latitude de 48^d 51′ 59″, & 1″ $\frac{1}{2}$ de temps à l'occident de l'Observatoire royal.

M. le Duc d'Ayen se servoit d'une lunette achromatique, dont l'objectif, composé de trois verres & de trois pieds & demi de foyer, a été travaillé par M. de Létang; & moi je faisois usage d'une semblable lunette, qui a été faite par le sieur Carrochez.

Le ciel fut couvert jusqu'à 8^h 20′ environ, que le Soleil parut éclipsé à travers les nuages, mais si peu de temps que je ne pus point mesurer la quantité de l'Éclipse ou la distance des cornes: huit à dix minutes avant la fin, le Soleil parut plus clairement, & au temps même de cette dernière phase, il étoit parfaitement net.

M. le Duc d'Ayen détermina la fin à.. 8^h 44′ 5″ $\frac{1}{2}$, temps vrai au matin;
je l'observai à. . . . . 8. 44. 6″ $\frac{1}{2}$,

nous vîmes très-distinctement des inégalités au bord de la Lune.

Mon observation réduite au méridien de l'Observatoire royal, donne 8^h 44′ 8″; mais comme le milieu entre quatre observations est 8^h 44′ 11″, j'adopterai cette quantité pour le temps vrai de la fin de l'Éclipse à l'Observatoire.

À Prague, M. l'abbé Zéno observa le commencement à $8^h 36' 7''$, la fin à $9^h 35' 10''$; la latitude est de $50^d 5' 47''$.

À Vienne, M. Sambach observa le commencement à $8^h 51' 56''$, la fin à $9^h 31' 21''$; latitude $48^d 12' 36''$.

Au château de Kongsvinger en Norwege, M.rs Rick & Wibe observèrent la fin à $9^h 59' 45''$, & la latitude $60^d 12' 11''$.

Pour calculer ces observations, j'ai fait usage des Tables du Soleil de la Caille & de celles de la Lune de Mayer, qu'on trouve dans la seconde édition de l'Astronomie de M. de la Lande: j'ai diminué le diamètre du Soleil de 6 secondes, le demi-diamètre de la Lune de 3 secondes & demie pour l'inflexion des rayons, & j'ai supposé l'aplatissement de la Terre d'un deux-cents-trentième.

Les observations de Prague m'ont donné l'erreur des Tables de la Lune, en latitude, de $14'',3$ en excès; par les observations de Vienne, l'erreur est de $18'',2$ dans le même sens: en corrigeant la latitude de cette dernière quantité, les observations de Vienne, comparées à celle de Paris, donnent la différence des méridiens de $56' 26'' \frac{1}{2}$. Je me suis assuré par plusieurs autres éclipses de Soleil & par des occultations d'Étoiles, que Vienne n'est que $56' 6''$ à l'orient de Paris, je soupçonne que le commencement de l'Éclipse du 14 Juin 1779 a été vu un peu trop tard à Vienne. Si l'on augmente l'erreur des Tables en latitude de $0'',8$ seulement, on trouve $56' 6''$ entre Paris & Vienne par la fin de l'Éclipse observée dans ces deux lieux; & comme je crois cette détermination très-exacte, j'ai comparé la fin à Paris aux autres observations, en diminuant la latitude de la Lune de $19'',0$; ce qui m'a donné les différences des méridiens comme il suit;

Prague.	Commencement	48′ 45″	*oriental.*
	Fin	47. 56.	*oriental.*
Château de Kongsvinger, par la fin		38′ 31″	*oriental.*

Mon principal objet ayant été de déterminer la longitude de Kongsvinger, je dois remarquer qu'une variation de 4 à 5 secondes sur la latitude de la Lune, ne produit pas plus de

de 5 à 6 secondes de temps sur la différence des méridiens entre ce lieu & Paris.

Enfin, en adoptant la correction de la latitude de la Lune, de 19 secondes soustractives, on a la conjonction vraie à Paris, le 13 Juin, à $21^h\ 11'\ 18''\frac{1}{2}$ temps vrai, dans $2^s\ 23^d\ 2'\ 30''$, latitude vraie de la Lune, $1^d\ 4'\ 0''\frac{1}{2}$, erreur des Tables de la Lune en longitude, 12 secondes & demie additive.

Éclipse du Soleil, le 17 Octobre 1781.

Je fis les observations suivantes chez moi, vieille rue du Temple, sous la latitude de $48^d\ 51'\ 46''$, & 6 secondes & demie de temps à l'orient de l'Observatoire royal. L'objectif de la lunette dont je me servois, est composé de trois verres, il a trois pouces & demi d'ouverture & trois pieds & demi de foyer : les distances des cornes & les parties du Soleil non éclipsées ont été mesurées avec un très-bon micromètre à fil; la fin a été observée avec un grossissement de cent vingt fois.

Le ciel avoit été très-serein pendant toute la nuit, & j'avois observé à 4 heures du matin la Comète qui paroissoit alors; mais au commencement du jour il survint un brouillard fort épais, que le Soleil ne perça que vers 7 heures un quart, il y avoit alors près de 20 minutes que l'Eclipse étoit commencée; j'observai les distances des cornes & les parties éclairées du Soleil.

Distances des Cornes.

Avant le milieu de L'ÉCLIPSE.		Après le milieu de L'ÉCLIPSE.	
Temps vrai.		*Temps vrai.*	
7h 16′ 36″	19′ 48″,4	7h 58′ 26″	24′ 11″,7
7. 18. 0	20. 22,2	8. 2. 11	23. 49,4.
7. 19. 2	20. 41,5	8. 5. 1	23. 5,9.
7. 20. 18	21. 13,4	8. 7. 21	22. 22,2.
7. 21. 58	21. 58,1	8. 9. 14	21. 58,1.
7. 23. 46	22. 22,2	8. 11. 44	21. 13,4.
7. 25. 24	23. 5,9	8. 14. 58	19. 48,4.
7. 28. 32	23. 49,4	8. 17. 5	18. 53,1.
7. 31. 21	24. 22,3	8. 18. 18	18. 14,3.
7. 34. 39	24. 48,5	8. 19. 50	17. 25,9.
7. 40. 18	25. 26,3		

Parties du Soleil non éclipsées vers le temps de la plus grande phase.

7h 43′ 43″	19′ 51″,2.
7. 44. 36	19. 37,6.
7. 46. 3	19. 38,6.
7. 47. 53	19. 38,6.
7. 52. 7	19. 51,2.
7. 54. 20	20. 3,8.

Fin de l'Éclipse, très-exacte, à 8h 33′ 1″.

MÉMOIRE
SUR LA COMÈTE DE 1783.

Par M. MÉCHAIN.

J'AI découvert cette Comète le 26 Novembre, vers neuf heures du ſoir, elle étoit placée ſur une des pattes de derrière du Bélier, & près de l'étoile de cette conſtellation qui eſt déſignée par le *n.° 31* dans le catalogue de Flamſtéed: la Comète étoit très-foible, entourée d'une nébuloſité aſſez diffuſe, on n'y diſtinguoit point de noyau, ſi ce n'eſt que le centre étoit un peu plus lumineux que le reſte, & l'on ne voyoit aucune apparence de queue: le diamètre de toute la nébuloſité ne ſurpaſſoit point une minute & demie; enfin il étoit impoſſible de l'apercevoir à la vue ſimple.

J'ai commencé par comparer la nouvelle Comète à plusieurs petites Étoiles qui en étoient très-voiſines, mais j'ai abandonné ces premières obſervations, ayant remarqué que je déterminerois plus exactement la poſition de la Comète par les étoiles, *n.os 31 & 38* du Bélier; voici ces obſervations; les aſcenſions droites ont été déterminées par la différence des paſſages de la Comète & des Étoiles aux trois fils horaires d'un micromètre; & les déclinaiſons, par les différences avec les Étoiles meſurées avec le fil curſeur du même micromètre.

Le 26 Novembre à $10^h\ 6'\ 48''$ de temps moyen, la Comète étoit plus occidentale que l'Étoile, *n.° 31* du Bélier, de $1^d\ 24'\ 48''$, & plus boréale de $31'\ 53'',7$; donc aſcenſion droite apparente, $34^d\ 48'\ 34'',4$, & déclinaiſon boréale, $12^d\ 2'\ 3'',3$.

Le même jour, au même inſtant, la Comète étoit à l'occident du *n.° 38* du Bélier, de $3^d\ 29'\ 34'',5$, & plus

boréale de 30′ 48″; ainſi ſon aſcenſion droite étoit de 34^d 48′ 47″,7, & ſa déclinaiſon de 12^d 2′ 31″,4: je crois cette obſervation préférable à la première; dans cette obſervation & dans les ſuivantes on a appliqué l'aberration & la nutation aux poſitions moyennes des Étoiles.

Le 26 Novembre à 14^h 2′ 30″, temps moyen, la Comète étoit à l'occident de l'étoile *f* du Taureau, de 15^d 3′ 43″, & plus nord de 3′ 57″; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de 34^d 41′ 0″,6, & la déclinaiſon de 12^d 15′ 9″; ainſi je fus aſſuré dès la première nuit, du mouvement de la Comète & de ſa direction.

Le 27 à 11^h 57′ 20″, temps moyen, la Comète étoit plus orientale que la 104.e étoile des Poiſſons, de 12^d 0′ 20″,5, & plus nord de 9′ 43″; donc aſcenſion droite, 33^d 56′ 2″,5 ; déclinaiſon boréale, 13^d 20′ 51″,5.

Le 28 à 9^h 59′ 29″, différence d'aſcenſion droite avec la 19.e du Bélier + 2^d 52′ 32″, & en déclinaiſon + 11′ 18″; ainſi l'aſcenſion droite de la Comète étoit de 33^d 12′ 23″,5, ſa déclinaiſon boréale, 14^d 27′ 3″,3.

Le 29 à 8^h 47′ 49″, temps moyen, la Comète précédoit 1 θ du Taureau, en aſcenſion droite, de 31^d 35′ 40″,6, & elle paſſoit plus au nord de 3′ 31″; donc ſon aſcenſion droite apparente étoit de 32^d 28′ 28″,3, & ſa déclinaiſon 15^d 31′ 46″.

Le même jour à 12^h 22′ 52″, temps moyen, la Comète étoit plus orientale que la 4.e du Bélier, de 8^d 14′ 5″,8, & plus ſud de 9′ 13″,9; ainſi ſon aſcenſion droite étoit de 32^d 21′ 45″,2, & ſa déclinaiſon boréale de 15^d 43′ 10″,7.

Le 1.er Décembre à 12^h 7′ 37″, temps moyen, différence en aſcenſion droite avec γ du Bélier + 5^d 27′ 28″,6, & en déclinaiſon — 16′ 59″; ce qui donne l'aſcenſion droite de la Comète, de 30^d 53′ 23″, & la déclinaiſon 17^d 56′ 55″,3.

Le 2 Décembre à $7^h\ 37'\ 57''$, temps moyen, la Comète précédoit 1. θ du Bélier, de $1^d\ 13'\ 4$ ·", & elle étoit moins boréale de $3'\ 54'',5$; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de $30^d\ 18'\ 41'',7$, & la déclinaiſon de $18^d\ 50'\ 9'',2$: le mouvement de la Comète ſe ralentiſſoit de jour en jour, & elle devenoit fort difficile à voir lorſque j'éclairois les fils du micromètre.

Le mauvais temps & enſuite la grande lumière de la Lune qui fut pleine le 8 Décembre au ſoir, m'empêchèrent pendant huit jours d'obſerver la Comète; mais je l'ai retrouvée & obſervée le 11 au ſoir avant le lever de la Lune, elle n'étoit pas ſenſiblement diminuée depuis le 2, mais toujours extrêmement foible & difficile à obſerver.

Le 11 à $5^h\ 58'\ 49''$, temps moyen, la Comète étoit $12'\ 24'',2$ à l'occident de l'étoile α du grand triangle, & $74'\ 34'',6$ moins boréale; donc aſcenſion droite, $24^d\ 59'\ 56'',2$, déclinaiſon boréale $27^d\ 16'\ 58'',4$. Le même ſoir à $6^h\ 40'\ 49''$, temps moyen, la Comète précédoit *a* du petit triangle, de $6^d\ 37'\ 45''$, & elle paſſoit $20'\ 38''$ au ſud; ainſi ſon aſcenſion droite apparente étoit de $24^d\ 59'\ 16'',4$, & ſa déclinaiſon $27^d\ 17'\ 54'',4$.

Le 12 Décembre à $5^h\ 54'\ 17''$, temps moyen, différence en aſcenſion droite avec α du grand triangle — $40'\ 21'',6$, & en déclinaiſon — $25'\ 47'',7$; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de la Comète, de $24^d\ 31'\ 59''$, & ſa déclinaiſon $28^d\ 5'\ 45'',3$.

Le 13 à $6^h\ 20'\ 46''$, temps moyen, la Comète étoit plus occidentale que l'étoile α du grand triangle, de $1^d\ 7'\ 3'',5$, & plus boréale de $22'\ 16'',5$; donc ſon aſcenſion droite étoit de $24^d\ 5'\ 17''$, & ſa déclinaiſon $28^d\ 53'\ 49'',5$.

Le 14 à $6^h\ 28'\ 15''$, temps moyen, différence en aſcenſion droite avec δ d'Andromède + $16^d\ 42'\ 14''$, & en déclinaiſon — $1'\ 56''$; j'en ai déduit l'aſcenſion

droite de la Comète, de $23^d\ 39'\ 24'',5$, & la déclinaiſon $29^d\ 38'\ 57''3$.

Le 18 à $6^h\ 51'\ 13''$, temps moyen, différence en aſcenſion droite avec π d'Andromède $+$ $15^d\ 50'\ 20'',7$, en déclinaiſon — $3'\ 44'',6$; ce qui donne l'aſcenſion droite de la Comète, de $22^d\ 11'\ 19'',6$, & la déclinaiſon de $32^d\ 28'\ 10''$.

Le 19 à $10^h\ 19'\ 48''$, temps moyen, la Comète précédoit δ du triangle de $9^d\ 8'\ 3'',6$, & elle étoit exactement ſur le même parallèle; ainſi ſon aſcenſion droite étoit alors de $21^d\ 51'\ 4''\frac{1}{2}$, & ſa déclinaiſon $33^d\ 13'\ 45''\frac{1}{2}$; la Comète étoit beaucoup diminuée & très-difficile à obſerver.

Le 21 Décembre, j'obſervai la Comète pour la dernière fois à $6^h\ 0'\ 42''$, elle étoit $6^d\ 54'\ 53''$ plus orientale que β d'Andromède, & $6'\ 57''\frac{1}{2}$ moins boréale; d'où j'ai conclu ſon aſcenſion droite apparente de $21^d\ 20'\ 25'',3$, & ſa déclinaiſon boréale de $31^d\ 21'\ 31''$.

Les poſitions des Étoiles qui ne ſe trouvent point dans les Catalogues de la Caille, Bradley & Mayer, ont été établies d'après les obſervations que M. le Paute d'Agelet en a faites à ſon grand quart-de-cercle mural.

Obſervations faites à York.

Le 30 Novembre, je reçus une lettre de M. Pigott le fils, par laquelle il m'annonçoit qu'il avoit découvert cette Comète à York le 19 Novembre; voici les premières obſervations qu'il m'envoyoit; j'y joins celle du 24 du même mois qu'il m'a communiquée depuis. M. Pigott a ſuivi la Comète juſqu'au 3 Décembre; ſes autres obſervations, ainſi que celles de M. Goodricke ſon ami, ſont conſignées dans le volume des Tranſactions Philoſophiques pour l'année 1784.

Le 19 Novembre, à $11^h\ 15'$, temps moyen, réduit à Paris, $41^d\ 0'\ 0''$ aſcenſion droite de la Comète, & $3^d\ 10'$ déclinaiſon boréale, obſervation un peu douteuſe.

Le 20, à 10^h 54′, ascension droite 40^d 0′ 3″, déclinaison 4^d 32′ 45″, un peu douteuse.

Le 24, à 8^h 17′, ascension droite 36^d 32′ 57″, déclinaison 9^d 30′ 45″.

J'ai réuni dans la Table suivante les longitudes & les latitudes de la Comète, calculées d'après mes observations, & j'y ai joint les lieux du Soleil avec les logarithmes de sa distance à la Terre.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.	LONGIT. de la COMÈTE.	LATITUDE de la COMÈTE.	LONGITUDE du SOLEIL.	LOGARIT. de la distance du SOLEIL.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	
Nov. 26	10. 6. 48	36. 33. 2	1. 46. 34 *A.*	244. 36. 49	9,993937.
26	14. 2. 30	36. 30. 0	1. 32. 9 *A.*	244. 46. 57	9,993925.
27	11. 57. 20	36. 10. 10	0. 15. 40 *A.*	245. 42. 38	9,993858.
28	9. 59. 29	35. 52. 9	1. 0. 50 *B.*	246. 38. 10	9,993789.
29	8. 47. 49	35. 33. 50	2. 16. 1 *B.*	247. 35. 53	9,993719.
29	12. 22. 52	35. 31. 11	2. 28. 57	247. 44. 58	9,993710.
Déc. 1	12. 7. 37	34. 57. 24	5. 3. 28	249. 46. 14	9,993576.
2	7. 37. 57	34. 44. 47	6. 4. 46	250. 35. 43	9,993522.
11	5. 58. 49	33. 11. 56	15. 43. 0	259. 40. 9	9,993048.
11	6. 40. 49	33. 11. 42	15. 44. 5		
12	5. 54. 17	33. 7. 11	16. 37. 31	260. 41. 0	9,993010.
13	6. 20. 46	33. 3. 34	17. 30. 53	261. 43. 11	9,992972.
14	6. 28. 15	32. 59. 48	18. 21. 15	262. 44. 21	9,992937.
18	6. 51. 13	32. 56. 8	21. 26. 27	266. 50. 4	9,992821.
19	10. 19. 48	32. 58. 51	22. 15. 4	268. 0. 4	9,992794.
21	6. 0. 42	33. 3. 4	23. 27. 21 *B.*	269. 51. 18	9,992756.

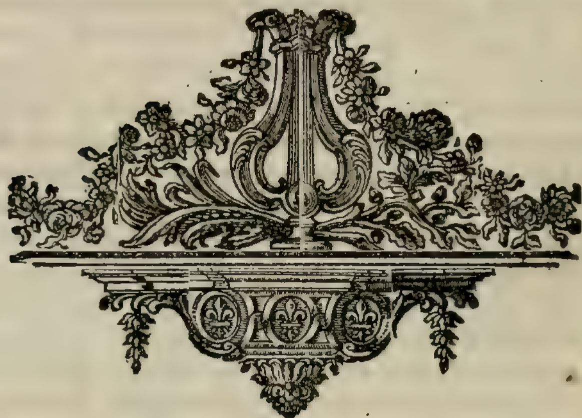
J'ai déterminé les élémens de l'orbite de cette Comète, comme il suit; mais j'avertis qu'ils ne satisfont pas pleinement aux Observations, il y a des différences de 5 à 6 minutes

ſur les longitudes, vers les 11 & 12 Décembre ; les différences en latitude ſont au contraire toujours très-petites.

Lieu du nœud aſcendant.......	$1^s\ 24^d\ 14'$
Inclinaiſon de l'orbite.......	0. 53. 9.
Lieu du périhélie ſur l'orbite...	1. 15. 25.
Logar. de la diſtance périhélie..	0,194606.

Paſſage au périhélie, 15 Nov. à $5^h\ 53'\frac{1}{2}$ temps moyen à Paris.

Sens du mouvement....Direct.



REMARQUES

REMARQUES

Sur la manière d'intégrer par approximation les Équations différentielles, & les Équations aux différences partielles.

Par M. COUSIN.

J'AI diſtribué ces remarques dans pluſieurs Mémoires que je me propoſe de publier ſucceſſivement; il n'eſt queſtion dans celui-ci que des Équations différentielles. On ne ſait pas les intégrer exactement dans tous les cas; & les tentatives qu'on a ſaites juſqu'ici, ne donnent pas lieu d'eſpérer qu'on parvienne ſi-tôt à réſoudre ce problème; on a ſuppléé à ce défaut de l'analyſe, pour quelques équations différentielles, en donnant des méthodes d'un uſage facile de les réſoudre par des ſéries convergentes. Je ne fais pour le moment aucune application de celle que j'indique dans ce Mémoire, voici en quoi elle conſiſte. Toute équation différentielle d'un ordre ſupérieur au premier, peut être conſidérée comme une équation aux différences partielles. Lorſqu'elle eſt du ſecond ordre, par exemple, l'équation aux différences partielles qui lui répond, eſt du premier; l'intégrale complète de celle-ci doit renfermer une fonction arbitraire d'une certaine quantité: en égalant cette quantité à une conſtante, & mettant une autre conſtante pour la fonction arbitraire, on aura les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle. Je repréſente ces intégrales par des ſuites ordonnées relativement aux puiſſances du rapport entre les différentielles des deux variables qui entrent dans la propoſée; & ayant ſatisfait aux conditions, les coéfficiens, fonctions des mêmes variables, ſe trouvent être renfermés dans des équations aux différences partielles qu'on peut toujours intégrer complètement. Ces intégrales, & par conſéquent 1783.

les coéfficiens, contiennent des fonctions arbitraires d'une seule variable, qui serviront à remplir les conditions relatives à chacun des problèmes qu'on pourra proposer. Il s'agit ensuite d'éliminer le rapport entre les différentielles, au moyen des deux intégrales premières; le problème qu'il faut résoudre pour cela, peut s'énoncer ainsi: ayant z égal à une fonction de u, x, z, qui devient fonction de x seul lorsque $u = 0$, trouver la valeur de z, & même d'une fonction donnée de cette quantité, en u & x, par une suite ordonnée relativement aux puissances de u. La solution de ce problème me conduit à une formule pour le retour des suites, plus générale qu'aucune de celles qui sont connues.

Dans le Mémoire qui a pour titre, *Remarques sur la théorie mathématique du mouvement des fluides*, je m'occupe de l'intégration par approximation de quelques équations aux différences partielles, dont l'inconnue renferme plus de deux variables. Cette matière est entièrement neuve, quoique les recherches sur le mouvement des fluides aient conduit à des équations de ce genre. Après avoir démontré ces équations, je fais voir qu'on peut toujours intégrer complètement celles qui sont données par la supposition que le fluide doit être continu; mais comme ces intégrales doivent encore satisfaire à d'autres équations, les fonctions arbitraires qu'elles renferment cesseront d'être aussi générales sans changer d'espèce, & c'est en quoi consiste la difficulté de cette sorte de problèmes. J'ai terminé ce Mémoire au moment où je n'aurois pu m'étendre davantage, sans entrer dans des détails de calcul qui l'auroient augmenté considérablement.

(1.) Si l'équation différentielle proposée est du second ordre, on pourra la représenter par $\frac{d^2 y}{d x^2} + \mu = 0$, μ étant une fonction quelconque de x, y & $\frac{d y}{d x}$, que je ferai $= z$. A cette équation différentielle du second ordre répond une équation aux différences partielles

$$\frac{d z}{d x} + z \frac{d z}{d y} + \mu = 0;$$

& si celle-ci est supposée avoir pour intégrale complète $B + F : K = 0$; en différenciant cette intégrale deux fois, l'une par rapport à y, l'autre par rapport à x, & en éliminant la fonction arbitraire, on trouvera une équation aux différences partielles, qui, étant comparée à la précédente, donnera pour déterminer B & K, ces deux-ci

$$\frac{dK}{dz}\left(\frac{dB}{dx} + z\frac{dB}{dy}\right) - \frac{dB}{dz}\left(\frac{dK}{dx} + z\frac{dK}{dy}\right) = 0;$$

$$\frac{dK}{dy}\left(\frac{dB}{dx} - \mu\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dy}\left(\frac{dK}{dx} - \mu\frac{dK}{dz}\right) = 0.$$

Nous supposerons

$$B = mz + m1 + \frac{m2}{z} + \frac{m3}{z^2} + \frac{m4}{z^3} + \&c.;$$

$$K = Mz + M1 + \frac{M2}{z} + \frac{M3}{z^2} + \frac{M4}{z^3} + \&c.$$

Ces substitutions étant faites dans la première des équations que nous venons de trouver, il faudra qu'elle ait lieu indépendamment de z; c'est pourquoi si l'on fait pour abréger

$$m\frac{dM}{dx} - M\frac{dm}{dx} = n, \quad m\frac{dM1}{dx} - M\frac{dm1}{dx} = n1;$$

$$m\frac{dM2}{dx} - M\frac{dm2}{dx} - m2\frac{dM}{dx} + M2\frac{dm}{dx} = n2;$$

$$m\frac{dM3}{dx} - M\frac{dm3}{dx} - m2\frac{dM1}{dx} + M2\frac{dm1}{dx} - 2m3\frac{dM}{dx} + 2M3\frac{dm}{dx} = n3;$$

$$m\frac{dM4}{dx} - M\frac{dm4}{dx} - m2\frac{dM2}{dx} + M2\frac{dm2}{dx} - 2m3\frac{dM1}{dx} + 2M3\frac{dm1}{dx} - 3m4\frac{dM}{dx} + 3M4\frac{dm}{dx} = n4,$$

&c.

On en tirera

$$M\frac{dm}{dy}-m\frac{dM}{dy}=0,\; M\frac{dm1}{dy}-m\frac{dM1}{dy}=n;$$

$$M\frac{dm2}{dy}-m\frac{dM2}{dy}-M2\frac{dm}{dy}+m2\frac{dM}{dy}=n1,$$

$$M\frac{dm3}{dy}-m\frac{dM3}{dy}-M2\frac{dm1}{dy}+m2\frac{dM1}{dy}+2m3\frac{dM}{dy}-2M3\frac{dm}{dy}=n2;$$

$$M\frac{dm4}{dy}-m\frac{dM4}{dy}-M2\frac{dm2}{dy}+m2\frac{dM2}{dy}+2m3\frac{dM1}{dy}-2M3\frac{dm1}{dy}+3m4\frac{dM}{dy}-3M4\frac{dm}{dy}=n3;$$

$$M\frac{dm5}{dy}-m\frac{dM5}{dy}-M2\frac{dm3}{dy}+m2\frac{dM3}{dy}+2m3\frac{dM2}{dy}-2M3\frac{dm2}{dy}+3m4\frac{dM1}{dy}-3M4\frac{dm1}{dy}+4m5\frac{dM}{dy}-4M5\frac{dm}{dy}=n4;$$

&c. De plus

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz}-\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy}=n+\frac{n1}{z}+\frac{n2}{z}+\&c.$$

Et si nous convenons de nous servir de mM pour représenter

$$\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx}-\frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy},$$

& ainsi des autres quantités de même forme, nous trouverons

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx}-\frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy}=\mathrm{mM}z^2+(\mathrm{m1M}+\mathrm{mM1})z+\mathrm{m2M}+\mathrm{m1M1}+\mathrm{mM2}+(\mathrm{m3M}+\mathrm{m2M1}+\mathrm{m1M2}+\mathrm{mM3})z^{-1}+(\mathrm{m4M}+\mathrm{m3M1}+\mathrm{m2M2}+\mathrm{m1M3}+\mathrm{mM4})z^{-2}+\&c.$$

(2.) Si en développant μ, nous pouvons lui donner cette forme

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma + \frac{\delta}{z} + \frac{\varepsilon}{z^2} + \&c.$$

nous aurons cette autre suite d'équations

$$\mathrm{m}\mathrm{M} = \alpha n,$$

$$\mathrm{m}1\mathrm{M} + \mathrm{m}\mathrm{M}1 = \alpha n1 + \beta n,$$

$$\mathrm{m}2\mathrm{M} + \mathrm{m}1\mathrm{M}1 + \mathrm{m}\mathrm{M}2 = \alpha n2 + \beta n1 + \gamma n,$$

$$\mathrm{m}3\mathrm{M} + \mathrm{m}2\mathrm{M}1 + \mathrm{m}1\mathrm{M}2 + \mathrm{m}\mathrm{M}3 = \alpha n3 + \beta n2 + \gamma n1 + \delta n,$$

$$\mathrm{m}4\mathrm{M} + \mathrm{m}3\mathrm{M}1 + \mathrm{m}2\mathrm{M}2 + \mathrm{m}1\mathrm{M}3 + \mathrm{m}\mathrm{M}4 = \alpha n4 + \beta n3 + \gamma n2 + \delta n1 + \varepsilon n, \&c.$$

Or, e étant le nombre dont le logarithme eſt l'unité, ſi l'on prend $x1$, $X1$, $x2$, $X2$, &c, pour repréſenter des fonctions de la ſeule variable x, on tirera de ces équations & de celles du *n.°* précédent,

$$m = Mx1,\ M = e^{\int \alpha dy} X1;$$

$$m1 = x1M1 + (N1) \ldots x2 - x'1 \int M dy;$$

$$M1 = X2 + \int (\beta M - \frac{dM}{dx}) dy;$$

$$m2 = x1M2 + (N2) \ldots \frac{1}{M}(x3 + \int n1 dy);$$

$$M2 = e^{-\int \alpha dy} \{ X3 + \int e^{\int \alpha dy} [\gamma M + \frac{1}{Mx'1}(\mathrm{m}1\mathrm{M}1 + \frac{dM}{dx}(\alpha N2 + \frac{dN2}{dy}) - \beta n1)] dy \};$$

$$m3 = x1M3 + (N3) \ldots \frac{1}{M^2}[x4 + \int (n2 + M2\frac{dm1}{dy} - m2\frac{dM1}{dy}) M dy].$$

$$M3 = e^{-2\int\alpha dy}\{X4 + \int e^{2\int\alpha dy}[\delta M + \frac{\Upsilon}{Mx'1} (m2M1 + m1M2 + \frac{dM}{dx}(2\alpha N3 + \frac{dN3}{dy}) + \alpha N2\frac{dM1}{dx} - \alpha M2.(M1x'1 + \frac{dN1}{dx}) - \beta n2 - \gamma n1)]dy\};$$

$$m4 = x1M4 + (N4)\ldots\frac{1}{M^3}[xs + \int M^2(n3 + M2\frac{dm2}{dy} - m2\frac{dM2}{dy} + 2M3\frac{dm1}{dy} - 2m3\frac{dM1}{dy})dy],$$

$$M4 = e^{-3\int\alpha dy}\{X5 + \int e^{3\int\alpha dy}[\varepsilon M + \frac{\Upsilon}{Mx'1} (m3M1 + m2M2 + m1M3 + \frac{dM}{dx}\times \times(3\alpha N4 + \frac{dN4}{dy}) + 2\alpha N3\frac{dM1}{dx} - 2\alpha M3 \times(M1x'1 + \frac{dN1}{dx}) + \alpha N2\frac{dM2}{dx} - \alpha M2 \times(x'1M2 + \frac{dN2}{dx}) - \beta n3 - \gamma n2 - \delta n1)]dy\};$$

&c.

Il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer plus loin ces ſéries pour découvrir l'ordre qu'elles doivent ſuivre. Ainſi la propoſée aura pour intégrales de l'ordre immédiatement inférieur,

$$Mz + M1 + \frac{M2}{z} + \frac{M3}{z^2} + \frac{M4}{z^3} + \text{\&c.} = a;$$

$$ax1 + N1 + \frac{N2}{z} + \frac{N3}{z^2} + \frac{N4}{z^3} + \text{\&c.} = b;$$

a & b étant les conſtantes arbitraires.

(3.) Les arbitraires $x1$, $X1$, &c. ſerviront à remplir les conditions relatives à chacun des problèmes qu'on pourra propoſer. Si, par exemple, on demandoit les cas où l'équation

$\frac{dz}{dx} + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ a pour intégrales premières complètes $Mz + M1 = a$, $mz + m1 = b$, & pour intégrale finie complète $ax1 + N1 = b$, les formules précédentes donneroient pour conditions

$$\frac{dN1}{dx} + x'1\,M1 = 0, \frac{dM1}{dx} = \gamma M;$$

ou

$$x'2 + x'1\,X2 + \int[(\beta - 2\int\frac{d\alpha}{dx}dy),$$

$$x'1 - \frac{2\,x'1\,X'1}{X1} - x''1]\,Mdy = 0,$$

$$X'2 + \int[\frac{d\beta}{dx} - \int\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \int\frac{d\alpha}{dx}dy.(\beta - \int\frac{d\alpha}{dx}dy),$$

$$+ \frac{X'1}{X1}(\beta - 2\int\frac{d\alpha}{dx}dy) - \frac{X''1}{X1}]\,Mdy = \gamma M:$$

ces conditions feroient par conféquent que

$$\beta - 2\int\frac{d\alpha}{dx}dy \;\&\; \frac{d\beta}{dx} - \int\frac{d^2\alpha}{dx^2}$$

$$+ \int\frac{d\alpha}{dx}dy(\beta - \int\frac{d\alpha}{dx}dy) - \frac{d\gamma}{dy} - \alpha\gamma$$

fuffent fonctions de la feule variable x. Nommons ρ & σ ces deux fonctions, nous aurons

$$\sigma + \rho\frac{X'1}{X1} - \frac{X''1}{X1} = 0, \frac{x'''1}{x'1} + \frac{2\,X'1}{X1} = \rho;$$

$$X'2 = \gamma M - \int(\frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma)Mdy,\; x'2 + x'1\,X2 = 0;$$

& il ne s'agira plus que de trouver $X1$ au moyen de l'équation linéaire du fecond ordre qui le renferme. Dans les autres cas, on pourra regarder nos deux intégrales premières comme étant des féries convergentes; pour en tirer les valeurs de z, on prendra une fonction t de x, y qui foit moindre que 1, & ayant mis pour y fa valeur en x & t, on déterminera les arbitraires $x3$, $X3$, &c. de manière que $m.2$, $M2$, &c. foient nuls lorfqu'on fait $t = 0$: cela pofé, les méthodes connues du retour des fuites donneront l'intégrale finie par une fuite ordonnée relativement aux puiffances de t. Au

moyen des mêmes méthodes, on tirera de l'équation précédente la valeur de t en fonction de x & des deux constantes arbitraires, par une suite ordonnée relativement aux puissances de quelque fonction de x qui sera moindre que 1.

(4.) Toutes les équations différentielles du troisième ordre peuvent être représentées par $\frac{1}{dx} dZ + \mu = 0$, μ étant une fonction quelconque de x, y, $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{1}{dx} dz = Z$: à cette équation différentielle répond une équation aux différences partielles du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2z \frac{d^2 z}{dx\,dy} + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} Z + \mu = 0;$$

& si on peut supposer que celle-ci a pour intégrale complète $B + F:K = 0$, on aura, pour déterminer B & K, ces deux équations où ∂B, ∂K désignent les différentielles de ces quantités prises en ne faisant varier que x & y:

$$\frac{dK}{dZ}\left(\frac{\partial B}{dx} + Z\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dZ}\left(\frac{\partial K}{dx} + Z\frac{dK}{dz}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} - \frac{dz}{dx}\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz}\right) \\ + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz}\right) \\ = \mu\left(\frac{dK}{dZ}\frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dZ}\frac{dK}{dy}\right) \\ + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dK}{dZ}\frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dZ}\frac{dK}{dz}\right). \end{aligned}$$

Si la proposée étoit de l'ordre n, B & K seroient donnés par les mêmes équations où Z, z seroient les rapports entre les différentielles des ordres $n - 1$, $n - 2$, où la caractéristique ∂ désigneroit une différentielle prise en faisant varier x, y, $\frac{dy}{dx}$ & les autres rapports jusqu'à z exclusivement, & $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dK}{dx}$ des différences partielles prises en faisant aussi varier ces mêmes rapports considérés comme fonctions de x, y. Je reviens aux équations du troisième ordre, & je suppose

ſuppoſe

$$B = mZ + m1 + \frac{m2}{Z} + \frac{m3}{Z^2} + \frac{m4}{Z^3} + \&c.$$

$$K = MZ + M1 + \frac{M^2}{Z} + \frac{M^3}{Z^2} + \frac{M^4}{Z^3} + \&c.$$

On aura évidemment, en faiſant, pour abréger,

$$m\frac{\partial M}{dx} - M\frac{\partial m}{dx} = n,\ m\frac{\partial M1}{dx} - M\frac{\partial m1}{dx} = n1,$$

$$m\frac{\partial M2}{dx} - M\frac{\partial m2}{dx} - m2\frac{\partial M}{dx} + M2.\frac{\partial m}{dx} = n2,$$

$$m\frac{\partial M3}{dx} - M\frac{\partial m3}{dx} - m2\frac{\partial M1}{dx} + M2\frac{\partial m1}{dx}$$
$$- 2m3\frac{\partial M}{dx} + 2M3\frac{\partial m}{dx} = n3;$$

$$m\frac{\partial M4}{dx} - M\frac{\partial m4}{dx} - m2\frac{\partial M2}{dx} + M2.\frac{\partial m2}{dx}$$
$$- 2m3\frac{\partial M1}{dx} + 2M3\frac{\partial m1}{dx}$$
$$- 3m4\frac{\partial M}{dx} + 3M4\frac{\partial m}{dx} = n4;$$

&c.

On aura, dis-je, en prenant p, q, r, $ſ$, t, &c. pour repréſenter des fonctions de x, y ſeuls,

$$m = pM,\quad m1 = pM1 + (N1)\ldots q - \frac{\partial p}{dx}\int Mdz;$$

$$m2 = pM2 + (N2)\ldots\frac{1}{M}(r + \int n1\,dz),$$

$$m3 = pM3 + (N3)\ldots\frac{1}{M^2}\left[ſ + \int\left(n2 + M2\frac{dm1}{dz} - m2\frac{dM1}{dz}\right)Mdz\right],$$

$$m4 = pM4 + (N4)\ldots\frac{1}{M^3}\left[t + \int\left(n3 + M^2\frac{dm2}{dz} - m2\frac{dM2}{dz} + 2M3\frac{dm1}{dz} - 2m3\frac{dm1}{dz}\right)M^2dz\right],$$

&c.

Soit

$$\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy} = mM,$$

$$\frac{dm}{dz}\frac{dM}{dy} - \frac{dm}{dy}\frac{dM}{dz} = (mM),$$

$$\frac{dm}{dz}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dz} = [mM],$$

& ainsi des autres quantités semblables, nous aurons

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} = mMZ^2 + (m1M + mM1)Z + m2M + m1M1 + mM2 + (m3M + m2M1 + m1M2 + mM3)Z^{-1} + (m4M + m3M1 + m2M2 + m1M3 + mM4)Z^{-2} + \&c.$$

$$\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy} - \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz} = (mM)Z^2 + [(m1M) + (mM1)]Z + (m2M) + (m1M1) + (mM2) + [(m3M) + (m2M1) + (m1M2) + (mM3)]Z^{-1} + [(m4M) + (m3M1) + (m2M2) + (m1M3) + (mM4)]Z^{-2} + \&c.$$

$$\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz} = [mM]Z^2 + ([m1M] + [mM1])Z + [m2M] + [m1M1] + [mM2] + ([m3M] + [m2M1] + [m1M2] + [mM3])Z^{-1} + ([m4M] + [m3M1] + [m2M2] + [m1M3] + [mM4])Z^{-2} + \&c.$$

De plus,

$$\frac{dK}{dZ}\frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dZ}\frac{dK}{dz} = n + n1\,Z^{-1} + n2\,Z^{-2} + n3\,Z^{-3} + \&c.,$$

$$\frac{dK}{dZ}\frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dZ}\frac{dK}{dy} = \left(M\frac{dm}{dy} - m\frac{dM}{dy}\right)Z + M\frac{dm1}{dy} - m\frac{dM1}{dy} + \left(M\frac{dm2}{dy} - m\frac{dM2}{dy} - M2\frac{dm}{dy} + m2\frac{dM}{dy}\right)Z^{-1} + \left(M\frac{dm3}{dy} - m\frac{dM3}{dy} - M2\frac{dm1}{dy} + m2\frac{dM1}{dy} - 2M3\frac{dm}{dy} + 2m3\frac{dM}{dy}\right)Z^{-2} + \&c.$$

C'est pourquoi si nous représentons cette dernière quantité par $iZ + h + h1\,Z^{-1} + h2\,Z^{-2} + h3\,Z^{-3} + \&c$, le multiplicateur de μ sera $h + h1\,Z^{-1} + h2\,Z^{-2} + h3\,Z^{-3} + \&c. + (iZ + n + n1\,Z^{-1} + n2\,Z^{-2} + n3\,Z^{-3} + \&c.)\frac{dz}{dy}$.

(5.) En développant μ, si nous pouvons lui donner cette forme,

$$\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma + \frac{\delta}{Z} + \frac{\varepsilon}{Z^2} + \&c,$$

nous aurons, par la comparaison des termes homologues, premièrement,

$[mM] = \alpha n$, $[m1\,M] + [mM1] = \beta n + \alpha n1$, &c,

où par $[mM]$ on entend $\frac{\partial M}{dx}\frac{dm}{dz} - \frac{\partial m}{dx}\frac{dM}{dz}$, & ainsi des autres quantités semblables : on tirera de ces équations, comme dans le *n.*° 2,

$$M = e^{\int \alpha dz} P,\ M1 = Q + \int\left(\beta M - \frac{\partial M}{dx}\right)dz,$$

$$M2 = e^{-\int \alpha dz}\{R + \int e^{\int \alpha dz}[\gamma M + (1 : M\frac{\partial p}{dx})([m\,1\,M1] + \frac{\partial M}{dx}(\alpha N2 + \frac{dN2}{dz}) - \beta n\,1)]dz\},$$

$$M3 = e^{-2\int \alpha dz}\{S + \int e^{2\int \alpha dz}[\delta M + (1 : M\frac{\partial p}{dx})([m2\,M1] + [m\,1\,M2] + \frac{\partial M}{dx}(2\alpha N3 + \frac{dN3}{dz}) + \alpha N2\frac{dM1}{dx} - \alpha M2(M1\frac{\partial p}{dx} + \frac{\partial N1}{dx}) - \beta n2 - \gamma n\,1)]dz\},$$

$$M4 = e^{3-\int \alpha dz}\{T + \int e^{3\int \alpha dz}[\varepsilon M + (1 : M\frac{\partial p}{dx})([m\,3\,M1] + [m\,2\,M2] + [m\,1\,M3] + \frac{\partial M}{dx}(3\alpha N4 + \frac{dN4}{dz}) + 2\alpha N3\frac{\partial M1}{dx} - 2\alpha M3(M1\frac{\partial p}{dx} + \frac{\partial N1}{dx}) + \alpha N2\frac{\partial M2}{dx} - \alpha M2(M2\frac{dp}{dx} + \frac{dN2}{dx}) - \beta n\,3 - \gamma n2 - \delta n\,1)]dz\}.$$

P, Q, &c. étant des fonctions arbitraires de x, y, ajoutées en intégrant. Secondement, on trouvera pour équations de condition,

$$(m\quad M) = -i\alpha,$$

$$(m\,1\,M) + (m\,M\,1) = \text{m M} - \alpha h - i\beta,$$

$$(m\,2\,M) + (m\,1\,M\,1) + (m\,M\,2) = \text{m 1 M} + \text{m M 1} - \beta h - \alpha h\,1 - i\gamma,$$

$$(m\,3\,M) + (m\,2\,M1) + (m\,1\,M2) + (m\,M\,3) = \text{m 2 M} + \text{m 1 M 1} + \text{m M 2} - \gamma h - \beta h\,1 - \alpha h\,2 - i\delta, \text{ \&c.}$$

Les arbitraires, P, Q, &c. serviront à remplir les conditions du problème; si, par exemple, on demandoit les cas

où l'équation du troisième ordre

$$\frac{1}{dx} d Z + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma = 0,$$

a pour intégrales de l'ordre immédiatement inférieur

$$M Z + M 1 = a, \quad m Z + m 1 = b,$$

on trouveroit pour conditions

$$\frac{\partial M 1}{d x} = \gamma M, \quad \frac{\partial N 1}{d x} + M 1 \frac{\partial p}{d x} = 0.$$

Quant aux équations qui précèdent, elles ne donnent pas de conditions de plus, puisqu'elles se réduisent à

$$\frac{d M}{d z} = \alpha M, \quad \frac{d M 1}{d z} = \beta M - \frac{\partial M}{d x};$$

$$\frac{d M 2}{d z} + \alpha M 2 = \gamma M + (1 : M \frac{\partial p}{d x})$$

$$\{[m 1 M 1] + \frac{\partial M}{d x}(\alpha N 2 + \frac{d N 2}{d z}) - \beta n 1\}, \text{ \&c.}$$

(6.) Il nous reste à faire voir comment une méthode très-connue du retour des suites peut s'appliquer ici. Nous avons à résoudre ce problème ; étant donné $z = V$, où V est une fonction de u, x, z qui devient fonction de x seul lorsqu'on fait $u = 0$, trouver la valeur de z, & même d'une fonction donnée Z de z, en u & x, par une suite ordonnée relativement aux puissances de u. En nommant S la valeur de Z qui répond à $u = 0$, & $S 1$, $S 2$, $S 3$, &c. ce que deviennent $\frac{d Z}{d u}$, $\frac{d^2 Z}{d u^2}$, $\frac{d^3 Z}{d u^3}$, &c. lorsqu'on fait $u = 0$ & $Z = S$; on aura

$$Z = S + u S 1 + \frac{u^2}{1.2} S 2 + \frac{u^3}{1.2.3} S 3 + \text{\&c.}$$

Je prendrai l'équation plus générale $z = \varphi : V$, qui

étant différenciée deux fois, en faisant varier successivement u & x, donne

$$\frac{dz}{du} = \left(\frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{du} + \frac{\partial V}{du}\right)\varphi' : V,$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial V}{dx}\right)\varphi' : V;$$

& éliminant la fonction arbitraire, l'équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{du} - V' \frac{dz}{dx} = 0,$$

dans laquelle

$$V' = \frac{\partial V}{du} : \frac{\partial V}{dx}.$$

On aura donc aussi

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dZ}{du} = V' \frac{dZ}{dx}.$$

Si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{\partial V'}{du} - V' \frac{\partial V'}{dx} = V1;$$

$$\frac{\partial V1}{du} - V' \frac{\partial V1}{dx} = V2;$$

$$\frac{\partial V2}{du} - V' \frac{\partial V2}{du} = V3, \text{ \&c.}$$

& que nous nous servions de la caractéristique d de manière que

$$dV' = \frac{\partial V'}{dz} dz + \frac{\partial V'}{dx} dx + \frac{\partial V'}{du} du,$$

& ainsi des autres, nous aurons

$$\frac{dV'}{du} = V1 + V' \frac{dV'}{dx};$$

$$\frac{dV1}{du} = V2 + V' \frac{dV1}{dx};$$

$$\frac{dV2}{du} = V3 + V' \frac{dV2}{dx}, \text{ \&c.}$$

Cela posé, l'équation (1) étant différenciée par rapport à u, on en tire

$$\frac{d^2 Z}{d u^2} = V^1 \frac{d^2 Z}{dx\,du} + \frac{d V^1}{d u} \frac{d Z}{d x},$$

& mettant pour $\frac{d^2 Z}{dx\,du}$, $\frac{d V^1}{d u}$ leurs valeurs

$$\frac{d^2 Z}{d u^2} = V^{1\,2} \frac{d^2 Z}{d x^2} + 2 V^1 \frac{d V^1}{d x} \frac{d Z}{d x} + V\,1 \frac{d Z}{d x};$$

donc (2) . . . . $\frac{d^2 Z}{d u^2} = \frac{d.V^{1\,2} \frac{d Z}{d x}}{d x} + V\,1 \frac{d Z}{d x}.$

Je continue de différencier, & je trouve

$$\frac{d^3 Z}{du^3} = V^{1\,2} \frac{d^3 Z}{d x^2\, du} + 2 V^1 \frac{d V^1}{d u} \frac{d^2 Z}{d x^2}$$
$$+ \left(2 V^1 \frac{d V^1}{d x} + V\,1\right) \frac{d^2 Z}{dx\,du} + \left(2 V^1 \frac{d^2 V^1}{dx\,du} + 2 \frac{d V^1}{d x} \frac{d V^1}{d u} + \frac{d V\,1}{d u}\right) \frac{d Z}{d x}.$$

On en tire, en mettant pour $\frac{d^3 Z}{d x^2\, du}$, $\frac{d^2 Z}{d x\, d u}$ leurs valeurs tirées de l'équation (1), & pour $\frac{d^2 V^1}{d x\, d u}$, $\frac{d V^1}{d u}$, $\frac{d V\,1}{d u}$ leurs valeurs tirées des équations qui suivent,

$$\frac{d^3 Z}{du^3} = V^{1\,3} \frac{d^3 Z}{d x^3} + 6 V^{1\,2} \frac{d V^1}{d x} \frac{d^2 Z}{d x^2} + 3 V^{1\,2} \frac{d^2 V^1}{d x^2} \frac{d Z}{d x}$$
$$+ 3 V^1 V\,1 \frac{d^2 Z}{d x^2} + 6 V^1 \left(\frac{d V^1}{d x}\right)^2 \frac{d Z}{d x} + 3 V\,1 \frac{d V^1}{d x} \frac{d Z}{d x}$$
$$+ 3 V^1 \frac{d V\,1}{d x} \frac{d Z}{d x} + V\,2 \frac{d Z}{d x},$$

ainsi

(3) . . . $\frac{d^3 Z}{d u^3} = \frac{d^2.V^{1\,3} \frac{d Z}{d x}}{d x^2} + 3 \frac{d.V^1 V\,1 \frac{d Z}{d x}}{d x} + V\,2 \frac{d Z}{d x}.$

On trouvera de la même manière

$$(4)\ldots \frac{d^4 Z}{du^4} = \frac{d^3 . V^{1\,4} \frac{dZ}{dx}}{dx^3} + 6 \frac{d^2 . V^{1\,2}\, V1 \frac{dZ}{dx}}{dx^2}$$

$$+ 4 \frac{d . V^1\, V2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + 3 \frac{d . (V1)^2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + V3 \frac{dZ}{dx}$$

$$(5)\ldots \frac{d^5 Z}{du^5} = \frac{d^4 . V^{1\,5} \frac{dZ}{dx}}{dx^4} + 10 \frac{d^3 . V^{1\,3}\, V1 \frac{dZ}{dx}}{dx^3}$$

$$+ 10 \frac{d^2 . V^{1\,2}\, V2 \frac{dZ}{dx}}{dx^2} + 15 \frac{d^2 . V^1\, (V1)^2 \frac{dZ}{dx}}{dx^2}$$

$$+ 5 \frac{d . V^1\, V3 \frac{dZ}{dx}}{dx} + 10 \frac{d . V1\, V2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + V4 \frac{dZ}{dx};$$

&c.

C'est pourquoi si nous nommons $\Sigma 1$, $\Sigma 2$, $\Sigma 3$, &c. ce que deviennent les valeurs de $\frac{dZ}{du}$, $\frac{d^2 Z}{du^2}$, $\frac{d^3 Z}{du^3}$, &c. données par les équations (1), (2), (3), &c. lorsqu'on fait $u = 0$ & $Z = S$, on aura

$$Z = S + u\Sigma 1 + \frac{u^2}{1.2}\Sigma 2 + \frac{u^3}{1.2.3}\Sigma 3 + \frac{u^4}{1.2.3.4}\Sigma 4 + \&c.$$

pour la valeur de Z tirée de l'équation $z = \varphi : V$.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
CONTENANT QUELQUES REMARQUES SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

Par M. COUSIN.

(1.) LE mouvement d'une molécule fluide étant décomposé selon trois directions x, y, z perpendiculaires entre elles, nous nommerons u, v, w les vîtesses selon ces trois directions, t le temps, δ la densité de la molécule, p la pression qu'elle éprouve : & si dans un temps déterminé elle a formé un parallélipipède rectangle, l'instant suivant, le nouveau parallélipipède qu'elle formera, approchera d'autant plus d'être rectangle, que cet instant sera moindre. En le supposant infiniment petit, & représenté par dt, on pourra regarder le parallélipipède comme rectangle, car il sera facile de s'assurer qu'étant calculé dans cette supposition, l'erreur ne pourra être qu'un infiniment petit du second ordre ; or, l'espace parcouru pendant le temps dt dans une certaine direction, est égal à udt, si u est la vîtesse dans la même direction ; il suit de-là que si la molécule fluide a pu former un parallélipipède $dx\,dy\,dz$, abstraction faite de la densité, elle formera, après l'instant dt, un autre parallélipipède rectangle, dont les côtés seront 1783.

$$d(x + udt),\ d(y + vdt),\ d(z + wdt).$$

Mais pour former le parallélipipède $dx\,dy\,dz$, on a fait varier successivement x, y, z; il faudra donc effectuer chacune des différenciations indiquées, en regardant les deux autres différentielles comme nulles. On fera par conséquent

$$dx + \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)dt = 0,$$

$$dy + \left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)dt = 0;$$

& en négligeant les dt^2, comme cela doit être, on en tirera

$$dx = \frac{-\frac{du}{dz}\,dz\,dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy})\,dt},\quad dy = \frac{-\frac{dv}{dz}\,dz\,dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy})\,dt}.$$

On mettra ces valeurs dans

$$dz + (\frac{dw}{dx}\,dx + \frac{dw}{dy}\,dy + \frac{dw}{dz}\,dz)\,dt,$$

& on aura pour un des côtés du parallélipipède qu'il s'agit de trouver,

$$\frac{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz})\,dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy})\,dt}\,dz.$$

Ce côté ne peut être nul ſans que dz ſoit nul; dans cette hypothèſe, la ſeconde équation donne $dy = \frac{-\frac{dv}{dx}\,dx\,dt}{1 + \frac{dv}{dy}\,dt}$

valeur qu'il faudra ſubſtituer dans

$$dx + (\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz)\,dt,$$

pour avoir un ſecond côté du parallélipipède, qui ſera

$$\frac{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy})\,dt}{1 + \frac{dv}{dy}\,dt}\,dx.$$

On trouvera pour le troiſième côté $(1 + \frac{dv}{dy}\,dt)\,dy$: ainſi le volume de la molécule fluide eſt égal à

$$(1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz})\,dt)\,dx\,dy\,dz:$$

& parce que les denſités ſont réciproquement comme les volumes, on en tirera

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta}{dx}\,u + \frac{d\delta}{dy}\,v + \frac{d\delta}{dz}\,w + \delta(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}) = 0.$$

Il est donc démontré que la considération de la continuité du fluide fournit d'abord cette équation,

$$(a) \ldots\ldots \frac{d\delta}{dt} + \frac{d.\delta u}{dx} + \frac{d.\delta v}{dy} + \frac{d.\delta w}{dz} = 0.$$

Nous nous servirons de la caractéristique ∂ pour désigner l'incrément que prend une fonction de x, y, z, lorsque ces quantités, au lieu d'augmenter de dx, dy, dz, augmentent de udt, vdt, wdt, c'est-à-dire, lorsque la molécule passe d'un lieu à un autre; nous aurons

$$\frac{dp}{dx} = \delta\left(P - \frac{\partial u}{dt}\right), \quad \frac{dp}{dy} = \delta\left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right),$$
$$\frac{dp}{dz} = \delta\left(R - \frac{\partial w}{dt}\right),$$

où P, Q, R sont les forces accélératrices suivant x, y, z, dans lesquelles on a décomposé toutes celles qui peuvent agir sur la molécule fluide. Nous tirerons de ces trois équations,

$$dp = \delta\left[\left(P - \frac{\partial u}{dt}\right)dx + \left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right)dy + \left(R - \frac{\partial w}{dt}\right)dz\right].$$

Toute la théorie du mouvement des fluides est renfermée dans les *équations précédentes ;* nous les devons à M. Euler, qui les a données pour la première fois dans les Mémoires de Berlin, *année 1755.*

(2.) Les quantités $P - \frac{\partial u}{dt}$, $Q - \frac{\partial v}{dt}$, $R - \frac{\partial w}{dt}$ ne devant pas renfermer p, la dernière équation sera susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur, si on a les conditions suivantes:

$$\frac{d.\delta\left(P - \frac{\partial u}{dt}\right)}{dy} = \frac{d.\delta\left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right)}{dx}, \quad \frac{d.\delta\left(P - \frac{\partial u}{dt}\right)}{dz} = \frac{d.\delta\left(R - \frac{\partial w}{dt}\right)}{dx},$$
$$\frac{d.\delta\left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right)}{dz} = \frac{d.\delta\left(R - \frac{\partial w}{dt}\right)}{dy},$$

desquelles on tire

$$\left(R - \frac{\partial w}{dt}\right)\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} + \frac{d\frac{\partial v}{dt}}{dx} - \frac{d\frac{\partial u}{dt}}{dy}\right)$$

$$+ \left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} + \frac{d\frac{\partial u}{dt}}{dz} - \frac{d\frac{\partial w}{dt}}{dx}\right)$$

$$+ \left(P - \frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + \frac{d\frac{\partial w}{dt}}{dy} - \frac{d\frac{\partial v}{dt}}{dz}\right) = 0:$$

lorsque le fluide n'aura pas d'élasticité, il faudra que

$$\left(P - \frac{\partial u}{dt}\right)dx + \left(Q - \frac{\partial v}{dt}\right)dy + \left(R - \frac{\partial w}{dt}\right)dz,$$

soit une différentielle exacte : mais en général l'équation de condition sera satisfaite toutes les fois qu'on pourra regarder

$$Pdx + Qdy + Rdz \;\&\; \frac{\partial u}{dt}dx + \frac{\partial v}{dt}dy + \frac{\partial w}{dt}dz,$$

comme étant des différentielles exactes : or comme on peut changer les équations

$$\frac{d\frac{\partial u}{dt}}{dy} = \frac{d\frac{\partial v}{dt}}{dx}, \quad \frac{d\frac{\partial u}{dt}}{dz} = \frac{d\frac{\partial w}{dt}}{dx},$$

en celles-ci

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)}{dt} + \frac{d.u\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)}{dx} + \frac{d.v\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)}{dy}$$

$$+ w\frac{d\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)}{dt} + \frac{d.u\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)}{dx} + \frac{d.w\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)}{dz}$$

$$+ v\frac{d\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy} = 0,$$

auxquelles on satisfait en supposant

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx};$$

il est clair que l'équation de condition sera satisfaite toutes les fois qu'on pourra regarder

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \ \& \ u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

comme étant des différentielles exactes. Alors, nommant dS & ds ces différentielles exactes, on aura $dp = \delta\, d\,(S - s)$; & dans ce cas la densité ne pourra être fonction que de $S - s$ & p; tout le problème sera réduit à trouver les valeurs complètes de u, v, w, au moyen des équations qui renferment ces quantités : savoir l'équation (a), & les deux que nous venons de trouver.

(3.) Soit r la distance de la molécule à un point donné de position, θ sa latitude, par rapport à un plan aussi donné de position qui passe par ce point, $\varkappa$ la longitude de la molécule relativement à un axe tiré dans le même plan, & qui passe par le point dont nous venons de parler, on aura

$$x = r \operatorname{cos}. \theta \operatorname{cos}. \varkappa, \ y = r \operatorname{cos}. \theta \operatorname{sin}. \varkappa, \ z = r \operatorname{sin}. \theta;$$

& si au commencement du mouvement $r, \varkappa, \theta$ étant R, μ, λ, on pouvoit regarder les ondulations comme infiniment petites, on feroit, pour exprimer cette supposition,

$$r = R + \alpha \varrho, \ \varkappa = et + \mu + \alpha \sigma, \ \theta = \lambda + \alpha \tau,$$

α étant un nombre infiniment petit dont on négligera la seconde puissance, ϱ, σ, τ étant des fonctions de t, R, μ, λ & e la vîtesse angulaire de la molécule autour d'un second axe qui passe par le même point que le premier, & qui est perpendiculaire au plan donné de position : or, R, μ, λ ne variant pas dans le passage de la molécule d'un lieu à un autre, les rapports $\frac{1}{dt}\,\partial x, \frac{1}{dt}\,\partial y, \frac{1}{dt}\,\partial z$ ne peuvent être autre chose que $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; ainsi, à cause de

$$x = R \operatorname{cos}. \lambda \operatorname{cos}. (\mu + et) + \alpha \left[(\varrho \operatorname{cos}. \lambda - R \tau \operatorname{sin}. \lambda) \operatorname{cos}. (\mu + et) - R \sigma \operatorname{cos}. \lambda \operatorname{sin}. (\mu + et) \right],$$

$$y = R \text{ cos}. \lambda \text{ sin}. (\mu + et) + \alpha [(\rho \text{ cos}. \lambda - R\tau \text{ sin}. \lambda) \text{ sin}. (\mu + et) + R\sigma \text{ cos}. \lambda \text{ cos}. (\mu + et)],$$

$$z = R \text{ sin}. \lambda + \alpha (R\tau \text{ cos}. \lambda + \rho \text{ sin}. \lambda),$$

on aura

$$u = - eR \text{ cos}. \lambda \text{ sin}. (\mu + et) + \alpha \{(\frac{d\rho}{dt} \text{ cos}. \lambda - \frac{d\tau}{dt} R \text{ sin}. \lambda - eR\sigma \text{ cos}. \lambda) \text{ cos}. (\mu + et) - [\frac{d\sigma}{dt} R \text{ cos}. \lambda + e(\rho \text{ cos}. \lambda - R\tau \text{ sin}. \lambda)] \text{ sin}. (\mu + et)\},$$

$$v = eR \text{ cos}. \lambda \text{ cos}. (\mu + et) + \alpha \{(\frac{d\rho}{dt} \text{ cos}. \lambda - \frac{d\tau}{dt} R \text{ sin}. \lambda - eR\sigma \text{ cos}. \lambda) \text{ sin}. (\mu + et) + [\frac{d\sigma}{dt} R \text{ cos}. \lambda + e(\rho \text{ cos}. \lambda - R\tau \text{ sin}. \lambda)] \text{ cos}. (\mu + et)\},$$

$$w = \alpha (\frac{d\rho}{dt} \text{ sin}. \lambda + \frac{d\tau}{dt} R \text{ cos}. \lambda).$$

En ne faisant pas varier t,

$$dx = \frac{dx}{dR} dR + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + \frac{dx}{d\mu} d\mu,$$

$$dy = \frac{dy}{dR} dR + \frac{dy}{d\lambda} d\lambda + \frac{dy}{d\mu} d\mu,$$

$$dz = \frac{dz}{dR} dR + \frac{dz}{d\lambda} d\lambda + \frac{dz}{d\mu} d\mu;$$

je suppose que par les méthodes connues d'élimination, on tire de ces équations $KdR = Ldx + Mdy + Ndz$, $Kd\lambda = L'du + M'dy + N'dz$, $Kd\mu = L''dx + M''dy + N''dz$, on aura

$$K = \frac{dz}{dR} (\frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\lambda}) - \frac{dz}{d\lambda} (\frac{dx}{dR} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{dR}),$$

$$L = - \frac{dy}{d\mu} \frac{dz}{d\lambda}, M = \frac{dx}{d\mu} \frac{dz}{d\lambda}, N = \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\lambda},$$

$$L' = \frac{dz}{dR} \frac{dy}{d\mu}, M' = - \frac{dz}{dR} \frac{dx}{d\mu}, N' = \frac{dy}{dR} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dx}{dR} \frac{dy}{d\mu},$$

$$L'' = \frac{dy}{dR}\frac{dz}{d\lambda} - \frac{dz}{dR}\frac{dy}{d\lambda},\ M'' = \frac{dz}{dR}\frac{dx}{d\lambda} - \frac{dx}{dR}\frac{dz}{d\lambda},\ N'' = \frac{dx}{dR}\frac{dy}{d\lambda} - \frac{dy}{dR}\frac{dx}{d\lambda};$$

&, à cauſe de $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$, il ſera facile d'en tirer

$$K\frac{du}{dx} = L\frac{d^2x}{dt\,dR} + L'\frac{d^2x}{dt\,d\lambda} + L''\frac{d^2x}{dt\,d\mu},$$

$$K\frac{dv}{dy} = M\frac{d^2y}{dt\,dR} + M'\frac{d^2y}{dt\,d\lambda} + M''\frac{d^2y}{dt\,d\mu},$$

$$K\frac{dw}{dz} = N\frac{d^2z}{dt\,dR} + N'\frac{d^2z}{dt\,d\lambda}.$$

Mais on a auſſi

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{d^2x}{dt\,dR} + M\frac{d^2y}{dt\,dR} + N\frac{d^2z}{dt\,dR} + L'\frac{d^2x}{dt\,d\lambda} + M'\frac{d^2y}{dt\,d\lambda} + N'\frac{d^2z}{dt\,d\lambda} + L''\frac{d^2x}{dt\,d\mu} + M''\frac{d^2y}{dt\,d\mu};$$

il eſt donc clair que $\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$. Nous avons négligé, dans les calculs précédens, les termes de l'ordre $N''\frac{dz}{d\mu}$, parce que N'' & $\frac{dz}{d\mu}$ ſont chacun de l'ordre α; on verra aiſément que la propoſition eſt vraie indépendamment de cette ſuppoſition.

(4.) L'équation *(a)* deviendra $\frac{\partial\delta}{\delta} = -\frac{\partial K}{K}$, de laquelle on tirera que $K\delta$ eſt égal à une certaine fonction de R, λ, μ qu'on déterminera de la manière ſuivante. Au commencement du mouvement, lorſque $\alpha = 0$, on a

$$\frac{dx}{dR} = \text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\mu,\ \frac{dx}{d\lambda} = -R\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\mu,\ \frac{dx}{d\mu} = -R\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\mu,$$

$$\frac{dy}{dR} = \text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\mu,\ \frac{dy}{d\lambda} = -R\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\mu,\ \frac{dy}{d\mu} = R\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\mu;$$

$$\frac{dz}{dR} = \text{ſin.}\,\lambda,\ \frac{dz}{d\lambda} = R\,\text{coſ.}\,\lambda,\ \&\ K = -R^2\,\text{coſ.}\,\lambda;$$

il suit de-là, qu'en désignant par D ce que devient δ lorsque t est nul, la fonction dont il s'agit est égale à $- D R^2 \cos. \lambda$; on trouvera facilement ensuite

$$K = - R^2 \cos. \lambda \left[1 + \alpha \left(\frac{2 \rho}{R} - \tau \operatorname{tang.} \lambda + \frac{d \rho}{d R} + \frac{d \sigma}{d \mu} + \frac{d \tau}{d \lambda} \right) \right];$$

c'est pourquoi si l'on suppose qu'à la fin du temps t, $\delta = D \, (1 + \alpha \Delta)$, l'équation *(a)* se changera en celle-ci

$$(A) \ldots \Delta + \frac{2 \rho}{R} - \tau \operatorname{tang.} \lambda + \frac{d \rho}{d R} + \frac{d \sigma}{d \mu} + \frac{d \tau}{d \lambda} = 0.$$

On fera les mêmes substitutions dans

$$dp = \delta \left[\left(P - \frac{\partial u}{d t}\right) dx + \left(Q - \frac{\partial v}{d t}\right) dy + \left(R - \frac{\partial w}{d t}\right) dz \right];$$

& en traitant t comme étant de l'ordre α, on en tirera

$$\begin{aligned} P dx + Q dy + R dz - \frac{1}{\delta} dp = & - e^2 R \cos. \lambda \, d \left[R \cos. \lambda \right. \\ & \left. + \alpha (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right] + \left[\frac{d^2 \sigma}{d t^2} R \cos. \lambda \right. \\ & \left. + 2 e \left(\frac{d \rho}{d t} \cos. \lambda - \frac{d \tau}{d t} R \sin. \lambda \right) \right] \alpha R \cos. \lambda \, d \mu \\ & + \left[\frac{d^2 \rho}{d t^2} \cos. \lambda - \frac{d^2 \tau}{d t^2} R \sin. \lambda - 2 e R \cos. \lambda \frac{d \sigma}{d t} \right. \\ & \left. - e^2 (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right] \alpha \, d . R \cos. \lambda \\ & + \left(\frac{d^2 \rho}{d t^2} \sin. \lambda + \frac{d^2 \tau}{d t^2} R \cos. \lambda \right) \alpha \, d . R \sin. \lambda. \end{aligned}$$

Ces équations sont celles que M. de la Place a désignées par les nombres (1) & (2) dans les Mémoires de l'Académie, *année 1775, pages 96 & 98.* Si le premier Membre de l'équation précédente doit être une différentielle exacte ; à cause de

$$\begin{aligned} & e^2 R \cos. \lambda \, d . R \cos. \lambda + \alpha e^2 \left[(\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right. \\ & \quad \left. d . R \cos. \lambda + R \cos. \lambda \, d \, (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right], \end{aligned}$$

qui

qui est une différentielle exacte, on aura

$$\left(\frac{d^2 \rho}{d t^2} - 2 e R \text{ cof. } \lambda \frac{d \sigma}{d t}\right) d R + \left(\frac{d^2 \tau}{d t^2} + 2 e \text{ cof. } \lambda \text{ fin. } \lambda \frac{d \sigma}{d t}\right) R^2 d \lambda + \left(\frac{d^2 \sigma}{d t^2} R \text{ cof. } \lambda + 2 e \left(\frac{d \rho}{d t} \text{ cof. } \lambda - \frac{d \tau}{d t} R \text{ fin. } \lambda\right)\right) R \text{ cof. } \lambda \, d \mu,$$

qui en doit être une aussi. On l'intégrera par-rapport à t; & comme R, λ, μ, ne renferment pas cette quantité, que de plus ρ, σ, τ, doivent être nuls au commencement du mouvement, on aura

$$\left(\frac{d \rho}{d t} - 2 e R \text{ cof. } \lambda . \sigma\right) d R + \left(\frac{d \tau}{d t} + 2 e \text{ cof. } \lambda \text{ fin. } \lambda . \sigma\right) R^2 d \lambda + \left(R \text{ cof. } \lambda \frac{d \sigma}{d t} + 2 e \left(\rho \text{ cof. } \lambda - R \tau \text{ fin. } \lambda\right)\right) R \text{ cof. } \lambda \, d \mu,$$

qui sera encore une différentielle exacte. Si e étoit nul, on pourroit intégrer une seconde fois, & on auroit

$$\rho \, d R + \tau . R^2 d \lambda + \sigma . R^2 \text{ cof. } \lambda^2 d \mu,$$

qui seroit une différentielle exacte : voilà les principales équations qu'il s'agit d'intégrer. Nous avons fait quelques remarques sur ce sujet important, que nous soumettons au jugement des Géomètres.

(5.) On sait, & c'est à M. de la Grange que nous devons ce théorème, que pour intégrer l'équation

$$A \frac{d Z}{d t} + B \frac{d Z}{d x} + C \frac{d Z}{d y} + D \frac{d Z}{d z} + \&c. = V,$$

dans laquelle A, B, C, $D \ldots\ldots V$, sont des fonctions quelconques de t, x, y, $z \ldots\ldots Z$, il faut former cette suite d'équations

$$B \, d t - A \, d x = 0, \quad B \, d y - C \, d x = 0;$$
$$B \, d z - D \, d x = 0 \ldots B \, d Z - V \, d x = 0,$$

qu'on intégrera toutes à la fois, ce qui donnera autant d'équations entre les mêmes variables, & un nombre de constantes arbitraires moindre d'une unité; on en tirera par

l'élimination la valeur de chacune des constantes en fonction des variables: si nous représentons ces valeurs par $a, b, c \ldots K$, on aura pour l'intégrale complète demandée

$$K = F : a, b, c, \&c.$$

Cela posé, je me propose de trouver les valeurs les plus générales de T, X, Y, Z, &c. qui puissent satisfaire à

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} + \&c. = 0.$$

J'imagine pour cela qu'on ait cette suite d'équations, où A, B, &c. K, K^1, &c. sont des fonctions quelconques de t, x, y, z, &c. T, X, Y, Z, &c:

$$\frac{d(T-K)}{dt} + A\frac{d(T-K)}{dx}$$
$$+ B\frac{d(T-K)}{dy} + C\frac{d(T-K)}{dz} + \&c. = 0,$$
$$\frac{d(X-K')}{dx} + D\frac{d(X-K')}{dt}$$
$$+ E\frac{d(X-K')}{dy} + F\frac{d(X-K')}{dz} + \&c. = 0,$$
$$\frac{d(Y-K'')}{dy} + G\frac{d(Y-K'')}{dx}$$
$$+ H\frac{d(Y-K'')}{dt} + I\frac{d(Y-K'')}{dz} + \&c. = 0,$$
$$\frac{d(Z-K''')}{dz} + L\frac{d(Z-K''')}{dy}$$
$$+ M\frac{d(Z-K''')}{dx} + N\frac{d(Z-K''')}{dt} + \&c. = 0, \&c:$$

les ayant ajoutées ensemble, on aura

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dK'}{dx} + \frac{dK''}{dy} + \frac{dK'''}{dz} + \&c.$$
$$= A\frac{d(T-K)}{dx} + G\frac{d(Y-K'')}{dx} + M\frac{d(Z-K''')}{dx} + \&c.$$
$$+ D\frac{d(X-K')}{dt} + H\frac{d(Y-K'')}{dt} + N\frac{d(Z-K''')}{dt} + \&c.$$
$$+ B\frac{d(T-K)}{dy} + E\frac{d(X-K')}{dy} + L\frac{d(Z-K')}{dy} + \&c.$$
$$+ C\frac{d(T-K)}{dz} + F\frac{d(X-K')}{dz} + I\frac{d(Y-K''')}{dz} + \&c.$$

Pour satisfaire à cette équation, soit

$$K = {}_{,}T + D(X - K') + H(Y - K'') + N(Z - K''') + \&c,$$

$$K' = {}_{,}X + A(T - K) + G(Y - K'') + M(Z - K''') + \&c,$$

$$K'' = {}_{,}Y + B(T - K) + E(X - K') + L(Z - K''') + \&c,$$

$$K''' = {}_{,}Z + C(T - K) + F(X - K') + I(Y - K'') + \&c,$$

&c ; il faudra que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \&c. = 0, \\ \frac{dD}{dt} + \frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dz} + \&c. = 0, \\ \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dt} + \frac{dI}{dz} + \&c. = 0, \\ \frac{dL}{dy} + \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dt} + \&c. = 0, \\ \&c. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

& en même-temps

$$\frac{d\,{}_{,}T}{dt} + \frac{d\,{}_{,}X}{dx} + \frac{d\,{}_{,}Y}{dy} + \frac{d\,{}_{,}Z}{dz} + \&c. = 0.$$

On formera ces suites d'équations

$$\left.\begin{array}{llll} A\,dt - dx = 0, & A\,dy - B\,dx = 0, & A\,dz - C\,dx = 0, & \&c; \\ dt - D\,dx = 0, & dy - E\,dx = 0, & dz - F\,dx = 0, & \&c; \\ G\,dy - dx = 0, & G\,dt - H\,dx = 0, & G\,dz - I\,dx = 0, & \&c; \\ M\,dz - dx = 0, & M\,dy - L\,dx = 0, & M\,dt - N\,dx = 0, & \&c; \\ \&c. & & & \end{array}\right\} \ldots (6)$$

En intégrant toutes à la fois les équations que chaque suite renferme, on ajoutera des constantes arbitraires; si ces constantes sont pour la première suite a, b, c, &c, pour la seconde d, e, f, &c, pour la troisième g, h, i, &c, pour la quatrième l, m, n, &c, &c; & qu'ayant séparé toutes ces constantes l'on désigne par les mêmes lettres les fonctions de t, x, y, z, &c, qui leur sont égales, on aura

$$T - K = F1 : a, b, c, \&c. \quad X - K^{\text{I}} = F1 : d, e, f, \&c,$$
$$Y - K^{\text{II}} = \Phi 1 : g, h, i, \&c, \quad Z - K^{\text{III}} = \varphi 1 : l, m, n, \&c,$$

&c. On aura aussi, en se contentant d'écrire $F1$, au lieu de $F1 : a, b, c$, &c, & ainsi des autres, ce que nous ferons toujours dans la suite pour abréger;

$$K = {}_{1}T + Df1 + H\Phi 1 + N\varphi 1 + \&c,$$
$$K^{\text{I}} = {}_{1}X + AF1 + G\Phi 1 + M\varphi 1 + \&c,$$
$$K^{\text{II}} = {}_{1}Y + BF1 + Ef1 + L\varphi 1 + \&c,$$
$$K^{\text{III}} = {}_{1}Z + CF1 + Ff1 + I\Phi 1 + \&c,$$

&c. Pour déterminer ${}_{1}T$, ${}_{1}X$, ${}_{1}Y$, ${}_{1}Z$, on formera des équations analogues aux équations (G), en marquant d'un trait les coéfficiens qui y entrent; & si on en tire

$${}_{1}T - {}_{1}K = F2 : a^{\text{I}}, b^{\text{I}}, c^{\text{I}}, \&c, \quad {}_{1}X - {}_{1}K^{\text{I}} = f2 : d^{\text{I}}, e^{\text{I}}, f^{\text{I}}, \&c,$$
$${}_{1}Y - {}_{1}K^{\text{II}} = \Phi 2 : g^{\text{I}}, h^{\text{I}}, i^{\text{I}}, \&c, \quad {}_{1}Z - {}_{1}K^{\text{III}} = \varphi 2 : l^{\text{I}}, m^{\text{I}}, n^{\text{I}}, \&c,$$

&c, on aura aussi

$${}_{1}K = {}_{11}T + D^{\text{I}}f2 + H^{\text{I}}\Phi 2 + N^{\text{I}}\varphi 2 + \&c,$$
$${}_{1}K^{\text{I}} = {}_{11}X + A^{\text{I}}F2 + G^{\text{I}}\Phi 2 + M^{\text{I}}\varphi 2 + \&c,$$
$${}_{1}K^{\text{II}} = {}_{11}Y + B^{\text{I}}F2 + E^{\text{I}}f2 + L^{\text{I}}\varphi 2 + \&c,$$
$${}_{1}K^{\text{III}} = {}_{11}Z + C^{\text{I}}F2 + F^{\text{I}}f2 + I^{\text{I}}\Phi 2 + \&c,$$

On déterminera de la même manière ${}_{11}T$, ${}_{11}X$, ${}_{11}Y$, ${}_{11}Z$, &c, & ainsi des autres. Mais on pourra les faire nuls; &

chacune des suites $F1$, $F2$, &c, &c, aura autant de termes qu'il sera nécessaire dans les valeurs de T, X, Y, Z, &c, que voici,

$$
\begin{array}{lllll}
T = F1 & + Df1 & + H\Phi 1 & + N\varphi 1 & + \&c, \\
 F2 & + D'f2 & + H'\Phi 2 & + N'\varphi 2 & \\
 \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
X = f1 & + AF1 & + G\Phi 1 & + M\varphi 1 & + \&c, \\
 f2 & + A'F2 & + G'\Phi 2 & + M'\varphi 2 & \\
 \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
Y = \Phi 1 & + BF1 & + Ef1 & + L\varphi 1 & + \&c, \\
 \Phi 2 & + B'F2 & + E'f2 & + L'\varphi 2 & \\
 \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
Z = \varphi 1 & + CF1 & + Ff1 & + I\Phi 1 & + \&c, \\
 \varphi 2 & + C'F2 & + F'f2 & + I'\Phi 2 & \\
 \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

(6). Pour plus de généralité, nous donnerons à la proposée un dernier terme, où T, X, Y, Z, &c. entrent sous une forme linéaire : alors on commencera par prendre

$$
\begin{array}{lllll}
{}_{2}T = F2 & + D'f2 & + H'\Phi 2 & + N'\varphi 2 & + \&c, \\
\phantom{{}_{2}T =} \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
{}_{2}X = f2 & + A'F2 & + G'\Phi 2 & + M'\varphi 2 & + \&c, \\
\phantom{{}_{2}X =} \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
{}_{2}Y = \Phi 2 & + B'F2 & + E'f2 & + L'\varphi 2 & + \&c, \\
\phantom{{}_{2}Y =} \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
{}_{2}Z = \varphi 2 & + C'F2 & + F'f2 & + I'\Phi 2 & + \&c; \\
\phantom{{}_{2}Z =} \&c & \&c & \&c & \&c &
\end{array}
$$

& ayant mis dans le dernier terme, au lieu de T, X, Y, Z, &c, ces quantités $T - K$, $X - K'$, $Y - K''$, $Z - K'''$, &c,

on éliminera $K, K^{I}, K^{II}, K^{III}$, &c, que ces ſubſtitutions y auront introduites néceſſairement, puiſqu'elles ne doivent rien changer à la valeur du dernier terme : s'il devient par-là

$$V1(T - K) + V2(X - K^{I}) + V3(Y - K^{II}) + V4(Z - K^{III}) + \&c. + W,$$

on aura les différentielles

$$Ad(T - K) - V1(T - K)dx,$$
$$d(X - K^{I}) - V2(X - K^{I})dx - Wdx;$$

$$Gd(Y - K^{II}) - V3(Y - K^{II})dx,$$
$$Md(Z - K^{III}) - V4(Z - K^{III})dx, \&c;$$

qu'on rendra des différentielles exactes en les multipliant par des facteurs convenables, après avoir ſubſtitué à t, y, z, &c, dans la première, x, a, b, c, &c, dans la ſeconde x, d, e, f, &c, dans la troiſième, x, g, h, i, &c, dans la quatrième, x, l, m, n, &c. Des intégrales qu'on trouvera de cette manière, on égalera la première à $F1$, la ſeconde à $f1$, la troiſième à $\Phi 1$, la quatrième à $\varphi 1$, &c; & ces équations donneront les valeurs de $T - K, X - K^{I}, Y - K^{II}, Z - K^{III}$, &c. Ayant propoſé l'équation

$$l\frac{dT}{dt} + m\frac{dX}{dx} + n\frac{dY}{dy} + p\frac{dZ}{dz} + \&c = V,$$
$$l^{I}\frac{dX}{dt} + m^{I}\frac{dT}{dx} + n^{I}\frac{dZ}{dy} + p^{I}\frac{dY}{dz}$$
$$l^{II}\frac{dY}{dt} + m^{II}\frac{dZ}{dx} + n^{II}\frac{dT}{dy} + p^{II}\frac{dX}{dz}$$
$$l^{III}\frac{dZ}{dt} + m^{III}\frac{dY}{dx} + n^{III}\frac{dX}{dy} + p^{III}\frac{dT}{dz}$$

qui eſt encore plus générale que la précédente; on fera

$$lT + l^{I}X + l^{II}Y + l^{III}Z + \&c = T^{I}$$
$$mX + m^{I}T + m^{II}Z + m^{III}Y + \&c = X^{I}$$

$n\,Y + n^{I}Z + n^{II}T + p^{II}X + \&c = Y^{I}$,

$p\,Z + p^{I}Y + p^{II}X + p^{III}T + \&c = Z^{I}$

&c, & on aura

$$\frac{dT^{I}}{dt} + \frac{dX^{I}}{dx} + \frac{dY^{I}}{dy} + \frac{dZ^{I}}{dz} + \&c = V$$
$$+ \left(\frac{dl}{dt} + \frac{dm^{I}}{dx} + \frac{dn^{I}}{dy} + \frac{dp^{III}}{dz} + \&c\right) T$$
$$+ \left(\frac{dl^{I}}{dt} + \frac{dm}{dx} + \frac{dn^{III}}{dy} + \frac{dp^{I}}{dz} + \&c\right) X$$
$$+ \left(\frac{dl^{II}}{dt} + \frac{dm^{II}}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp^{II}}{dz} + \&c\right) Y$$
$$+ \left(\frac{dl^{III}}{dt} + \frac{dm^{III}}{dx} + \frac{dn^{I}}{dy} + \frac{dp}{dz} + \&c\right) Z$$
$$+ \&c.$$

Nous déſignerons par α, β, γ, δ, &c, les coéfficiens de T, X, Y, Z, &c, par W le terme qui ne renferme pas ces quantités; & nous ſuppoſerons que des équations qui précèdent, on tire

$T = l\,1\,T^{I} + m\,1\,X^{I} + n\,1\,Y^{I} + p\,1\,Z^{I} + \&c$,

$X = l\,2\,T^{I} + m\,2\,X^{I} + n\,2\,Y^{I} + p\,2\,Z^{I} + \&c$,

$Y = l\,3\,T^{I} + m\,3\,X^{I} + n\,3\,Y^{I} + p\,3\,Z^{I} + \&c$,

$Z = l\,4\,T^{I} + m\,4\,X^{I} + n\,4\,Y^{I} + p\,4\,Z^{I} + \&c$, &c:

alors on aura à rendre exactes les différentielles

$$A\,d(T^{I} - K) - (\alpha\,1 + A\beta\,1 + B\gamma\,1 + C\delta\,1 + \&c.)\,(T^{I} - K)\,dx,$$

$$d(X^{I} - K^{I}) - \beta\,1 + D\alpha\,1 + E\gamma\,1 + F\delta\,1 + \&c.)\,(X^{I} - K^{I})\,dx - W dx,$$

$$G\,d(Y^{I} - K^{II}) - (\gamma\,1 + H\alpha\,1 + G\beta\,1 + I\delta\,1 + \&c.)\,(Y^{I} - K^{II})\,dx,$$

$$M\,d(Z^{I} - K^{III}) - (\delta\,1 + N\alpha\,1 + M\beta\,1 + L\gamma\,1 + \&c.)\,(Z^{I} - K^{III})\,dx, \&c.$$

où l'on a fait pour abréger

$$\alpha l\,1 + \beta l\,2 + \gamma l\,3 + \delta l\,4 + \&c. = \alpha\,1;$$
$$\alpha m\,1 + \beta m\,2 + \gamma m\,3 + \delta m\,4 + \&c. = \beta\,1;$$
$$\alpha n\,1 + \beta n\,2 + \gamma n\,3 + \delta n\,4 + \&c. = \gamma\,1;$$
$$\alpha p\,1 + \beta p\,2 + \gamma p\,3 + \delta p\,4 + \&c. = \delta\,1;$$

(7.) Lorsque le fluide n'a pas d'élasticité, l'équation *(a)* n'est autre que celle-ci $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{d\zeta} = 0$; on aura donc

$$X - K' = f\,1 : e, f, Y - K'' = \Phi\,1 : g, i, Z - K''' = \varphi\,1 : l, m,$$

$e, f; g, i; l, m$ étant donnés en intégrant les équations

$$dy - Edx = 0,\; d\zeta - Fdx = 0;$$
$$Gdy - dx = 0,\; Gd\zeta - Idx = 0;$$
$$Mdy - Ldx = 0,\; Md\zeta - dx = 0;$$

dans lesquelles E, F ne doivent pas renfermer x; G, I point y; L, M point ζ; ces quantités ayant de plus entr'elles les relations suivantes,

$$\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{d\zeta} = 0,\; \frac{dG}{dx} + \frac{dI}{d\zeta} = 0,\; \frac{dL}{dy} + \frac{dM}{dx} = 0.$$

On aura aussi

$$K' = {}_{1}X + G\Phi\,1 + M\varphi\,1,\; K'' = {}_{1}Y + Ef\,1 + L\varphi\,1,\; K''' = {}_{1}Z + Ff\,1 + I\varphi\,1.$$

Si l'équation avoit un dernier terme, comme l'équation *(A)*, où il est de cette forme $Z \text{ tang. } \zeta - \frac{2X}{x}$, on le prépareroit comme il suit,

$$(Z - K''')\text{ tang. } \zeta - \frac{2}{x}(X - K') + K''' \text{ tang. } \zeta - \frac{2K'}{x};$$

&

& ayant mis pour K', K''' leurs valeurs, on auroit

$$[Z - K''' + F(X - K') + I(Y - K'')] \text{ tang. } z$$
$$- \frac{2}{x}[X - K' + G(Y - K'') + M(Z - K''')].$$

Il s'agiroit de rendre exactes les différentielles

$$d(X - K') - (F \text{ tang. } z - \frac{2}{x})(X - K')dx,$$

$$G\,d(Y - K'') - (I \text{ tang. } z - \frac{2G}{x})(Y - K'')dx,$$

$$M\,d(Z - K''') - (\text{ tang. } z - \frac{2M}{x})(Z - K''')dx;$$

& il suffiroit pour cela de leur donner la forme suivante,

$$\frac{d(X - K')}{X - K'} + \frac{2\,dx}{x} - dz \text{ tang. } z,$$
$$\frac{d(Y - K'')}{Y - K''} + \frac{2\,dx}{x} - dz \text{ tang. } z,$$
$$\frac{d(Z - K''')}{Z - K'''} + \frac{2\,dx}{x} - dz \text{ tang. } z:$$

on en tireroit

$$\log. x^2 \text{ cos. } z\,(X - K') = f\,1 : e, f,$$
$$\log. x^2 \text{ cos. } z\,(Y - K'') = \Phi\,1 : g, i,$$
$$\log. x^2 \text{ cos. } z\,(Z - K''') = \varphi\,1 : l, m.$$

L'équaition que fournit la considération de la continuité du fluide, est toujours intégrable. Cela ne suffit pas, il faut encore que cette intégrale puisse satisfaire aux autres équations du problème. Il y a un cas très-général que nous avons exposé *n.° 2*, où les équations du problème peuvent être représentées par

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0;$$

dans ce cas, les valeurs de X, Y, Z, trouvées au commencement de *ce numéro*, devront satisfaire à

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0.$$

Or, ces valeurs renferment trois eſpèces de fonctions arbitraires abſolument indépendantes, $f1$, $f2$, &c.; $\Phi 1$, $\Phi 2$, &c.; $\varphi 1$, $\varphi 2$, &c. Si pour la première, nous ſuppoſons

$$e' = e + p, e'' = e + q, \&c. f' = f + \pi, f'' = f + \varrho, \&c;$$

au lieu de $f2$, $f3$, &c, nous pourrons écrire

$$f2 + p\frac{df2}{de} + \pi\frac{df2}{df} + \frac{p^2}{2}\frac{d^2f2}{de^2} + p\pi\frac{d^2f2}{dedf} + \frac{\pi^2}{2}\frac{d^2f2}{df^2} + \&c,$$

$$f3 + q\frac{df3}{de} + \varrho\frac{df3}{df} + \frac{q^2}{2}\frac{d^2f3}{de^2} + q\varrho\frac{d^2f3}{dedf} + \frac{\varrho^2}{2}\frac{d^2f3}{df^2} + \&c;$$

& $f2$, $f3$, &c. ne ſeront plus fonctions que de e, f: de plus, ſi nous faiſons

$$f2 = a1\frac{df1}{de} + a2\frac{df1}{df} + b1\frac{d^2f1}{de^2} + b2\frac{d^2f1}{dedf} + b3\frac{d^2f1}{df^2} + \&c,$$

$$f3 = \qquad e1\frac{d^2f1}{de^2} + e2\frac{d^2f1}{dedf} + e3\frac{d^2f1}{df^2} + \&c,$$

& que nous déſignions, en la marquant d'un 1, ce que devient une fonction de e, f lorſque ces quantités augmentent, l'une de p, l'autre de π; de deux 1, ce que devient une fonction des mêmes quantités lorſqu'elles augmentent, l'une de q, l'autre de ϱ, &c; nous aurons, en faiſant pour abréger

$$a'1p + b'1 = m1, \; a'1\pi + a'2p + b'2 = m2, \; a'2\pi + b'3 = m3, \&c,$$

$$\Omega = a'1\frac{df1}{de} + a'2\frac{df1}{df} + m1\frac{d^2f1}{de^2} + m2\frac{d^2f1}{dedf} + m3\frac{d^2f1}{df^2} + \&c,$$

$$\Psi = e''1 \frac{d^2 f1}{de^2} + e''2 \frac{d^2 f1}{de\,df} + e''3 \frac{d^2 f1}{df^2} + \&c;$$

nous aurons, dis-je,

$$X = f1 + \Omega + \Psi + \&c., Y = Ef1 + E'\Omega + E''\Psi + \&c, Z = Ff1 + F'\Omega + F''\Psi + \&c.$$

(8.) Avant de ſubſtituer ces valeurs dans les équations auxquelles il faut ſatisfaire, on ſe rappellera que

$$\frac{de}{dx} + E\frac{de}{dy} + F\frac{de}{dz} = 0, \frac{df}{dx} + E\frac{df}{dy} + F\frac{df}{dz} = 0;$$

on fera pour abréger

$$\frac{de}{dy} - E\frac{de}{dx} = \varepsilon, \frac{de}{dz} - F\frac{de}{dx} = \varepsilon',$$
$$\frac{df}{dy} - E\frac{df}{dx} = \varphi, \frac{df}{dz} - F\frac{df}{dx} = \varphi':$$

on déſignera par ((e), (e), (e)) ces quantités

$$\frac{de}{dx} + E'\frac{de}{dy} + F'\frac{de}{dz}, \frac{de}{dy} - E'\frac{de}{dx}, \frac{de}{dz} - F'\frac{de}{dx},$$

& ainſi des autres quantités ſemblables, c'eſt-à-dire, que $(a'1)$, $((a'1)$, $(a'1))$, par exemple, repréſenteront

$$\frac{da'1}{dx} + E'\frac{da'1}{dy} + F'\frac{da'1}{dz},$$
$$\frac{da'1}{dy} - E'\frac{da'1}{dx}, \frac{da'1}{dz} - F'\frac{da'1}{dx}.$$

Les ſubſtitutions faites, on verra que $f1$ & ſes différences partielles ne devant pas être déterminées, on a néceſſairement cette ſuite d'équations:

$$(a'1) = 0, ((a'1) + \varepsilon = 0, (a'1)) + \varepsilon' = 0,$$
$$(a'2) = 0, ((a'2) + \varphi = 0, (a'2)) + \varphi' = 0,$$

$$\frac{d e'' 1}{d x} + E'' \frac{d e'' 1}{d y} + F'' \frac{d e'' 1}{d z} + a' 1 (e) + (m 1) = 0,$$

$$\frac{d e'' 1}{d y} - E'' \frac{d e'' 1}{d x} + a' 1 ((e) + ((m 1) = 0,$$

$$\frac{d e'' 1}{d z} - F'' \frac{d e'' 1}{d x} + a' 1 (e)) + (m 1)) = 0,$$

$$\frac{d e'' 2}{d x} + E'' \frac{d e'' 2}{d y} + F'' \frac{d e'' 2}{d z} + a' 1 (f) + a' 2 (e) + (m' 2) = 0;$$

$$\frac{d e'' 2}{d y} - E'' \frac{d e'' 2}{d x} + a' 1 ((f) + a' 2 ((e) + ((m 2) = 0,$$

$$\frac{d e'' 2}{d z} - F'' \frac{d e'' 2}{d x} + a' 1 (f)) + a' 2 (e)) + (m 2)) = 0,$$

$$\frac{d e'' 3}{d x} + E'' \frac{d e'' 3}{d y} + F'' \frac{d e'' 3}{d z} + a' 2 (f) + (m 3) = 0,$$

$$\frac{d e'' 3}{d y} - E'' \frac{d e'' 3}{d x} + a' (2 (f) + ((m 3) = 0,$$

$$\frac{d e'' 3}{d z} - F'' \frac{d e'' 3}{d x} + a' 2 (f)) + (m 3)) = 0, \text{ \&c.}$$

Soit $de = E dz - F dy$, & e', e'', &c, des fonctions de e seul, en supposant aussi que $a' 1$, $a' 2$, ne renferment que cette quantité ; les trois premières équations se réduiront à $1 + \frac{d a' 1}{d e} = 0$, qui donne $a' 1 = - e$. On tirera des trois qui suivent, que e doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{d^2 e}{dy^2} + \frac{d^2 e}{d z^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{d e}{d y}\right)^2 + \left(\frac{d e}{d z}\right)^2 = 0,$$

& que $d \mu$ étant $\frac{d e}{d z} d y - \frac{d e}{d y} d z$, il faut que f soit la somme de deux fonctions, l'une de $x + \mu$, l'autre de e Si l'on nomme $[e]$ la fonction de e, on aura $a' 2 = - [e]$. En supposant $f = x + \mu + [e]$, & π, $b' 1$, $b' 2$, $b' 3$, $e'' 1$, $e'' 2$, $e'' 3$, fonctions de e seul, les neuf équations qui

viennent enſuite, ſe réduiront à

$$\frac{d\,(m\,1 + e''\,1)}{d\,e} = e,$$

$$\frac{d\,(b'\,2 + e''\,2)}{d\,e} - \frac{d.e\,\pi}{d\,e} - \frac{d.e'\,[e]}{d\,e}$$

$$= -\,e\,\frac{d\,p}{d\,e}\left(\frac{d\,e}{d\,z} : \frac{d\,e}{d\,y}\right) = -\,e\,\frac{d\,p}{d\,e}\left(\frac{d\,e}{d\,y} : \frac{d\,e}{d\,z}\right),$$

$$\frac{d\,(b'\,3 + e''\,3)}{d\,e} - \frac{d.[e]\,\pi}{d\,e} - \frac{d.[e]^2}{2\,d\,e}$$

$$= -\,[e]\,\frac{d\,p}{d\,e}\left(\frac{d\,e}{d\,z} : \frac{d\,e}{d\,y}\right) = -\,[e]\,\frac{d\,p}{d\,e}\left(\frac{d\,e}{d\,y} : \frac{d\,e}{d\,z}\right).$$

Il ſera néceſſaire de prendre p conſtant, & on en tirera

$$m\,1 + e''\,1 = \frac{e^2}{2},$$

$$b'\,2 + e''\,2 = e\,\pi + e'\,[e],$$

$$b'\,3 + e''\,3 = [e]\,\pi + \frac{[e]^2}{2}, \text{ \&c.}$$

Ainſi e étant une fonction de y, z, telle que

$$\frac{d^2 e}{d\,y^2} + \frac{d^2 e}{d\,z^2} = 0,\ 1 + \left(\frac{d\,e}{d\,y}\right)^2 + \left(\frac{d\,e}{d\,z}\right)^2 = 0,$$

g une fonction de x, z, telle que

$$\frac{d^2 g}{d\,x^2} + \frac{d^2 g}{d\,z^2} = 0,\ 1 + \left(\frac{d\,g}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,g}{d\,z}\right)^2 = 0;$$

m une fonction de x, y, telle que

$$\frac{d^2 m}{d\,x^2} + \frac{d^2 m}{d\,y^2} = 0,\ 1 + \left(\frac{d\,m}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,m}{d\,y}\right)^2 = 0;$$

$[e]$, $[g]$, $[m]$, des fonctions de e, g, m; μ, λ, ε, telles que

$$\frac{d\,e}{d\,z}\,d\,y - \frac{d\,e}{d\,y}\,d\,z = d\,\mu;$$

$$\frac{d\,g}{d\,z}\,d\,x - \frac{d\,g}{d\,x}\,d\,z = d\,\lambda;$$

$$\frac{d\,m}{d\,y}\,d\,x - \frac{d\,m}{d\,x}\,d\,y = d\,\varepsilon;$$

si l'on prend

$$f = x + \mu + [e],$$
$$i = y + \lambda + [g],$$
$$l = z + \varepsilon + [m],$$

& que se contentant d'écrire $f\,1$, $\Phi\,1$, $\varphi\,1$, au lieu de $f\,1 : e, f; \Phi\,1 : g, i; \varphi\,1 : l, m;$ on fasse pour abréger,

$$f\,1 - e\frac{d f\,1}{d e} - [e]\frac{d f\,1}{d f} + \frac{e^2}{2}\frac{d^2 f\,1}{d e^2}$$
$$+ e[e]\frac{d^2 f\,1}{d e\, d f} + \frac{[e]^2}{2}\frac{d^2 f\,1}{d f^2} + \&c = U\,1,$$

$$\Phi\,1 - g\frac{d\Phi\,1}{d g} - [g]\frac{d\Phi\,1}{d i} + \frac{g^2}{2}\frac{d^2\Phi\,1}{d g^2}$$
$$+ g[g]\frac{d^2\Phi\,1}{d g\, d i} + \frac{[g]^2}{2}\frac{d^2\Phi\,1}{d i^2} + \&c = U\,2,$$

$$\varphi\,1 - m\frac{d\varphi\,1}{d m} - [m]\frac{d\varphi\,1}{d l} + \frac{m^2}{2}\frac{d^2\varphi\,1}{d m^2}$$
$$+ m[m]\frac{d^2\varphi\,1}{d m\, d l} + \frac{[m]^2}{2}\frac{d^2\varphi\,1}{d l^2} + \&c = U\,3;$$

on aura

$$X = U\,1 + \frac{d g}{d z}U\,2 + \frac{d m}{d y}U\,3,$$
$$Y = \frac{d e}{d z}U\,1 + U\,2 - \frac{d m}{d x}U\,3,$$
$$Z = -\frac{d e}{d y}U\,1 - \frac{d g}{d x}U\,2 + U\,3.$$

Mais $U\,1, U\,2, U\,3$, ne sont autre chose que ce que deviennent $f\,1$, $\Phi\,1$, $\varphi\,1$, lorsque dans la première on fait e nul, & $f = x + \mu$; dans la seconde g nul, & $i = y + \lambda$; dans la troisième m nul, & $l = z + \varepsilon$; c'est-à-dire, qu'elles sont fonctions; la première, de $x + \mu$; la seconde, de $y + \lambda$; la troisième, de $z + \varepsilon$: les intégrales trouvées de cette manière, ne sont donc que particulières, & il en faut chercher de plus générales.

(9.) Nous ferons, pour abréger, les quotiens des quantités E', F', $1 + E'^2$, $1 + F'^2$, divisées chacune par $1 + E'^2 + F'^2$, égaux à α, β, γ, δ, les quotiens de E', F', $1 + E''^2$, $1 + F''^2$, divisées chacune par $1 + E''^2 + F''^2$, égaux à α', β', γ', δ', $\frac{1 - E''^2 - F''^2}{1 + E''^2 + F''^2} = h$, &c, & il sera facile de tirer de nos équations générales,

$$da'1 = \varepsilon(\alpha dx - \delta dy + F'\alpha dz) + \varepsilon'(\beta dx + E'\beta dy - \gamma dz),$$

$$da'2 = \varphi(\alpha dx - \delta dy + F'\alpha dz) + \varphi'(\beta dx + E'\beta dy - \gamma dz),$$

$$de''1 = \left\{ \begin{array}{l} \quad [a'1((e) + ((m1)]\ [\alpha' dx - \delta' dy + F''\alpha' dz] \\ + [a'1(e)) + (m1)]\ [\beta' dx + E''\beta' dy - \gamma' dz] \\ - [a'1(e) + (m1)]\ [h dx + \alpha' dy + \beta' dz], \end{array} \right.$$

$$de''2 = \left\{ \begin{array}{l} \quad [a'1((f) + a'2((e) + ((m2)] \times \\ \qquad [\alpha' dx - \delta' dy + F''\alpha' dz] \\ + [a'1(f)) + a'2(e)) + (m2))] \times \\ \qquad [\beta' dx + E''\beta' dy - \gamma' dz] \\ - [a'1(f) + a'2(e) + (m2)] \times \\ \qquad [h dx + \alpha' dy + \beta' dz], \end{array} \right.$$

$$de''3 = \left\{ \begin{array}{l} \quad [a'2((f) + ((m3)]\ [\alpha' dx - \delta' dy + F''\alpha' dz] \\ + [a'2(f)(+ (m3))]\ [\beta' dx + E''\beta' dy - \gamma' dz] \\ - [a'2(f) + (m3)]\ [h dx + \alpha' dy + \beta' dz], \end{array} \right.$$

&c.

Si l'on peut supposer E, F, E', F', &c, constans, que e, f, e', f', &c, sont linéaires, par rapport à x, y, z; alors, ε, ε', φ, φ', (e), $((e)$, $(e))$, (f), $((f)$, $(f))$ seront des quantités constantes: on aura

$$a'1 = (\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon')x - (\delta\varepsilon - E'\beta\varepsilon')y + (F'\alpha\varepsilon - \gamma\varepsilon')z,$$

$$a'2 = (\alpha\varphi + \beta\varphi')x - (\delta\varphi - E'\beta\varphi')y + (F'\alpha\varphi - \gamma\varphi')z;$$

& $a^{1}\,1$, $a^{1}\,2$ étant linéaires,

$$((a^{1}\,1),(a^{1}\,1)),\ ((a^{1}\,2),(a^{1}\,2)),$$

seront constans.

Nous supposerons $b^{1}\,1$, $b^{1}\,2$, $b^{1}\,3$, des quantités du second degré, c'est-à-dire, que

$$b\,1 = Ax^{2} + By^{2} + Cz^{2} + axy + bxz + cyz:$$

& si

$$\begin{aligned} de^{11}\,1 = {} & [(A)x + (B)y + (C)z]\ [\alpha^{1}dx - \delta^{1}dy + F^{11}\alpha^{1}dz] \\ & + [(a)x + (b)y + (c)z]\ [\beta^{1}dx + E^{11}\beta^{1}dy - \gamma^{1}dz] \\ & - [[a]x + [b]y + [c]z]\ [hdx + \alpha^{1}dy + \beta^{1}dz], \end{aligned}$$

on aura pour déterminer A, B, C, a, b, c, les six équations

$$\delta^{1}(A) + \alpha^{1}(B) = 0,\ (A)F^{11} - (C) = 0,$$
$$(a)E^{11} - (b) = 0,\ \gamma^{1}(a) + \beta^{1}(c) = 0,$$
$$\alpha^{1}[a] - h[b] = 0,\ \beta^{1}[a] - h[c] = 0;$$

on en tirera

$$e^{11}\,1 = \frac{(A)}{2\alpha^{1}}(\alpha^{1}x - \delta^{1}y + \alpha^{1}F^{11}z)^{2}$$
$$+ \frac{(a)}{2\beta^{1}}(\beta^{1}x + E^{11}\beta^{1}y - \gamma^{1}z)^{2} - \frac{[a]}{2h}(hx + \alpha^{1}y + \beta^{1}z)^{2}.$$

Nous trouverions de la même manière les valeurs de $e^{11}2, e^{11}3$; si l'on vouloit un plus grand nombre de termes des séries Ω, ψ, &c, ce seroit encore par des opérations semblables que nous parviendrions aux séries qui conviennent aux deux autres fonctions arbitraires: nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, pour abréger, & nous terminerons ce Mémoire par un théorème relatif à celui de M. de la Grange, que nous avons énoncé au commencement du *cinquième Numéro.*

(10.) L'équation de l'ordre n,

$$A\frac{d^{n}z}{dy^{n}} + B\frac{d^{n}z}{dy^{n-1}dx} + C\frac{d^{n}z}{dy^{n-2}dx^{2}} \pm \ldots \pm H\frac{d^{n}z}{dx^{n}} = W,$$

dans

dans laquelle $A, B, C \ldots\ldots H, W$, ſont des fonctions quelconques de x, y, z, & des différences partielles de z juſqu'à celles de l'ordre $n - 1$ incluſivement, étant propoſée ; ſi on nomme p, q, r, s, &c, les différences partielles de l'ordre $n - 1$, m une des racines de l'équation

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \ldots\ldots + H = 0,$$

& que l'on faſſe pour abréger,

$$\frac{Am + B}{A} = \alpha, \quad \frac{Am\alpha + C}{A} = \beta, \quad \frac{Am\beta + D}{\alpha} = \gamma, \text{ \&c};$$

une des intégrales premières complètes de cette équation dépendra de pouvoir intégrer ces deux-ci,

$$m\,dy + dx = 0,$$

$$Am(dp + \alpha dq + \beta dr + \gamma ds + \text{\&c.}) + W dx = 0.$$

Suppoſons que cette intégrale ſoit $K = F : \omega$, & que

$$dK = P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{\&c} + \partial K,$$

$$d\omega = \pi dp + \varrho dq + \sigma dr + \tau ds + \text{\&c} + \partial \omega;$$

comme par l'élimination de la fonction arbitraire, on trouve

$$\frac{dK}{dx}\frac{d\omega}{dy} - \frac{dK}{dy}\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

on aura auſſi

$$(Q\pi - P\varrho)\left(\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy}\frac{dp}{dx}\right)$$

$$+ (R\pi - P\sigma)\left(\frac{dp}{dy}\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dr}{dy}\right)$$

$$+ (S\pi - P\tau)\left(\frac{dp}{dy}\frac{ds}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{ds}{dy}\right)$$

$$+ (R\varrho - Q\sigma)\left(\frac{dq}{dy}\frac{dr}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dr}{dy}\right)$$

$$+ (S\varrho - Q\tau)\left(\frac{dq}{dy}\frac{ds}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{ds}{dy}\right)$$

$$+ (S\sigma - R\tau)\left(\frac{dr}{dy}\frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dx}\frac{ds}{dy}\right)$$

$$+ \&c. + \left(\pi\frac{\partial K}{dx} - P\frac{\partial\omega}{dx}\right)\frac{dp}{dy} - \left(\pi\frac{\partial K}{dy} - P\frac{\partial\omega}{dy}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$+ \left(\varrho\frac{\partial K}{dx} - Q\frac{\partial\omega}{dx}\right)\frac{dq}{dy} - \left(\varrho\frac{\partial K}{dy} - Q\frac{\partial\omega}{dy}\right)\frac{dq}{dx}$$

$$+ \left(\sigma\frac{\partial K}{dx} - R\frac{\partial\omega}{dx}\right)\frac{dr}{dy} - \left(\sigma\frac{\partial K}{dy} - R\frac{\partial\omega}{dy}\right)\frac{dr}{dx}$$

$$+ \left(\tau\frac{\partial K}{dx} - S\frac{\partial\omega}{dx}\right)\frac{ds}{dy} - \left(\tau\frac{\partial K}{dy} - S\frac{\partial\omega}{dy}\right)\frac{ds}{dx}$$

$$+ \&c + \frac{\partial K}{dx}\frac{\partial\omega}{dy} - \frac{\partial K}{dy}\frac{\partial\omega}{dx} = 0.$$

On fera dans cette équation,

$$Q\pi - P\varrho = 0,\ R\pi - P\sigma = 0,$$
$$S\pi - P\tau = 0,\ R\varrho - Q\sigma = 0,\ \&c,$$

& désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c, les rapports $\frac{\varrho}{\pi}, \frac{\sigma}{\pi}, \frac{\tau}{\pi}$, &c; ou $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}, \frac{S}{P}$, &c, on changera les différentielles

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \&c,$$
$$\pi\,dp + \varrho\,dq + \sigma\,dr + \tau\,ds + \&c,$$

en celles-ci,

$$P(dp + \alpha\,dq + \beta\,dr + \gamma\,ds + \&c),$$
$$\pi(dp + \alpha\,dq + \beta\,dr + \gamma\,ds + \&c).$$

Cela posé, ayant multiplié la proposée par un facteur ψ, on la comparera, terme à terme, à l'équation que nous venons de réduire, & à cause de

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},\ \frac{dq}{dx} = \frac{dr}{dy},\ \frac{dr}{dx} = \frac{ds}{dy},\ \&c;$$

on aura

$$\pi\frac{\partial K}{dx} - P\frac{\partial\omega}{dx} = A\psi,\ \pi\frac{\partial K}{dy} - P\frac{\partial\omega}{dy} = (A\alpha - B)\psi;$$

puis, faisant $\frac{A\alpha - B}{A} = m$,

$$Am\alpha = A\beta - C,\ Am\beta = A\gamma - D,\ Am\gamma = A\delta - E,$$

& m sera donné par l'équation

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \ldots + H = 0.$$

On aura aussi

$$\frac{\partial \omega}{dx}\frac{\partial K}{dy} - \frac{\partial \omega}{dy}\frac{\partial K}{dx} = \psi W.$$

Au moyen de celle-ci, & des deux premières, on trouvera

$$\frac{\partial K}{dy} - m\frac{\partial K}{dx} + \frac{PW}{A} = 0,\ \frac{\partial \omega}{dy} - m\frac{\partial \omega}{dx} + \frac{\pi W}{A} = 0.$$

Donc

$$dK = \frac{\partial K}{dx}(dx + m\,dy)$$
$$+ P\left(dp + \alpha dq + \beta dr + \gamma ds + \&c - \frac{W dy}{A}\right):$$

& le problème ne dépendra plus que de pouvoir intégrer ces deux équations

$$dx + m\,dy = 0,\ dp + \alpha dq + \beta dr + \gamma ds + \&c - \frac{W dy}{A} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux que voici:

$$dx + m\,dy = 0,\ Am(dp + \alpha dq + \beta dr + \gamma ds + \&c) + W dx = 0.$$

C'est précisément ainsi que j'ai démontré les théorèmes sur les équations linéaires de tous les ordres, *n.os 83 & suivans des Leçons de Calcul différentiel & de Calcul intégral*: j'y ai donné les conditions pour que ces équations aient des intégrales de l'ordre immédiatement inférieur; la même analyse nous feroit découvrir les conditions qui doivent avoir lieu dans l'équation plus générale dont nous venons de nous occuper. M. le Commandeur de Nieuport paroît douter de la généralité de nos solutions, dans un Mémoire sur le Calcul intégral aux

différences partielles, que l'Académie doit publier dans un des prochains volumes des Savans Étrangers: ſon objection eſt fondée ſur une faute de calcul qui ſe trouve, *page 686*, de l'Ouvrage cité, & que je prie de corriger comme il ſuit.

On tirera de

$$(\dot{\psi}) = 0,\ (\ddot{\psi}) = \Phi:\left(y \pm \int \frac{dx}{X}\right),\ \psi = \left[y + \int :\left(y + \int \frac{dx}{X}\right)\right]\Phi:\left(y \pm \int \frac{dx}{X}\right),$$

& l'autre équation de condition deviendra

$$\frac{dX}{dx}\left[y + f:\left(y \pm \int \frac{dx}{X}\right)\right] \mp 2 = 0,$$

de laquelle on tire $f:\left(y \pm \int \frac{dx}{X}\right) = -y \pm 2:\frac{dX}{dx}$.

Il faudra donc que $-\int \frac{dx}{X} = 2:\frac{dX}{dx}$, ou que $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{2X}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2$. Cette équation du ſecond ordre a pour intégrale complète $X = (ax + b)^2$, & elle n'a d'autre ſolution particulière que $X = 0$. Ainſi l'équation générale des cordes vibrantes n'aura d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, que lorſque X ſera une quantité de cette forme $(ax + b)^2$.



SUR LES NAISSANCES, LES MARIAGES ET LES MORTS

A Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784; & dans toute l'étendue de la France, pendant les années 1781 & 1782.

Par M. DE LA PLACE.

LA population eſt un des plus ſûrs moyens de juger de la proſpérité d'un Empire; & les variations qu'elle éprouve, comparées aux évènemens qui les précèdent, ſont la plus juſte meſure de l'influence des cauſes phyſiques & morales ſur le bonheur ou ſur le malheur de l'eſpèce humaine. Il eſt donc intéreſſant à tous égards de connoître la population de la France, d'en ſuivre les progrès, & d'avoir la loi ſuivant laquelle les hommes ſont répandus ſur la ſurface de ce grand Royaume. Ces recherches tiennent de trop près à l'Hiſtoire Naturelle de l'homme, pour être étrangères à l'Académie; elles ſont trop utiles pour ne pas mériter ſon attention. L'Académie s'eſt déterminée par ces conſidérations, à inſérer chaque année dans ſes Mémoires, la liſte des naiſſances, des mariages & des morts dans toute l'étendue de la France. Un Magiſtrat reſpectable par ſes lumières & par ſon zèle pour le bien public, & qui depuis long-temps s'occupe avec ſuccès des recherches ſur la population, a bien voulu lui procurer tous les renſeignemens qu'elle pouvoit deſirer ſur cette matière; c'eſt à lui que nous ſommes redevables des liſtes ſuivantes. La première embraſſe les naiſſances, les mariages & les morts à Paris, depuis 1771 juſqu'en 1784; elle ſert de ſuite à celle que M. Morand a publiée dans nos Mémoires de 1771. Les deux autres liſtes préſentent les naiſſances, les mariages & les morts dans toute l'étendue du Royaume, pendant les

années 1781 & 1782: il feroit à defirer que les fexes y fuffent diftingués, comme ils le font à Paris, depuis 1745; mais on doit efpérer que le Gouvernement convaincu de l'importance de ces réfultats, leur donnera toute la perfection dont ils font fufceptibles.

Quoique les naiffances foient la fource de la population, elles ne fuffifent pas cependant pour la déterminer; il faut connoître encore la durée moyenne de l'exiftence des hommes dans le lieu de leur naiffance, quelles que foient les caufes qui les en font difparoître; car il eft vifible qu'à égalité de naiffances, un pays fera d'autant plus peuplé, que les hommes y vivront plus long-temps: ainfi dans les contrées où le nombre des morts étant fenfiblement égal à celui des naiffances, la population eft à peu-près conftante, le nombre d'années qui exprime la durée moyenne de la vie, eft le vrai rapport de la population aux naiffances annuelles; c'eft le facteur par lequel on doit multiplier celle-ci pour avoir la population. La détermination de ce facteur eft le point le plus délicat & le plus intéreffant de ces recherches: voyons comment on peut y parvenir.

Les évènemens d'un même genre ont des caufes uniformes & conftantes, mais dont l'action peut être augmentée ou diminuée par mille caufes variables qui produifent les irrégularités que nous attribuons au hafard dans la fucceffion des évènemens. Ces irrégularités, en fe compenfant les unes par les autres, difparoîtroient dans une fuite infinie d'obfervations qui ne laifferoient ainfi apercevoir que le réfultat des caufes conftantes: mais dans un nombre fini d'obfervations, elles peuvent éloigner de ce réfultat, d'autant plus que ce nombre eft moins confidérable. C'eft à ces écarts qu'il faut attribuer les différences obfervées dans le rapport de la population aux naiffances, & il en réfulte la néceffité d'employer de grands dénombremens pour déterminer ce rapport. On choifira donc un grand nombre de paroiffes dans toutes les provinces du Royaume, pour avoir un milieu entre les petites différences que les caufes locales peuvent apporter dans les réfultats: on

ſera enſuite un dénombrement exact de leurs habitans à une époque donnée; & par le relevé des naiſſances durant les dix années qui précèdent cette époque, on déterminera le nombre correſpondant des naiſſances annuelles. En diviſant par ce nombre celui des habitans, on aura le rapport de la population aux naiſſances, d'une manière d'autant plus préciſe, que le dénombrement ſera plus conſidérable. Comme le nombre des naiſſances annuelles en France excède celui des morts, il eſt néceſſaire, pour établir une exacte parité entre la population entière de la France & celle de ces paroiſſes, de les choiſir de manière que le nombre total des morts ſoit à celui des naiſſances dans le rapport qu'ont entr'eux ces deux nombres, relativement à tout le Royaume. Si l'on a ſoin de diſtinguer les ſexes, on aura ſéparément la population des hommes, celle des femmes, & la durée de la vie moyenne de chacun des deux ſexes, ce qui eſt intéreſſant à connoître. Un dénombrement ſemblable, fait avec ſoin dans les divers pays, & renouvelé dans différens ſiècles, donneroit les différences que le climat, le temps & les gouvernemens peuvent produire dans la durée moyenne de la vie des hommes.

Le rapport de la population aux naiſſances, déterminé par la méthode précédente, ne peut jamais être rigoureuſement exact: en lui ſuppoſant même une préciſion rigoureuſe, il reſteroit encore ſur la population de la France, l'incertitude qui naît de l'action des cauſes variables. La population de la France, tirée des naiſſances annuelles, n'eſt donc qu'un réſultat probable, & par conſéquent ſuſceptible d'erreurs. C'eſt à l'analyſe des haſards à déterminer la probabilité de ces erreurs, & juſqu'à quel point on doit porter le dénombrement, pour qu'il ſoit très-probable qu'elles ſeront renfermées dans d'étroites limites. Ces recherches dépendent d'une théorie nouvelle & encore peu connue, celle de la probabilité des évènemens futurs priſe des évènemens obſervés; elles conduiſent à des formules dont le calcul numérique eſt impraticable, à cauſe des grands nombres que l'on

y considère : mais ayant donné dans ce Volume & dans le précédent, les principes nécessaires pour résoudre ce genre de questions, & une méthode générale pour avoir en séries très-convergentes, les fonctions de grands nombres ; j'en ai fait l'application à la théorie de la population déduite des naissances. Les dénombremens déjà faits en France, & comparés aux naissances, donnent à peu-près 26 pour le rapport de la population aux naissances annuelles ; or si l'on prend un milieu entre les naissances des années 1781 & 1782, on a $973054 \frac{1}{2}$ pour le nombre des naissances annuelles dans toute l'étendue de ce Royaume, en y comprenant la Corse ; en multipliant donc ce nombre par 26, la population de la France entière, sera de 25299417 habitans. Maintenant je trouve par mon analyse, que pour avoir une probabilité de mille contre un, de ne pas se tromper d'un demi-million dans cette évaluation de la population de la France, il faudroit que le dénombrement qui a servi à déterminer le facteur 26, eût été de 771469 habitans. Si l'on prenoit $26 \frac{1}{2}$ pour le rapport de la population aux naissances, le nombre des habitans de la France seroit 25785944 ; & pour avoir la même probabilité de ne pas se tromper d'un demi-million sur ce résultat, le facteur $26 \frac{1}{2}$ devroit être déterminé d'après un dénombrement de 817219 habitans. Il suit de-là que si l'on veut avoir sur cet objet la précision qu'exige son importance, il faut porter ce dénombrement à un million ou douze cents mille habitans. Voici l'analyse qui m'a conduit à ce résultat.

Considérons une urne qui renferme une infinité de boules blanches & noires dans un rapport inconnu, & supposons que dans un premier tirage on ait amené p boules blanches & q boules noires ; supposons ensuite que dans un second tirage on ait amené q^1 boules noires, mais que l'on ignore le nombre des boules blanches sorties dans ce tirage ; le moyen qui se présente naturellement pour déterminer ce nombre d'une manière approchée, est de le supposer avec q^1 dans

dans le rapport de p à q, ce qui donne $\frac{pq^{\prime}}{q}$ pour ce nombre. Déterminons présentement la probabilité que le vrai nombre inconnu sera compris dans les limites $\frac{pq^{\prime}}{q}.(1 - \varpi)$, & $\frac{pq^{\prime}}{q}.(1 + \varpi)$, ou, ce qui revient au même, que l'erreur du résultat $\frac{pq^{\prime}}{q}$ ne surpassera pas $\frac{pq^{\prime}\varpi}{q}$.

Pour cela, nommons x le rapport inconnu des boules blanches au nombre total des boules renfermées dans l'urne, & désignons par $p^{\prime}$ le nombre inconnu des boules blanches amenées au second tirage; la probabilité de ce tirage sera, par la théorie connue des hasards,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(p^{\prime} + q^{\prime})}{1.2.3..p^{\prime}.1.2.3..q^{\prime}}.x^{p^{\prime}}.(1 - x)^{q^{\prime}}.$$

Mais $p^{\prime}$ étant inconnu, il est susceptible de toutes les valeurs depuis $p^{\prime} = 0$ jusqu'à $p^{\prime} = \infty$; ces valeurs sont plus ou moins probables, suivant qu'elles rendent le second tirage plus ou moins probable: on aura donc la probabilité de $p^{\prime}$, en divisant la quantité précédente, par la somme de toutes les valeurs de cette quantité, depuis $p^{\prime} = 0$ jusqu'à $p^{\prime} = \infty$, c'est-à-dire par la suite infinie,

$$(1 - x)^{q^{\prime}}.[1 + (q^{\prime} + 1).x + \frac{(q^{\prime} + 1).(q^{\prime} + 2)}{1.2}.x^2 + \&c.]$$

(Voyez les pages 428 & 429 de ce Volume). Cette suite est égale à $\frac{1}{1 - x}$; la probabilité de $p^{\prime}$ est donc égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(p^{\prime} + q^{\prime})}{1.2.3..p^{\prime}.1.2.3..q^{\prime}}.x^{p^{\prime}}.(1 - x)^{q^{\prime}+1}.$$

Cette probabilité suppose que x est le rapport des boules blanches à toutes les boules renfermées dans l'urne; mais ce rapport étant inconnu, on peut le faire varier depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$: ces différentes valeurs de x sont plus ou moins probables, suivant qu'elles rendent le premier tirage

plus ou moins probable; or, la probabilité de ce tirage eſt

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}.x^p.(1-x)^q;$$

la probabilité de x ſera donc égale à $\frac{x^p\partial x(1-x)^q}{\int x^p\partial x(1-x)^q}$; l'intégrale du dénominateur étant priſe depuis $x=0$, juſqu'à $x=1$ *(Voyez la page 430 de ce volume)*. En multipliant cette probabilité par celle de p^1, on aura la probabilité de p^1, correſpondante au rapport x; d'où il ſuit que la probabilité entière de p^1 eſt égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(p^1+q^1).\int x^{p+p^1}\partial x.(1-x)^{q+q^1+1}}{1.2.3\ldots p^1.1.2.3\ldots q^1.\int x^p\partial x.(1-x)^q};$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant priſes depuis $x=0$, juſqu'à $x=1$.

La probabilité que p^1 eſt compris depuis $p^1=0$, juſqu'à $p^1=s$, ſera, en vertu de la formule précédente,

$$\frac{\int x^p\partial x(1-x)^{q+q^1+1}.\left[1+(q^1+1).x\ldots+\frac{(q^1+1)(q^1+2)\ldots(q^1+s)}{1.2.3\ldots s}.x^s\right]}{\int x^p\partial x(1-x)^q};$$

or, q^1 & s étant ſuppoſés de très-grands nombres, on trouvera par l'analyſe que j'ai donnée dans le volume de 1782, *page 60*,

$$1+(q^1+1).x\ldots\ldots+\frac{(q^1+1)\ldots(q^1+s)}{1.2.3\ldots s}.x^s$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{q^1+1}}.\frac{\int x'^s\partial x'(1-x')^{q^1}}{\int x'^s\partial x'(1-x')^{q^1}};$$

l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $x'=x$, juſqu'à $x'=1$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x'=0$, juſqu'à $x'=1$: donc la probabilité que p^1 eſt compris depuis $p^1=0$, juſqu'à $p^1=s$, eſt

$$\frac{\iint x^p\partial x(1-x)^q.x'^s\partial x'(1-x')^{q^1}}{\iint x^p\partial x(1-x)^q.x'^s\partial x'(1-x')^{q^1}};$$

ſes intégrales du numérateur étant priſes depuis $x' = x$, juſqu'à $x' = 1$; & depuis $x = 0$, juſqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant priſes depuis x & x' nuls, juſqu'à x & x' égaux à l'unité. Si l'on applique à cette formule, l'analyſe que nous avons donnée *pages 439 & ſuivantes* de ce volume, on trouvera que ſi s eſt moindre & très-peu différent de $\frac{pq'}{q}$, la fraction précédente ſera à très-peu-près égale à $\frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, & l'intégrale relative à t, étant priſe depuis $t = T$, juſqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s}{s+q'}\right)^2 . (p+q)^3 . (s+q')^3}{2 s q' (p+q)^3 + 2 p q (s+q')^3}.$$

On trouvera pareillement que ſi s eſt plus grand que $\frac{pq'}{q}$, & qu'il en diffère très-peu, la fraction précédente ſera à très-peu-près égale à $1 - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}$, l'intégrale étant priſe depuis $t = T$, juſqu'à $t = \infty$. Il ſuit de-là que la probabilité que p' eſt compris entre les deux nombres s & s' dont le premier eſt moindre, & le ſecond plus grand que $\frac{pq'}{q}$, eſt égale à

$$1 - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}};$$

la première intégrale étant priſe depuis $t = T$, juſqu'à $t = \infty$, & la ſeconde intégrale étant priſe depuis $t = T'$, juſqu'à $t = \infty$, T & T' étant donnés par les deux équations

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s}{s+q}\right)^2 . (p+q)^3 . (s+q')^3}{2 s q' (p+q)^3 + 2 p q (s+q')^3},$$

$$T'^2 = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s'}{s'+q'}\right)^2 \cdot (p+q)^3 \cdot (s'+q')^3}{2 s' q' (p+q)^3 + 2 p q (s'+q')^3}.$$

Supposons

$$s = \frac{p q'}{q}(1 - \varpi), \quad \& \; s' = \frac{p q'}{q}(1 + \varpi),$$

ϖ étant une très-petite fraction; si l'on néglige les quantités de l'ordre ϖ^3, les deux valeurs de T^2 & de T'^2, deviendront égales entr'elles & à $\frac{p q q' \varpi^2}{2(p+q) \cdot (q+q')}$: ainsi en nommant V^2, cette dernière quantité, & en désignant par P la probabilité que le nombre p' sera compris dans les limites $\frac{p q'}{q}(1 - \varpi)$, & $\frac{p q'}{q}(1 + \varpi)$, on aura

$$P = 1 - \frac{2 \int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = V$, jusqu'à $t = \infty$. Cette expression fort simple de P, a l'avantage d'être exacte jusqu'aux quantités de l'ordre ϖ^4; car les termes de l'ordre ϖ^3, que nous avons négligés, se détruisent d'eux-mêmes dans la quantité

$$1 - \frac{\int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{\int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}},$$

que nous avons trouvée ci-dessus pour l'expression de P.

Il est facile d'appliquer ces résultats à la théorie de la population déduite des naissances; car on peut considérer chaque naissance annuelle comme étant représentée par une boule noire, & chaque individu existant comme étant représenté par une boule blanche; le premier tirage sera le dénombrement dans lequel on a observé que sur q naissances, le nombre des habitans est p; & le second tirage sera la population de la France entière dont le nombre q' des naissances annuelles est connu, tandis que la population correspondante p' est inconnue: P sera dans ce cas la probabilité que la population p'

de la France eſt compriſe dans les limites $\frac{pq^1}{q}.(1-\varpi)$ & $\frac{pq^1}{q}.(1+\varpi)$; on aura ainſi cette probabilité par une formule très-ſimple.

Il eſt facile d'en conclure le nombre auquel p doit être porté, pour avoir une grande probabilité que l'erreur ſur la population p^1 de la France entière ſera peu conſidérable. La recherche de ce nombre devient néceſſaire, ſi l'on veut faire un nouveau dénombrement pour déterminer le vrai facteur par lequel on doit multiplier les naiſſances annuelles; ainſi nous allons entrer dans quelques détails ſur cet objet.

Pour cela, nous ſuppoſerons

$$p = iq,\ \frac{pq^1}{q}.\varpi = a;$$

nous aurons par conſéquent $\varpi = \frac{a}{iq^1}$, & l'équation

$$V^2 = \frac{pqq^1.\varpi^2}{2(p+q).(q+q^1)}$$

donnera

$$p = \frac{2i^2.(i+1).q^{1^2}.V^2}{a^2 - 2i.(i+1).q^1.V^2}.$$

Cette valeur de p ſuppoſe que l'on connoît a, q^1, V & i. La valeur de a dépend des limites entre leſquelles on ſuppoſe que l'erreur du réſultat $\frac{pq^1}{q}$ eſt compriſe; nous ferons ici $a = 500000$. La valeur de q^1 eſt donnée par les naiſſances annuelles dans toute l'étendue du Royaume, & nous avons vu que $q^1 = 973054{,}5$. La valeur de V dépend de la probabilité P, que la population de la France ſera compriſe dans les limites $\frac{pq^1}{q} - a$ & $\frac{pq^1}{q} + a$: nous ſuppoſerons ici que cette probabilité eſt de mille contre un, en ſorte que $P = \frac{1000}{1001}$; nous aurons ainſi

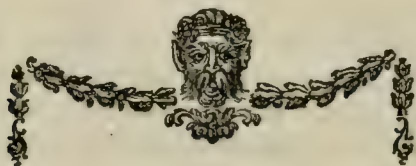
$$\frac{2\int \partial t.c^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} = \frac{1}{1001},\ \text{ou}\ \int \partial t.e^{-t^2} = \frac{\sqrt{(\pi)}}{2002}.$$

L'intégrale devant être prise depuis $t = V$ jusqu'à $t = \infty$, il est clair que cette équation détermine V, & l'on trouve $V^2 = 5{,}415$. Quant au nombre i, il dépend du rapport de p à q qui résulte du dénombrement; mais s'il s'agit d'un dénombrement à faire, ce rapport est inconnu; cependant les dénombremens déjà faits donnent à peu-près $i = 26$; ainsi l'on est assuré que le facteur i s'éloigne peu de ce nombre. Nous supposerons donc successivement $i = 25\frac{1}{2}$, $i = 26$, $i = 26\frac{1}{2}$, & nous aurons pour les valeurs correspondantes de p,

$$p = 727510, \; p = 771469, \; p = 817219,$$

c'est-à-dire, que pour avoir une probabilité de mille contre un, de ne pas se tromper d'un demi-million dans l'évaluation de la population de la France, il faut que le dénombrement p, dans le cas où il donne le premier facteur, soit de 727510 habitans; qu'il soit de 771469 habitans dans le cas du second facteur, & de 817219 habitans, s'il conduit au troisième facteur.

De-là je conclus que si l'on veut avoir sur cet objet, la probabilité qu'exige son importance, il faut porter à un million ou douze cents mille habitans, le dénombrement p qui doit déterminer le facteur i.



Morts de la ville & fauxbourgs de Paris, 1784.

ORTS.		TOTAL.	ENFANS TROUVÉS.		TOTAL.
S.	FEMELLES.		MÂLES.	FEMELLES.	
7.	9738.	20685.	3581.	3575.	7156.
6.	9248.	20374.	3899.	3777.	7676.
2.	8766.	18518.	3037.	2952.	5989.
0.	7591.	16061.	3152.	3181.	6333.
5.	8897.	18662.	3379.	3126.	6505.
0.	9016.	20016.	3226.	3193.	6419.
1.	8100.	17291.	3411.	3294.	6705.
6.	8210.	17796.	3449.	3239.	6688.
2.	9154.	19296.	3421.	3223.	6644.
7.	9764.	21331.	2850.	2718.	5568.
8.	9352.	20180.	2799.	2809.	5608.
6.	8207.	18953.	2708.	2736.	5444.
6.	8864.	20010.	2799.	2916.	5715.
6.	9762.	21778.	2794.	2815.	5609.
4.	133466.	289670.	48036.	46941.	94977.
3.	8890.	19303.	3202.	3129.	6331.

ÉTAT des Naissances, des Mariages & des Morts de la ville & fauxbourgs de Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784.

ANNÉES.	NAISSANCES.		TOTAL.	MARIAGES.	MORTS.		TOTAL	ENFANS TROUVÉS.		TOTAL.
	MÂLES.	FEMELLES.			MÂLES.	FEMELLES.		MÂLES.	FEMELLES.	
1771......	9604.	9337.	18941.	4452.	10947.	9738.	20685.	3581.	3575.	7156.
1772......	9557.	9156.	18713.	4611.	11126.	9248.	20374.	3899.	3777.	7676.
1773......	9751.	9096.	18847.	4810.	9752.	8766.	18518.	3037.	2952.	5989.
1774......	9892.	9461.	19353.	5114.	8470.	7591.	16061.	3152.	3181.	6333.
1775......	10247.	9403.	19650.	5016.	9765.	8897.	18662.	3379.	3126.	6505.
1776......	9716.	9203.	18919.	5432.	11000.	9016.	20016.	3226.	3193.	6419.
1777......	11445.	10821.	22266.	5442.	9191.	8100.	17291.	3411.	3294.	6705.
1778......	11037.	10651.	21688.	5250.	9586.	8210.	17796.	3449.	3239.	6688.
1779......	10506.	10108.	20614.	5208.	10142.	9154.	19296.	3421.	3223.	6644.
1780......	10071.	9546.	19617.	5143.	11567.	9764.	21331.	2850.	2718.	5568.
1781......	10397.	9835.	20232.	4970.	10828.	9352.	20180.	2799.	2809.	5608.
1782......	9851.	9536.	19387.	4878.	10746.	8207.	18953.	2708.	2736.	5444.
1783......	9952.	9736.	19688.	5213.	11146.	8864.	20010.	2799.	2916.	5715.
1784......	9833.	9721.	19554.	5039.	12016.	9762.	21778.	2794.	2815.	5609.
TOTAL....	151859.	145159.	297018.	75353.	156204.	133466.	289670.	48036.	46941.	94977.
Année commune.	10121.	9677.	19788.	5023.	10413.	8890.	19303.	3202.	3129.	6331.

l'ordre des Généralités, pendant l'année 1781.

S TOTAL des MORTS.	EXCÉDANT des Naissances sur les MORTS.	OBSERVATIONS.
20,180.	+ 52.	
43,081.	+ 1,370.	
28,928.	— 2,634.	
53,338.	— 4,004.	
27,506.	— 29.	
20,892.	— 452.	
22,864.	+ 3,317.	
21,233.	— 4,206.	
44,797.	+ 10,005.	
27,061.	+ 7,466.	
19,995.	+ 1,574.	
20,887.	+ 6,451.	
20,042.	+ 4,582.	
18,751.	+ 9,010.	
23,195.	+ 1,872.	
29,977.	+ 948.	
1,212.	+ 247.	
16,727.	— 147.	
20,801.	— 203.	
27,384.	+ 417.	
22,557.	+ 2,162.	
19,143.	— 344.	
88,708.	+ 2.622.	
7,056.	+ 458.	
51,917.	+ 19,182.	
22,029.	+ 5,817.	
41,246.	+ 1,242.	
21,814.	+ 5,800.	
19,118.	+ 6,194.	
12,003.	+ 1,126.	
28,366.	+ 3,686.	
7,745.	+ 3,053.	
26,624.	+ 1,774.	
3,961.	+ 960.	
881,138.	+ 89,268.	

Dans la colonne de l'Excédant des Naissances sur les Morts, le signe + indique que le nombre des Naissances surpasse celui des Morts, & le signe — indique que le nombre des Morts surpasse celui des Naissances.

Les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Soissons, d'Amiens & d'Alençon, ont été affligées d'épidémies & de maladies qui y ont occasionné une mortalité considérable, puisque le nombre des Décès surpasse celui des Naissances; mais cependant le résultat de toutes les Généralités présente un Tableau satisfaisant, puisque le nombre total des Naissances surpasse celui des Morts de 89,268.

POPULATION du Royaume, l'île de Corse comprise, suivant l'ordre des Généralités, pendant l'année 1781.

NUMER. qui constatent l'ordre des Généralités & Provinces.	DÉNOMINATION des Généralités du Royaume, l'île de Corse comprise, distinguées en pays d'Élections & en pays d'États, la ville de Paris étant distinguée de la Généralité, comme Capitale du Royaume.	NAISSANCES.	MARIAGES.	PROFESSIONS en RELIGION.	MORTS dans la Société civile.	MORTS en Religion.	TOTAL de MORTS.	EXCÉDANT des Naissances sur les MORTS.
	PARIS (Ville)	20,232.	4,970.	87.	20,057.	123.	20,180.	+ 52.
	GÉNÉRALITÉS en pays d'Élections.							
1.	PARIS	44,451.	10,210.	52.	42,994.	87.	43,081.	+ 1,370.
2.	ORLÉANS	26,294.	6,641.	25.	28,870.	58.	28,928.	− 2,634.
3.	TOURS	49,334.	12,[illegible]3.	59.	53,243.	95.	53,3[illegible].	− 4,004.
4.	POITIERS	27,377.	7,523.	21.	27,468.	38.	27,506.	− 29.
5.	BOURGES	20,440.	4,[illegible]20.	29.	20,867.	25.	20,8[illegible]2.	− 452.
6.	LIMOGES	26,181.	7,433.	30.	22,840.	24.	22,864.	+ 3,317.
7.	LA ROCHELLE	17,027.	4,612.	22.	21,211.	22.	21,233.	− 4,206.
8.	BORDEAUX	54,802.	14,924.	48.	44,732.	65.	44,797.	+ 10,005.
9.	AUCH	34,527.	8,469.	27.	27,037.	24.	27,061.	+ 7,466.
10.	MONTAUBAN	21,569.	5,296.	13.	19,971.	24.	19,995.	+ 1,574.
11.	GRENOBLE	27,338.	6,250.	31.	20,848.	39.	20,887.	+ 6,451.
12.	LYON	24,624.	5,823.	30.	19,983.	59.	20,042.	+ 4,582.
13.	RIOM	27,761.	6,815.	44.	18,693.	58.	18,751.	+ 9,010.
14.	MOULINS	25,067.	6,996.	36.	23,168.	27.	23,195.	+ 1,872.
15.	CHÂLONS	30,925.	7,238.	23.	29,965.	12.	29,977.	+ 948.
16.	LE CLERMONTOIS	1,459.	317.	//	1,212.	//	1,212.	+ 247.
17.	SOISSONS	16,580.	3,887.	17.	16,690.	28.	16,727.	− 147.
18.	AMIENS	20,598.	5,244.	14.	20,761.	40.	20,801.	− 203.
19.	ROUEN	27,801.	7,765.	51.	27,297.	87.	27,384.	+ 417.
20.	CAEN	24,719.	6,067.	47.	22,495.	62.	22,557.	+ 2,162.
21.	ALENÇON	18,799.	4,[illegible]54.	33.	19,117.	26.	19,143.	− 344.
	GÉNÉRALITÉS en pays d'États.							
22.	RENNES	91,330.	22,020.	100.	88,537.	171.	88,708.	+ 2,622.
23.	PERPIGNAN	7,514.	1,727.	1.	7,050.	6.	7,056.	+ 458.
24.	MONTPELLIER	71,099.	15,849.	78.	51,824.	93.	51,917.	+ 19,182.
25.	AIX	27,846.	5,698.	33.	21,961.	68.	22,029.	+ 5,817.
26.	DIJON	42,488.	10,216.	72.	41,148.	98.	41,246.	+ 1,242.
27.	BESANÇON	27,614.	6,110.	31.	21,760.	54.	21,814.	+ 5,800.
28.	STRASBOURG	25,312.	5,613.	31.	19,068.	50.	19,118.	+ 6,194.
29.	METZ	13,[illegible]9.	2,597.	25.	11,948.	55.	12,003.	+ 1,126.
30.	NANCY	32,[illegible]2.	6,647.	84.	28,277.	89.	28,366.	+ 3,686.
31.	VALENCIENNES	10,7[illegible]8.	2,506.	43.	7,694.	51.	7,745.	+ 3,053.
32.	LILLE	28,[illegible]98.	6,886.	147.	26,435.	189.	26,624.	+ 1,774.
33.	ÎLE DE CORSE	4,921.	985.	18.	3,940.	21.	3,961.	+ 960.
	RÉSULTATS du Royaume, l'île de Corse comprise.	970,406.	236,503.	1400.	879,170.	968.	881,138.	+ 89,268.

OBSERVATIONS.

Dans la colonne de l'Excédant des Naissances sur les Morts, le signe + indique que le nombre des Naissances surpasse celui des Morts, & le signe — indique que le nombre des Morts surpasse celui des Naissances.

Les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Soissons, d'Amiens & d'Alençon, ont été affligées d'épidémies & de maladies qui y ont occasionné une mortalité considérable, puisque le nombre des Décès surpasse celui des Naissances; mais cependant le résultat de toutes les Généralités présente un Tableau satisfaisant, puisque le nombre total des Naissances surpasse celui des Morts de 89,268.

nt l'ordre des Généralités, pendant l'année 1782.

)N.	TS — TOTAL des MORTS.	EXCÉDANT des Naiſſances ſur les MORTS.
	18,953.	+ 434.
	43,260.	+ 2,546.
	31,848.	— 3,455.
	61,252.	— 11,735.
	30,560.	— 3,744.
	25,727.	— 2,746.
	26,319.	+ 197.
	22,665.	— 4,909.
	49,314.	+ 5,800.
	26,404.	+ 3,885.
	19,713.	+ 2,527.
	22,024.	+ 4,824.
	20,916.	+ 3,302.
	23,319.	+ 4,291.
	27,530.	— 1,342.
	28,553.	+ 3,548.
	1,175.	+ 348.
	15,007.	+ 2,856.
	19,441.	+ 1,431.
	26,061.	+ 2,446.
	25,861.	— 1,871.
	21,791.	— 2,669.
	103,825.	— 15,424.
	8,042.	— 952.
	59,541.	+ 9,086.
	24,881.	+ 3,564.
	43,977.	— 1,227.
	22,159.	+ 6,229.
	20,405.	+ 5,737.
	11,540.	+ 2,523.
	28,146.	+ 5,724.
	7,865.	+ 2,867.
	26,069.	+ 2,120.
	4,359.	+ 990.
	948,502.	+ 27,201.

OBSERVATIONS.

Les maladies épidémiques dont les Généralités de Soiſſons & d'Amiens ont été affligées, pendant l'année 1781, n'ont pas continué en 1782; mais il n'en a pas été de même dans les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle & d'Alençon, où ce fléau a redoublé ſes ravages en 1782. La contagion a même gagné dans les Généralités de Caën & de Moulins; à l'égard de celle de Bretagne, on ne peut pas attribuer aux ſeules maladies épidémiques, la mortalité de 1782, & elle a dû être accrûe par le paſſage & le ſéjour ſucceſſif & continuel des Troupes, tant de terre que de mer, qui y ont été employées; la ville de Breſt ayant toujours été pendant la dernière guerre, le point de réunion de preſque toutes les forces maritimes oppoſées aux Anglois.

OBSERVATION ſur le premier Tableau relatif à la Population de Paris.

Dans ce premier Tableau qui préſente les Naiſſances, les Mariages & les Morts, à Paris, depuis 1771 juſqu'en 1784, la colonne horizontale du total comprend, non-ſeulement les Naiſſances, les Mariages, les Morts & les Enfans-trouvés, dans cet intervalle, mais encore ceux de l'année 1770, & que l'on trouve à la *page 848* de nos Mémoires, pour l'année 1771; ainſi, cette colonne du total eſt relative aux quinze années, depuis 1770 incluſivement juſqu'en 1784 excluſivement.

POPULATION DU ROYAUME, l'île de Corse comprise, suivant l'ordre des Généralités, pendant l'année 1782.

NUMER. qui constatent l'ordre des Généralités & Provinces.	DÉNOMINATION des Généralités du Royaume, l'île de Corse comprise, distinguées en pays d'Élections & en pays d'États; la ville de Paris étant distinguée de la Généralité, comme Capitale du Royaume.	NAISSANCES	MARIAGES.	PROFESSIONS en Religion.	MORTS dans la Société civile.	MORTS en Religion.	MORTS TOTAL des Morts.	EXCÉDANT des Naissances sur les Morts.
	PARIS (Ville)............	19,387.	4,878.	117.	18,827.	126.	18,953.	+ 434.
	GÉNÉRALITÉS en pays d'Élections.							
1.	PARIS....................	45,806.	10,285.	71.	43,158.	102.	43,260.	+ 2,546.
2.	ORLÉANS..................	28,393.	7,105.	26.	31,803.	45.	31,848.	— 3,455.
3.	TOURS....................	49,517.	12,121.	47.	61,156.	96.	61,252.	— 11,735.
4.	POITIERS.................	26,816.	6,496.	45.	30,512.	48.	30,560.	— 3,744.
5.	BOURGES..................	22,981.	4,423.	17.	25,687.	40.	25,727.	— 2,746.
6.	LIMOGES..................	26,516.	6,408.	26.	26,289.	30.	26,319.	+ 197.
7.	LA ROCHELLE..............	17,756.	4,383.	18.	22,641.	24.	22,665.	— 4,909.
8.	BORDEAUX.................	55,114.	18,585.	183.	49,237.	77.	49,314.	+ 5,800.
9.	AUCH.....................	30,289.	6,352.	31.	26,379.	25.	26,404.	+ 3,885.
10.	MONTAUBAN................	22,240.	4,980.	30.	19,679.	34.	19,713.	+ 2,527.
11.	GRENOBLE.................	26,848.	5,436.	34.	21,982.	42.	22,024.	+ 4,824.
12.	LYON.....................	24,218.	5,405.	26.	20,856.	60.	20,916.	+ 3,302.
13.	RIOM.....................	27,610.	5,751.	33.	23,265.	54.	23,319.	+ 4,291.
14.	MOULINS..................	26,188.	5,899.	15.	27,493.	37.	27,530.	— 1,342.
15.	CHÂLONS..................	32,101.	6,856.	15.	28,526.	27.	28,553.	+ 3,548.
16.	LE CLERMONTOIS...........	1,523.	286.	//	1,175.	//	1,175.	+ 348.
17.	SOISSONS.................	17,863.	3,907.	11.	14,976.	31.	15,007.	+ 2,856.
18.	AMIENS...................	20,872.	5,318.	19.	19,410.	31.	19,441.	+ 1,431.
19.	ROUEN....................	28,507.	7,266.	46.	25,989.	72.	26,061.	+ 2,446.
20.	CAEN.....................	23,990.	5,705.	29.	25,814.	47.	25,861.	— 1,871.
21.	ALENÇON..................	19,122.	5,010.	36.	21,749.	42.	21,791.	— 2,669.
	GÉNÉRALITÉS en pays d'États.							
22.	RENNES...................	88,401.	20,298.	86.	103,647.	178.	103,825.	— 15,424.
23.	PERPIGNAN................	7,090.	1,346.	3.	8,033.	9.	8,042.	— 952.
24.	MONTPELLIER..............	68,627.	13,976.	75.	59,396.	145.	59,541.	+ 9,086.
25.	AIX......................	28,445.	5,925.	27.	24,816.	65.	24,881.	+ 3,564.
26.	DIJON....................	42,750.	9,763.	48.	43,855.	122.	43,977.	— 1,227.
27.	BESANÇON.................	28,388.	5,708.	31.	22,090.	69.	22,159.	+ 6,229.
28.	STRASBOURG...............	26,142.	5,445.	23.	20,361.	44.	20,405.	+ 5,737.
29.	METZ.....................	14,063.	2,587.	19.	11,521.	19.	11,540.	+ 2,523.
30.	NANCY....................	33,870.	6,603.	113.	28,050.	96.	28,146.	+ 5,724.
31.	VALENCIENNES.............	10,732.	2,527.	51.	7,817.	48.	7,865.	+ 2,867.
32.	LILLE....................	28,189.	6,789.	120.	25,898.	171.	26,069.	+ 2,120.
33.	ÎLE DE CORSE.............	5,349.	1,068.	20.	4,334.	25.	4,359.	+ 990.
	RÉSULTATS du Royaume, l'île de Corse comprise.	975,703.	224,890.	1,491.	946,421.	2,081.	948,502.	+ 27,201.

OBSERVATIONS.

Les maladies épidémiques dont les Généralités de Soissons & d'Amiens ont été affligées, pendant l'année 1781, n'ont pas continué en 1782; mais il n'en a pas été de même dans les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle & d'Alençon, où ce fléau a redoublé ses ravages en 1782. La contagion a même gagné dans les Généralités de Caën & de Moulins; à l'égard de celle de Bretagne, on ne peut pas attribuer aux seules maladies épidémiques, la mortalité de 1782, & elle a dû être accrûe par le passage & le séjour successif & continuel des Troupes, tant de terre que de mer, qui y ont été employées; la ville de Brest ayant toujours été pendant la dernière guerre, le point de réunion de presque toutes les forces maritimes opposées aux Anglois.

OBSERVATION sur le premier Tableau relatif à la Population de Paris.

Dans ce premier Tableau qui présente les Naissances, les Mariages & les Morts, à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, la colonne horizontale du total comprend, non-seulement les Naissances, les Mariages, les Morts & les Enfans-trouvés, dans cet intervalle, mais encore ceux de l'année 1770, & que l'on trouve à la *page 848* de nos Mémoires, pour l'année 1771; ainsi, cette colonne du total est relative aux quinze années, depuis 1770 inclusivement jusqu'en 1784 exclusivement.

ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre des habitans de la Campagne, en adaptant ſur chacune des Cartes de M. Caſſini, l'année commune des Naiſſances, tant des Villes que des Bourgs & des Villages dont il eſt fait mention ſur chaque Carte; préſenté à l'Académie

Par M.rs DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE.

IL y a long-temps que les Savans ont paru deſirer que le Gouvernement voulût bien s'occuper de cet objet intéreſſant, & l'Académie en particulier a formé des vœux pour l'exécution de ce Projet.

On connoît les réſultats relatifs à cet objet, donnés dans un Ouvrage qui a paru en dernier lieu : cette population a été portée à environ 25 millions d'habitans; en la diviſant par le nombre de lieues carrées contenues dans la France, on a environ 720 habitans par lieue carrée ; mais dans cette évaluation, l'on a fait entrer en ligne de compte les Habitans des Villes & des Campagnes; & l'on n'a point fait la comparaiſon du nombre des habitans d'une Province, au nombre des habitans d'une autre Province : ce réſultat fondé ſur des principes trop peu exacts, a donc paru ſuſceptible d'être ſoumis à de nouvelles recherches; & un Magiſtrat recommandable par ſon amour pour le bien public, a reçu ordre de la part du Roi, de continuer, pour le Gouvernement, des recherches que ſon zèle lui avoit fait entreprendre il y a près de trente ans, dans les provinces d'Auvergne & du Lyonnois dont il a

été Intendant. Il avoit depuis ſuivi ces recherches comme particulier ; ce ſont ces premiers Eſſais que ce Magiſtrat reſpectable préſente aujourd'hui à l'Académie.

Il a pris, pour baſe du travail, les Cartes de M. Caſſini, en diſtinguant la population des Villes & des Bourgs, de celle des Campagnes : la population des Villes & des Bourgs n'a été conſidérée que pour fixer la population totale de la France; mais il ne l'a point fait entrer dans l'évaluation du nombre d'habitans compris dans chaque lieue carrée de chacune des Cartes, population que l'Auteur regarde ſeule comme la véritable population de la France.

On doit ſentir par cet expoſé, que le réſultat doit être fort différent, ſuivant la nature du ſol de chacune des Cartes, & la proximité de la Capitale, des grandes Villes, des grandes Rivières, &c.

L'Auteur ne préſente aujourd'hui ſes réſultats que relativement à dix-ſept des Cartes de M. Caſſini ; il donne par ordre alphabetique le nombre des naiſſances, des morts & des mariages, pour chaque lieu compris dans chacune des Cartes ; & il en conclut la population de ces Cartes.

Pour évaluer cette population, l'Auteur a multiplié par vingt-ſix le nombre des naiſſances ; ce facteur peut paroître arbitraire, & l'Auteur en convient; mais il rend compte, dans un Avant-propos, des motifs qui lui ont fait adopter ce facteur : ce ſont les états des morts & des naiſſances, comparés au dénombrement des habitans dans la généralité de Valenciennes, dans ſoixante-treize Paroiſſes de la généralité de Dijon, dans un grand nombre de Paroiſſes de la Normandie, du Lyonnois & de l'Auvergne.

Si l'on conſidère le travail qu'exige un pareil Ouvrage, les difficultés de toute eſpèce qu'il pourroit éprouver dans ſon exécution, s'il n'étoit entre les mains d'un Magiſtrat auſſi zélé pour le bien public, qu'il eſt généralement eſtimé de ſes Confrères ; on ſentira combien l'Académie doit être flattée de l'hommage qu'on lui rend aujourd'hui. L'Académie a penſé

a pensé qu'elle ne pouvoit faire un meilleur usage du Mémoire qui lui est présenté, qu'en en ordonnant la publication dans ses Volumes.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

« LES recherches faites dans différens pays, ont prouvé qu'on pouvoit se procurer un aperçu très-vraisemblable, « de la population de toute une Province, ainsi que des « grandes Villes, par la connoissance de l'année commune des « naissances de ces Provinces & de ces Villes. «

Dans la Gazette de France du 17 Mars 1769, on « fait mention du dénombrement du Royaume de Naples, « fait au commencement de cette même année, montant à « 3,873,975 personnes de tout sexe & de tout âge; & on « lit dans ce même article de la Gazette, que le nombre « commun des naissances de ce même Royaume, en 1767 « & 1768, étoit de 151,198: en multipliant par 25 ce « nombre de naissances, on trouve 3,779,950, nombre inférieur au dénombrement, & en le multipliant par 26, on « trouve 3,931,148, nombre supérieur à celui des habitans; « c'est donc en multipliant par 25 $\frac{1}{2}$ l'année commune des « naissances du royaume de Naples, qu'on trouve le nombre « exact de ses habitans. «

A l'article Turin, de la Gazette de France du 30 Janvier « 1769, on rapporte le nombre des naissances & celui des « morts de cette Ville, en 1767 & 1768, ainsi que le « nombre effectif de ses habitans, montant en 1768 à 79,870; « l'année moyenne des naissances, prise sur les années 1767 « & 1768, étoit de 2959: la proportion entre le nombre « des vivans & celui des naissances étoit par conséquent de « 27 à 1, & la multiplication par 27, de l'année commune « des naissances, donne exactement le nombre des habitans de « cette Ville. «

On fait tous les ans, dans la généralité de Valenciennes, « le recensement général des habitans; M. l'Intendant a soin « de le joindre aux états de population qu'il adresse au Ministre «

» des Finances, & on s'eſt aſſuré que le nombre réſultant de » ce recenſement général, revient au produit de l'année com- » mune des naiſſances, multipliée par 26 $\frac{1}{2}$.

» M. Moheau, qui a donné au Public un Ouvrage eſtimé, » intitulé *Recherches ſur la population de la France*, a fait » un grand nombre d'expériences dans pluſieurs provinces du » Royaume, & il a trouvé par-tout que la multiplication de » l'année commune des naiſſances par 25 $\frac{1}{2}$, rendoit d'une » manière très-vraiſemblable la population effective, & que » ſur la totalité du Royaume, deux naiſſances doivent y faire » ſuppoſer l'exiſtence de 51 habitans.

» Enfin, l'Académie de Dijon a fait, en 1770, des re- » cherches ſur la population de la Bourgogne; elle s'eſt procuré » le relevé des Naiſſances, des Mariages & des Morts de » cinquante Paroiſſes priſes indifféremment dans neuf bailliages » de la province, & elle s'eſt rendue certaine que l'année » commune des Naiſſances de ces cinquante paroiſſes, mul- » tipliée par 25 $\frac{1}{2}$, donnoit, à 7 près, le nombre d'habitans » compris dans les dénombremens.

» Le feu Roi ordonna en 1771, ſous le miniſtère de » M. l'abbé Terray, à M.rs les Intendans, d'envoyer tous les » ans au Miniſtre des Finances, le relevé du nombre des » Naiſſances, des Mariages & des Morts de toutes les villes, » bourgs & paroiſſes de leur généralité. Cette recherche » s'eſt continuée exactement depuis cette époque, & par la » réunion des états de toutes les généralités, on eſt parvenu » à former des tableaux à peu-près exacts du nombre des » Naiſſances, des Mariages & des Morts de tout le Royaume, » depuis 1770 juſques & compris 1782, & on eſt en état » de connoître quelles ſont les provinces dont la population » s'eſt accrue ou diminuée pendant cet eſpace de temps. En » continuant cette recherche qui ne peut que ſe perfectionner, » on acquerra ſur cet objet important, & qui peut avoir des » rapports eſſentiels avec les différentes parties de l'Adminiſ- » tration, des connoiſſances qu'on n'avoit pu ſe procurer juſqu'à préſent.

Quelques Auteurs qui ont eu la communication des états « de M.rs les Intendans, en ont tiré des conséquences sur la « population du Royaume; ils ont rapporté sur chaque géné- « ralité le nombre des habitans dont elle étoit composée, « & ils ont ajouté le calcul du nombre de ces mêmes habitans « par lieues carrées de 25 au degré. «

Ce calcul du nombre d'habitans de chaque généralité par « lieue carrée, est nécessairement défectueux, attendu qu'il n'a « pu être fait que sur des Cartes générales qui n'ont pas été « levées sur la même échelle. Les Cartes de M. Cassini, qui « sont toutes rédigées dans la même proportion, & qui, outre « les villes & les bourgs, comprennent toutes les paroisses de « la campagne, mettent à portée de faire un calcul bien plus « exact, en adaptant à toutes les villes, bourgs & villages « compris sur ces Cartes, l'année commune des naissances, prise « sur les états de population des généralités, & en formant, « relativement à chaque Carte, une espèce de Dictionnaire par- « ticulier. Ce travail est nécessairement minutieux & demande « de l'attention, parce qu'il y a très-peu de Cartes qui ne « contiennent des portions de différentes généralités, & d'ail- « leurs la conformité des noms & la différence de l'orthographe « employée sur les états de M.rs les Intendans & sur les Cartes, « donne de l'embarras. «

On a cherché à vaincre ces difficultés sur dix-sept Cartes « dont on a rassemblé les résultats. On a pris sur les états « envoyés par M.rs les Intendans en 1780, 1781 & 1782, « le relevé des naissances des villes, bourgs & villages compris « dans chacune de ces dix-sept Cartes, on en a composé une « année commune qu'on a multipliée par 26 pour fixer « le nombre des habitans de chaque lieu; à l'exception des « villes de Paris & de Versailles, où l'année commune des « naissances a été multipliée par 30, attendu le grand nombre « d'Étrangers qui y font leur résidence & qui y sont attirés. « On a distingué sur chaque Carte l'année commune des nais- « sances des villes d'avec celle des bourgs & des villages, & « au moyen de cette distinction, on a séparé les habitans des «

» villes d'avec ceux de la campagne, ce qui met à portée de » connoître la population de la campagne, qu'on peut regarder » comme la portion la plus précieuse, puisque la culture ne peut » être florissante que par le grand nombre des habitans de la » campagne.

» Pour remplir ces différens objets, on donne sur chaque » Carte, le résultat de la population qu'on estime exister sur » le terrein qui y est représenté; on a distingué dans des » colonnes séparées, le nombre des habitans des villes & celui » des campagnes, & on a fixé celui des habitans de la campagne » par lieues carrées de 2000 toises chacune. Ces différens » résultats font apercevoir la différence singulière qui se trouve » entre quelques-unes de ces Cartes, ce qu'on ne peut attribuer » qu'à la diversité du terrein, à l'existence ou au défaut de rivières » navigables, à la proximité ou à l'éloignement de la mer ou des » grandes villes, ainsi qu'au plus ou au moins de bois existant sur » ces Cartes, ce que leur inspection fait aisément apercevoir.

» En réunissant ces dix-sept Cartes, on trouve 70 villes, 5900 » bourgs ou villages, 3,621,710 habitans, dont 2,440,932 » résident à la campagne. Ces dix-sept Cartes représentent une » superficie de 3267 lieues carrées de 2000 toises, & les habitans de la campagne sont au nombre de 747 par lieue. »

Population de la Carte de la France, n.° 1.er

PARIS.

« CETTE Carte contient les villes de Paris, Versailles, » Saint-Germain, Meulan, Pontoise, Montfort, Poissy, » Saint-Denys, & 505 bourgs ou villages.

» Paris & Versailles ne doivent être considérés que comme » ne formant qu'une seule & même ville, par la raison qu'un » grand nombre de personnes les plus considérables de l'État, » & qui ont le plus de domestiques & de gens attachés à leur » service, ont des établissemens dans ces deux villes, & y » passent alternativement une grande partie de leur vie.

» Pour juger de la population de ces deux villes, il paroît » nécessaire d'y multiplier l'année commune des Naissances par » un nombre beaucoup plus fort que dans aucun autre endroit,

attendu les Colléges, les Séminaires, & tous les Établiſſemens « publics qui y attirent un grand nombre d'Étrangers, indé- « pendamment de la quantité prodigieuſe de domeſtiques des « deux ſexes qui y ſont leur réſidence, & qui ſont preſque tous « célibataires. On croit, par ces raiſons, que le nombre de 30 « employé pour la multiplication de l'année commune des naiſ- « ſances dans les villes de Paris & de Verſailles, eſt celui qui donne « le réſultat le plus vraiſemblable de la population de ces deux « villes; mais on ſurpaſſeroit de beaucoup le nombre d'habitans « exiſtant dans les autres villes, bourgs ou villages, ſi on em- « ployoit un autre multiplicateur que 26; c'eſt celui dont on a « fait uſage dans ce travail, & qui paroît être le plus propre à faire « connoître la différence de la population d'une Carte à une autre. «

Dans cette hypothèſe, l'année commune des naiſſances de « la ville de Paris étant de 19,769, & celle de Verſailles de 1,652, « on peut conjecturer que la population de Paris eſt de 593,070 « habitans, & celle de Verſailles de 49,560, ce qui forme un « total de 642,630 habitans. »

L'année commune des naiſſances de la ville de Paris, eſt de.	19,769.
Dans la ville de Verſailles. . . . . . de.	1,652.
Dans celle de Saint-Germain. . . . de.	410.
Dans celle de Meulan. . . . . de.	62.
Dans celle de Pontoiſe. . . . . de.	157.
Dans celle de Saint-Denys. . . . . . de.	181.
Dans celle de Montfort. . . . . de.	61.
Dans celle de Poiſſy. . . . . de.	88.
Dans les 505 bourgs *ou* villages de.	12,018.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	8.	505.	667,564.	312,468.	980,032.	1250.

LE HAVRE.

Population de la Carte de la France, n.° 60.

« CETTE Carte contient les villes du Havre, Fécamp, Montivilliers, & 256 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville du Havre, est de . . . 638.
Dans celle de Fécamp. . . . . .de. . . . . 216.
Dans celle de Montivilliers. . . . .de. . . . . 90.
Dans les 256 bourgs *ou* villages de. . . . . 4048.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
102.	3.	256.	24,544.	105,248.	129,792.	1031.
Cette Carte ne contient que 102 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.						

SAINT-MALO.

Population de la Carte de la France, n.° 127.

« CETTE Carte contient les villes de Saint-Malo, de Dol, de Grandville, & 135 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-Malo, est de. . . . . 631.
Dans celle de Dol. . . . . .de. . . . . 90.
Dans celle de Grandville. . . . . .de. . . . . 188.
Dans les 135 bourgs *ou* villages de. . . . . 3683.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
95.	3.	135.	23,634.	95,758.	119,392.	1008.
Cette Carte ne contient que 95 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.						

Population de la Carte de la France, n.° 93. BARFLEUR.

« CETTE Carte contient la petite ville de Barfleur, & 57 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Barfleur, eſt de........................ 48.

Dans les 57 bourgs *ou* villages de.............. 938.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
26.	1.	57.	1248.	24,336.	25,584.	936.
Cette Carte ne contient que 26 lieues cultivées, le reſte eſt couvert par la mer.						

Population de la Carte de la France, n.° 95. AVRANCHES.

« CETTE Carte contient les villes d'Avranches, Domfront, Mortain, Vire, & 394 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances de la ville d'Avranches, eſt de........................ 146.

Dans celle de Domfront.......de.............. 88.

Dans celle de Mortain.........de.............. 30.

Dans celle de Vire...........de.............. 247.

Dans les 394 bourgs *ou* villages de.............. 8976.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	394.	13,286.	233,376.	246,662.	933.

COÛTANCES.

Population de la Carte de la France, n.° 126.

« CETTE Carte contient les villes de Coûtances & de Saint-Sauveur-le-Vicomte, & 95 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Coûtances, est de . . . . 238.

Dans celle de Saint-Sauveur-le-Vicomte, de . . . . 78.

Dans les 95 bourgs *ou* villages, de . . . . 2107.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
66.	2.	95.	8216.	54,782.	62,998.	830.

Cette Carte ne contient que *66* lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

LYON.

Population de la Carte de la France, n.° 87.

« CETTE Carte contient les villes de Lyon, Montbrison, Trévoux, & 316 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lyon, est de . . . . 5335.

Dans celle de Montbrison . . . . . de . . . . 179.

Dans celle de Trévoux . . . . de . . . . 90.

Dans les 316 bourgs *ou* villages de . . . . 7722.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	316.	145,704.	200,772.	346,476.	803.

Population

Population de la Carte de la France, n.° 25. ROUEN.

« CETTE Carte contient les villes de Rouen, Elbeuf, Louviers, Gournay, Andely, Pont-de-l'Arche, Lihons, « Magny, Vernon, Gisors, & 528 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Rouen, est de	2556.
Dans celle d'Elbeuf ... de	219.
Dans celle de Louviers ... de	213.
Dans celle de Gournay ... de	67.
Dans celle d'Andely ... de	150.
Dans celle de Pont-de-l'Arche ... de	58.
Dans celle de Lihons ... de	49.
Dans celle de Magny ... de	68.
Dans celle de Vernon ... de	135.
Dans celle de Gisors ... de	92.
Dans les 528 bourgs *ou* villages de	7391.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	10.	528.	93,782.	192,166.	285,948.	768.

Population de la Carte de la France, n.° 24. DIEPPE.

« CETTE Carte contient les villes de Dieppe, Aumale, Neufchâtel, Saint-Valery-en-Caux, & 612 bourgs ou « villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Dieppe, eſt de.................................. 533.

Dans celle d'Aumale..........de................ 52.

Dans celle de Saint-Valery.....de................ 107.

Dans celle de Neufchâtel......de................ 66.

Dans les 612 bourgs *ou* villages, de................ 7085.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	4.	612.	19,708.	184,210.	203,918.	749.
Cette Carte ne contient que 246 lieues cultivées, le reſte eſt couvert par la mer.						

BAYEUX.

Population de la Carte de la France, n.° 94.

« CETTE Carte contient les villes de Bayeux, Caen, Carentan, Saint-Lô, & 462 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Bayeux, eſt de.................................. 317.

Dans celle de Caen...........de................ 1215.

Dans celle de Carentan........de................ 67.

Dans celle de Saint-Lô.........de................ 101.

Dans les 462 bourgs *ou* villages, de................ 6024.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
210.	4.	462.	44,200.	156,624.	200,824.	746.
Cette Carte ne contient que 210 lieues cultivées, le reſte eſt couvert par la mer.						

Population de la Carte de la France, n.° 125.

CHERBOURG.

« CETTE Carte contient les villes de Cherbourg, Valognes, & 84 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Cherbourg, eſt de. . . . . 230.
Dans celle de Valognes. . . . . de. . . . . 183.
Dans les 84 bourgs *ou* villages, de. . . . . 1752.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
62.	2.	84.	10,738.	45,552.	56,290.	734.
Cette Carte ne contient que 62 lieues cultivées, le reſte eſt couvert par la mer.						

Population de la Carte de la France, n.° 2.

BEAUVAIS.

« CETTE Carte contient les villes de Beauvais, Clermont, Compiegne, Pont-Sainte-Maixence, Senlis, & 450 bourgs « *ou* villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Beauvais, eſt de. . . . . 486.
Dans celle de Clermont. . . . . de. . . . . 115.
Dans celle de Compiegne. . . . . de. . . . . 205.
Dans celle de Pont-Sainte-Maixence, de. . . . . 112.
Dans celle de Senlis. . . . . de. . . . . 138.
Dans les 450 bourgs *ou* villages, . . de. . . . . 6547.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	450.	27,456.	170,222.	197,678.	681.

LISIEUX.

Population de la Carte de la France, n.° 61.

« CETTE Carte contient les villes de Lisieux, Honfleur, » Pont-Audemer, Pont-l'Évêque, Bernay, & 416 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lisieux, est de........................ 351.
Dans celle d'Honfleur.........de................ 184.
Dans celle de Pont-Audemer...de................ 119.
Dans celle de Pont-l'Évêque....de................ 48.
Dans celle de Bernay.........de................ 146.
Dans les 416 bourgs *ou* villages, de................ 5305.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
210.	5.	416.	22,048.	137,930.	159,978.	657.

Cette Carte ne contient que 210 lieues cultivées, le reste est couvert, tant par la mer que par l'embouchure de la Seine, prise depuis Quillebeuf.

ÉVREUX.

Population de la Carte de la France, n.° 26.

« CETTE Carte contient les villes d'Évreux, Dreux, Conches, Mantes, Verneuil, & 442 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Évreux, est de........................ 210.
Dans celle de Dreux..........de................ 167.
Dans celle de Conches........de................ 35.
Dans celle de Mantes.........de................ 97.
Dans celle de Verneuil.........de................ 123.
Dans les 442 bourgs *ou* villages, de................ 5448.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	442.	16,432.	141,648.	158,080.	566.

Population de la Carte de la France, n.° 62. SÉEZ.

« CETTE Carte contient les villes de Séez, Argentan, Falaise, Laigle, & 536 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de *Séez*, est de.................................. 149.
Dans celle d'Argentan..........de................. 147.
Dans celle de Falaise..........de................. 338.
Dans celle de Laigle..........de................. 162.
Dans les 536 bourgs *ou* villages, de................ 5104.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	536.	20,696.	132,704.	153,400.	530.

Population de la Carte de la France, n.° 7. ÉTAMPES.

« CETTE Carte contient les villes d'Étampes, Dourdan, Fontainebleau, Melun, Nemours, & 336 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Étampes, est de.................................. 261.
Dans celle de Dourdan..........de................. 88.
Dans celle de Fontainebleau....de................. 217.

Dans celle de Melun.......... de................ 205.
Dans celle de Nemours........ de................ 149.
Dans les 336 bourgs *ou* villages, de................ 5022.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	336.	23,920.	130,572.	154,492.	522.

CHARTRES.

Population de la Carte de la France, n.° 27.

« CETTE Carte contient les villes de Chartres, de Nogent-le-Rotrou, & 276 bourgs *ou* villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Chartres, eſt de.................................. 395.
Dans celle de Nogent......... de................ 282.
Dans les 276 bourgs *ou* villages, de................ 4714.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	276.	17,602.	122,564.	140,166.	490.



MÉMOIRE

Sur une méthode d'intégrer les Équations aux Différences ordinaires, lorſqu'elles ſont élevées, & dans les cas où leurs Intégrales complètes ſont algébriques.

Par M. MONGE.

LE ſeul procédé que l'on ait pour intégrer une équation aux différences ordinaires, conſiſte à chercher le facteur qui la rend différentielle exacte, & dans la recherche de ce facteur l'on n'eſt guidé par aucune méthode, il faut preſque toujours le deviner d'après la forme de l'équation différentielle, ou d'après le ſentiment qu'on peut avoir de la forme de l'intégrale : d'ailleurs, lorſque l'équation eſt élevée, il faut commencer par la réſoudre, parce qu'on ne peut la rendre différentielle exacte que lorſqu'elle eſt ſous la forme linéaire, & cette opération n'eſt pas toujours ſans difficulté. J'ai cru qu'une méthode directe & indépendante de la réſolution des équations, pourroit être de quelque utilité, quoiqu'elle ne puiſſe réuſſir complètement que dans les cas où l'intégrale finie eſt algébrique.

Soit

$$\left.\begin{array}{l} Ay^m + Bxy^{m-1} + Cx^2y^{m-2} \ldots \&c \\ \quad + A'y^{m-1} + B'xy^{m-2} \ldots \&c \\ \quad\quad + A''y^{m-2} \ldots \&c \end{array}\right\} = 0,$$

une équation algébrique dans laquelle les coéfficiens conſtans A, B, C, A' B', &c. ſoient pour un inſtant regardés comme indépendans les uns des autres. Si l'on différencie cette équation un nombre n de fois, on pourra éliminer n coéfficiens, & l'équation différentielle à laquelle on arrivera ſera

linéaire, au moins par rapport à la différentielle de l'ordre n, & il sera toujours facile, à l'aide des méthodes connues, de remonter par la voie des intégrations successives, de cette différentielle à l'intégrale finie, parce que chaque différentielle pourra toujours être mise sous la forme $\alpha d \zeta - \zeta d \alpha = 0$. Mais si les coéfficiens A, B, C, A^1, B^1, &c. ne sont pas indépendans, & que quelques-uns d'entr'eux soient des fonctions données des constantes primitives a, b, c, &c. alors si l'on différencie autant de fois qu'on a de quantités a, b, c, &c. & qu'on élimine ces constantes, on aura une équation différentielle qui sera généralement d'un degré élevé par rapport à la plus haute différentielle, & dont le degré dépendra de la manière dont les quantités a, b, c, &c. entrent dans la composition des coéfficiens A, B, C, &c. C'est cette équation qu'il s'agit d'intégrer.

Or, il est clair que si l'on différencie encore cette équation un nombre de fois assez grand pour qu'à l'aide des différentielles précédentes on puisse faire évanouir toutes les constantes, & qu'après l'élimination la différentielle de l'ordre supérieur soit linéaire, on aura précisément la même équation à laquelle on seroit parvenu, en différenciant l'intégrale finie de manière à faire évanouir tous les coéfficiens regardés comme indépendans; il sera donc facile de remonter de cette différentielle à l'intégrale finie : à la vérité cette intégrale contiendra plus de constantes arbitraires qu'il ne faudra pour satisfaire à la proposée; mais en substituant dans la proposée, pour y & ses différences, leurs valeurs prises dans l'intégrale finie, il faudra que cette équation soit satisfaite, ce qui établira entre les constantes des relations qui les réduiront au nombre convenable.

Je vais éclaircir cette méthode par quelques exemples.

I.

On sait qu'en faisant

$$d z = p d x + q d y,$$
$$d d z = r d x^2 + 2 s d x d y + t d y^2;$$

l'équation

l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, trouvée par M. le Chevalier de Borda, est

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

De plus, pour intégrer l'équation aux différences partielles

$$Lr + Ms + Nt = 0;$$

dans lesquelles les coéfficiens L, M, N, sont fonctions quelconques de x, y, z, & des différences premières de z, il faut poser les deux équations suivantes aux différences ordinaires

$$L\,dp^2 + M\,dp\,dq + N\,dq^2 = 0,$$
$$L\,dy^2 - M\,dx\,dy + N\,dx^2 = 0;$$

& si les intégrales de ces deux équations sont $V = a$, $U = b$, a & b étant des constantes arbitraires, celle de l'équation aux différences finies, est $a = \varphi b$, ou $V = \varphi U$.

D'après cela, l'intégration de l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, dépend donc en partie de celle-ci,

$$(1 + q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq^2 = 0.$$

Pour intégrer cette équation par la méthode que je viens d'indiquer, je la différencie, en regardant l'une des deux différentielles comme constante, & l'on obtient directement $ddp = 0$, dont l'intégrale finie est $p = \alpha q + \beta$, dans laquelle α & β sont des constantes arbitraires; mais comme il ne faut qu'une constante pour compléter l'intégrale de la proposée qui est du premier ordre, je substitue pour p & ses différences, leurs valeurs dans l'équation différentielle, qui pour être satisfaite exige que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0$; l'intégrale demandée est donc $p = \alpha q + \beta$, α & β étant tels que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0$.

II.

Posons qu'il soit question de trouver les équations des lignes de moindre & de plus grande courbure des surfaces du second degré.

L'équation générale de ces ſurfaces rapportées à leurs axes principaux eſt

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = D^3,$$

& j'ai fait voir dans un Mémoire que j'ai lû ſur les déblais & les remblais, que l'équation de la projection de la courbe demandée ſur le plan des x & y, eſt, en conſervant les abréviations de l'exemple précédent,

$$\frac{dy^2}{dx^2}[s(1+q^2)-pqt]+\frac{dy}{dx}[r(1+q^2) - t(1+p)] - s(1+p^2)+pqr = 0.$$

Si l'on ſubſtitue dans cette équation pour p, q, r, s & t, leurs valeurs priſes dans l'équation de la ſurface, on a l'équation du ſecond degré

$$AB(B-C)xy\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}[CD^3(B-A)+ABx^2(A-C) + ABy^2(C-B)] - ABxy(A-C) = 0,$$

qui eſt de la forme

$$axy\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}(b+x^2-ay^2)-xy = 0,$$

& qu'il s'agit d'intégrer; pour cela je la différencie en regardant dx comme conſtant, & les deux conſtantes a & b s'évanouiſſant à la fois, j'ai pour équation linéaire

$$xy\,ddy + dy(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

qu'il eſt facile de mettre ſous cette forme

$$\frac{x}{y}ddy - dy\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

& dont l'intégrale finie eſt $y^2 = \alpha x^2 + \mathcal{C}$, α & $\mathcal{C}$ étant les deux conſtantes arbitraires introduites par l'intégration.

Actuellement, si je mets dans la proposée pour y & dy leurs valeurs prises dans l'intégrale finie, je trouve que pour que l'équation résultante soit satisfaite, il faut que les constantes α & β aient entr'elles la relation exprimée par l'équation $\alpha b = \beta(\alpha a + 1)$; ainsi en éliminant β, l'intégrale demandée est $\alpha b = (y^2 - \alpha x^2)(\alpha a + 1)$, α étant la constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante, il faudra mettre dans l'intégrale pour x & y les valeurs de ces quantités, qui conviennent au point par lequel on veut que passe la courbe, & la constante α sera donnée par une équation du second degré. Si les deux racines de cette équation sont rationnelles, les deux lignes de moindre & de plus grande courbure seront distinctes & indépendantes, comme dans la sphère, dans le cône, & dans les surfaces de révolution; mais, lorsque la quantité sous le radical ne sera pas un quarré parfait, ces lignes seront les deux branches d'une même courbe élevée, & dont le point que l'on considère sera un point double; on voit donc qu'en suivant ce procédé on n'est pas dispensé de la résolution des équations que rien ne peut suppléer, mais qu'on n'a besoin de résoudre l'équation qu'après l'intégration, ce qui rend cette dernière opération beaucoup plus simple.

III.

DANS la méthode que je viens d'exposer, il n'est pas toujours nécessaire de différencier autant de fois qu'il y a encore de constantes dans l'équation; il suffit qu'on parvienne à l'ordre de différentielle qu'on auroit eu en faisant évanouir tous les coéfficiens de l'intégrale finie, dans lesquels entrent comme élémens les constantes qui ont déjà disparu.

Par exemple, soit proposée l'équation

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left[(x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4a^2x^2\right] + 8a^2xy\frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4a^2y^2 = 0;$$

ſi on la différentie, & qu'on élimine b, on trouve en faiſant, pour abréger, $dy = p\,dx$,

$$\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + dx = 0,$$

dont l'intégrale finie eſt $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2$, α & β étant deux conſtantes arbitraires; ſubſtituant enſuite dans la propoſée pour y & dy leurs valeurs priſes dans cette intégrale, on trouve que pour que l'équation réſultante ſoit ſatisfaite, il faut que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 - b^2$, c'eſt-à-dire que la courbe à laquelle appartient l'équation, eſt en général un cercle dont le centre eſt à une diſtance donnée de l'origine.

Ces exemples ſuffiſent pour éclaircir la méthode, qui dans les cas mêmes où l'équation n'a pas d'intégrale finie, peut être très-utile pour les premières intégrations.



MÉMOIRE

Sur l'intégration des Équations aux différences finies, qui ne sont pas linéaires.

Par M. MONGE.

DANS un Mémoire précédent, j'ai donné une méthode générale pour intégrer les équations aux différences ordinaires, qui ne sont pas linéaires, toutes les fois que leurs intégrales finies & complètes sont algébriques, ou qu'elles peuvent être exprimées par des logarithmes & des arcs de cercle. Cette méthode consiste en général à différencier la proposée un nombre de fois suffisant pour faire disparoître toutes les constantes qui restent dans l'équation, ou au moins pour qu'après avoir fait disparoître certaines constantes, l'équation résultante soit linéaire par rapport à la différentielle de l'ordre supérieur; on est alors toujours conduit à une équation facile à intégrer en quantités finies. Lû le 30 Nov. 1785.

Par exemple, soit proposé d'intégrer l'équation des tangentes au cercle

$$\frac{dy^2}{dx^2}(a^2 - x^2) + 2xy\frac{dy}{dx} + a^2 - y^2 = 0;$$

je la différencie, ce qui donne

$$(a^2 - x^2)\frac{dy}{dx}ddy + xyddy = 0,$$

équation qui a deux facteurs

$$ddy = 0$$

$$\& \ (a^2 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0;$$

le premier qui est délivré de la constante a, donne $\frac{dy}{dx} = A$ constante arbitraire, & substituant cette valeur dans la proposée,

on a pour intégrale complète

$$A^2(a^2 - x^2) + 2Axy + a^2 - y^2 = 0.$$

Ce premier facteur est le seul que l'on doive employer pour trouver l'intégrale complète, parce qu'il est le seul qui, contenant des différences secondes, puisse introduire une constante arbitraire dans la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qu'il faut substituer dans la proposée. L'autre facteur,

$$(a^2 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

donnant directement une valeur de $\frac{dy}{dx}$ sans constante arbitraire, ne peut produire, par la substitution de cette valeur, qu'une intégrale particulière ou un cas de l'intégrale complète. Dans le cas dont il s'agit, si l'on substitue la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que donne le second facteur, on a $x^2 + y^2 = a^2$, équation au cercle touché par toutes les droites auxquelles appartient la proposée, & qui est par conséquent son intégrale particulière.

La même méthode appliquée aux équations aux différences finies qui ne sont pas linéaires, donne des résultats analogues, avec des différences qui dépendent de la nature des choses : appliquons-là au cas le plus simple.

Soit proposé d'intégrer l'équation $(\Delta y)^2 = b^2$, b étant une constante absolue. En suivant les procédés ordinaires, on auroit $\Delta y = \pm b$, & en intégrant $y = \pm \frac{b}{a}x + A$, dans laquelle a est la différence finie de la variable principale x, & A est la constante arbitraire. Mais si l'on applique à l'équation $(\Delta y)^2 = b^2$ la méthode dont je viens de parler, il faut la différencier, ce qui donne

$$2\Delta y \Delta\Delta y + (\Delta\Delta y)^2 = 0,$$

équation qui a deux facteurs

$$\Delta\Delta y = 0$$

& $2\Delta y + \Delta\Delta y = 0$:

le premier donne, par une première intégration, $\Delta y = B$, & par une ſeconde $y = \frac{Bx}{a} + A$, dans laquelle déterminant B de manière que la propoſée ſoit ſatisfaite, on a $B = \pm b$, & par conſéquent

$$y = \pm \frac{bx}{a} + A$$

comme par les méthodes ordinaires.

Le premier facteur n'eſt pas le ſeul que l'on doive employer pour trouver l'intégrale complète. L'autre facteur $2\Delta y + \Delta\Delta y = 0$ étant du même ordre différentiel & d'une auſſi grande généralité que le premier, doit être employé de même; ſi donc on l'intègre une première fois, on a $2y + \Delta y = 2C$, & une ſeconde fois, on a $y = C + D(-1)^{\frac{x}{a}}$, C & D étant des conſtantes arbitraires : déterminant enſuite une de ces conſtantes de manière à ſatisfaire à la propoſée, on trouve $D = \pm \frac{b}{2}$, & l'intégrale dont il s'agit devient

$$y = C \pm \frac{b}{2}(-1)^{\frac{x}{a}}.$$

Cette équation ſatisfait comme la précédente à l'équation $(\Delta y)^2 = b^2$, ce qui eſt facile à vérifier; elle eſt auſſi générale, puiſqu'elle contient auſſi une conſtante arbitraire, & elle n'en eſt pas un cas particulier, puiſqu'il n'y a aucune valeur conſtante de C qui puiſſe rendre ces deux intégrales identiques; donc l'intégrale complète de la propoſée eſt le produit des quatre équations

$$y - A = + \frac{bx}{a},$$

$$y - A = - \frac{bx}{a},$$

$$y - A = + \frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}},$$

$$y - A = - \frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}}.$$

On voit donc 1.° que la méthode que j'avois proposée dans le Mémoire précédent, ſimplement comme utile pour l'intégration des équations aux différences ordinaires, devient néceſſaire pour celle des équations aux différences finies, puiſque ſans elle ou du moins ſans un procédé équivalent, on n'auroit pas les dernières ſolutions; 2.° que ces dernières ſolutions ne ſont autre choſe que ce que devient dans le cas des dfférences finies, l'intégrale particulière de l'équation analogue aux différences ordinaires.

Je terminerai ce Mémoire par l'application de cette méthode à l'intégration de l'équation du troiſième degré

$$(\Delta y)^3 = b^3.$$

Je la différencie, ce qui fait diſparoître la conſtante b, & donne

$$3(\Delta y)^2 \Delta\Delta y + 3 \Delta y (\Delta\Delta y)^2 + (\Delta\Delta y)^3 = 0,$$

équation qui a les deux facteurs

$$\Delta\Delta y = 0$$

& $3(\Delta y)^2 + 3 \Delta y \Delta\Delta y + (\Delta\Delta y)^2 = 0.$

Le premier facteur donne pour intégrale complète,

$$y = B \frac{x}{a} + A,$$

dans laquelle A & B ſont les conſtantes arbitraires introduites par les deux intégrations: déterminant enſuite B de manière que la propoſée ſoit ſatisfaite, on trouve $B^3 = b^3$, & cette intégrale devient

$$y = \frac{bx}{a} \sqrt[3]{(1)} + A,$$

qu'on auroit trouvée par les méthodes ordinaires.

L'autre

L'autre facteur n'étant pas lui-même linéaire, je le traite comme la proposée; & pour cela, après avoir fait, pour abréger $\frac{\Delta\Delta y}{\Delta y} = V$, ce qui le réduit à

$$3 + 3V + V^2 = 0,$$

je le différencie, ce qui donne

$$3\Delta V + 2V\Delta V + (\Delta V)^2 = 0;$$

équation qui est composée des deux facteurs

$$\Delta V = 0$$

$$\& \; 3 + 2V + \Delta V = 0,$$

le premier donne $V = C$ ou $\Delta\Delta y = C\Delta y$, & en intégrant encore deux fois

$$Cy + D = E(C + 1)^{\frac{x}{a}}:$$

déterminant ensuite deux des trois constantes arbitraires C, D, E, de manière que la proposée soit satisfaite, je trouve $E^3 = b^3$ & $C = \frac{-3 + \sqrt{(-3)}}{2}$; en sorte que la solution fournie par ce facteur, est

$$\frac{-3 + \sqrt{(-3)}}{2} y + D = b\sqrt[3]{(1)}\left[\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}\right]^{\frac{x}{a}},$$

qui renferme la constante arbitraire D, & n'est pas comprise dans la première. Enfin, le troisième facteur

$$3 + 2V + \Delta V = 0,$$

a pour première intégrale,

$$V + \tfrac{3}{2} = A(-1)^{\frac{x}{a}},$$

ou $$\frac{\Delta\Delta y + \Delta y}{\Delta y} = A(-1)^{\frac{x}{a}} - \tfrac{1}{2},$$

dont l'intégrale est

$$\Delta y = B\left[A(-1)^{\frac{x}{a}-1} - \frac{1}{2}^{\frac{x}{a}}\right],$$

en représentant par la parenthèse, comme M. Vandermonde, le produit de toutes les quantités qu'on obtiendroit en diminuant x dans ce qu'elle renferme, successivement de a, de 2 a, de 3 a, &c, & l'intégrale troisième, représentée par

$$y = \Sigma B\left[A(-1)^{\frac{x}{a}-1} - \frac{1}{2}^{\frac{x}{a}}\right],$$

contiendra trois constantes arbitraires; on en déterminera deux de manière à satisfaire à la proposée, & l'on aura une troisième solution générale de l'équation aux différences finies du troisième degré; & parce que chacune de ces trois solutions a trois racines distinctes, fournies par les racines cubiques de l'unité, il s'ensuit que l'intégrale complète de la proposée a neuf racines distinctes: il en sera de même pour les degrés plus élevés.



MÉMOIRE

Sur le Sel ammoniacal vitriolique, ou Sel secret de Glauber, & sur le Sel ammoniacal nitreux.

Par M. CORNETTE.

LES deux Sels qui feront le sujet de ce Mémoire, ont été très-peu examinés par les Chimistes: le sel ammociacal vitriolique paroît être le seul qui a jusqu'ici le plus fixé leur attention, aussi trouve-t-on çà & là quelques notices sur ce sel, dans plusieurs ouvrages de Chimie. Glauber & Pott sont ceux qui l'ont traité d'une manière plus particulière; le premier, sans cependant être l'auteur de ce sel, est celui qui a le mieux fait connoître cette combinaison; il le regardoit comme un vrai Protée, c'étoit, selon lui, un menstrue universel, & il croyoit, ainsi qu'il l'avance dans la septième partie de sa Pharmacopée spagirique, qu'en employant ce sel sur les métaux, on pouvoit les réduire à leur premier principe & à leur première matière; il appeloit la liqueur qu'il en retiroit, *eau mercurielle subtile*. Janvier 1776.

M. Pott, moins enthousiaste que Glauber, surpris des propriétés que ce Chimiste accordoit à ce sel, résolut de répéter ses expériences: il reconnut bientôt qu'il y avoit beaucoup à rabattre sur les effets si vantés de ce sel, puisque ses résultats se trouvèrent absolument contraires à ce que Glauber avoit avancé; ce qui lui donna lieu de faire sur cette matière une Dissertation assez étendue, qui se trouve dans le quatrième volume de ses Dissertations chimiques, traduction françoise, *page 265*.

Malgré l'attention & l'exactitude de M. Pott, à réduire ce sel à sa juste valeur, sa Dissertation ne paroît pas sans erreur; il eût dû, ce me semble, pour donner à ses expériences plus d'authenticité, s'assurer par lui-même de la

nature de ce ſel, au lieu de s'en rapporter, pour le fond, à la doctrine de Glauber, il eût vû, 1.° que le ſel ammoniacal vitriolique ſe décompoſe en partie & ſans intermède, expoſé au feu; 2.° Que le ſel que l'on forme par la décompoſition du ſel ammoniac avec l'acide vitrolique, ne doit point être regardé comme un vrai ſel ſecret de Glauber, mais plutôt comme un mélange de ſel ſecret & de ſel ammoniac non décompoſé. Cette difficulté qu'a l'acide vitriolique, de décompoſer le ſel ammoniac, vient à l'appui de ce que j'ai déjà avancé dans mon Mémoire ſur la décompoſition par l'acide marin, des ſels vitrioliques & nitreux à baſes d'alkalis fixes & volatils, & prouve de plus en plus l'exception qu'elle occaſionne à la Table d'affinités, puiſque l'acide marin décompoſe avec plus de facilité le ſel ammoniacal vitriolique, que l'acide vitriolique ne le fait pour le ſel ammoniac ordinaire.

Je ne parlerai pas de ce qu'ont écrit ſur ce ſel pluſieurs autres Chimiſtes, puiſqu'ils ſe ſont tous copiés les uns & les autres, & que ce qu'ils en diſent ne contient rien de particulier & ſe trouve en grande partie conforme à la Diſſertation de M. Pott.

Le ſel ammoniacal nitreux paroît n'avoir été examiné que très-ſuperficiellement par les Chimiſtes modernes; on ne connoît des propriétés de ce ſel, que ſa détonation & ſon inflammation, ſans addition de phlogiſtique dans les vaiſſeaux ouverts & fermés: la crainte & le peu d'utilité ont empêché qu'on ne pouſſât plus loin cet examen, & ont rallenti les connoiſſances que l'on auroit pu acquérir ſur ſa nature & ſes effets.

Cependant, comme le défaut de connoiſſance ſur les choſes les plus ſimples & même les moins utiles, s'oppoſe toujours aux progrès des Sciences phyſiques, j'ai cru, malgré l'écueil que j'avois à éviter, devoir chercher à connoître ce ſel; j'ai fait ſur cette matière pluſieurs expériences, avec toute la circonſpection qu'exigeoit la ſubſtance que j'allois ſoumettre à l'examen; je n'ai pas été long-temps à m'apercevoir que les craintes des Chimiſtes étoient peu fondées, je me ſuis convaincu, 1.° qu'en employant ce ſel très-pur, il ſe

ſublimoit plus facilement, & exigeoit beaucoup moins de chaleur que le ſel ammoniac ordinaire; 2.° que ſa détonation dans les vaiſſeaux fermés, n'étoit ni auſſi prompte, ni auſſi rapide qu'on l'a prétendu juſqu'ici, puiſque pour y parvenir d'une manière exacte, j'ai été obligé d'avoir recours à l'appareil que l'on emploie pour faire le cliſſus de nitre; on verra par la ſuite les phénomènes qui accompagnent cette détonation.

Comme ces deux ſels, dont je me ſuis propoſé de traiter, exigent que j'entre dans des détails aſſez étendus, j'ai cru, pour mettre plus d'ordre dans ce Mémoire, devoir le diviſer en deux parties; dans la première partie, je parlerai du ſel ammoniacal vitriolique, de ſa criſtalliſation, de ſa décompoſition dans les vaiſſeaux ouverts & fermés, de l'action de l'acide vitriolique ſur le ſel ammoniac: je paſſerai enſuite à l'action du ſel ammoniacal vitriolique ſur les métaux, ſur le nitre; & enfin, je terminerai cette première partie par l'examen de l'action de l'acide nitreux ſur le ſel ammoniacal vitriolique.

Dans la ſeconde partie, j'examinerai le ſel ammoniacal nitreux, ſa ſublimation, ſa détonation, & ſon inflammation dans les vaiſſeaux ouverts & fermés; je démontrerai que dans cette détonation l'alkali volatil eſt entièrement détruit, ſans que l'acide nitreux ſoit en aucune manière altéré; je parlerai de l'action du ſel ammoniac ordinaire, du ſel ammoniacal vitriolique, & de l'alkali volatil ſur le nitre. J'examinerai l'action du ſel ammoniacal nitreux ſur le charbon, de l'acide nitreux ſur le charbon, de divers mélanges de poudre à canon faite avec le ſel ammoniacal nitreux: & enfin, je terminerai cette ſeconde partie par prouver que l'on peut diſtiller facilement, & ſans crainte, le ſel ammoniac avec l'acide nitreux; je ferai voir que l'eau régale que l'on en retire peut ſe conſerver très-facilement, & qu'elle n'eſt pas auſſi expanſible que celle qui réſulte du ſimple mélange de l'acide nitreux & du ſel ammoniac.

PREMIÈRE PARTIE.

Sur le ſel ammoniacal vitriolique.

La diverſité de ſentiment qui règne parmi les Auteurs qui ont traité de la criſtalliſation de ce ſel, m'a engagé à en faire un examen ultérieur; les uns, tel que M. Pott, prétendent qu'il criſtalliſe en forme de plume; d'autres au contraire, tel que M. Brandt, diſent, ainſi qu'on peut le voir, *page 156*, dans le premier volume des Mémoires des Académies d'Upſal & de Stockolm, qu'il criſtalliſe en forme de feuillets minces placés ſans ordre; & le plus grand nombre des autres avancent qu'il criſtalliſe en aiguilles: pour éclaircir mes doutes, j'ai eu recours à l'expérience.

J'ai pris huit onces d'huile de vitriol concentrée, que j'ai affoiblie en y ajoutant une livre d'eau diſtillée; j'ai verſé ſur cet acide, à pluſieurs repriſes & juſqu'à parfaite ſaturation, une ſuffiſante quantité d'alkali volatil concret qui avoit été dégagé du ſel ammoniac par l'intermède de l'alkali fixe; j'ai fait évaporer la liqueur dans une capſule de verre au bain de ſable, juſqu'à légère pellicule; je retirai pour lors le vaiſſeau du feu, une portion du ſel grimpa, par le refroidiſſement, aux parois du verre, tandis qu'une autre portion forma des criſtaux réguliers au fond de la liqueur; j'examinai les criſtaux, je ne leur trouvai point les formes indiquées par les Chimiſtes que je viens de citer, je m'aperçus au contraire que chaque criſtal étoit un priſme à ſix pans comprimés, terminé par une pyramide hexaèdre obtuſe: ce ſel, comme l'on voit, ſe rapproche aſſez du tartre vitriolé, & il n'en diffère que parce que le priſme à ſix pans dans ce dernier n'eſt point comprimé, & que la pyramide hexaèdre eſt compoſée de ſix triangles. Je continuai l'évaporation de la liqueur, j'obtins toujours des criſtaux ſemblables à ceux que je viens de décrire; ce ſel en cet état étoit parfaitement neutre, & c'eſt celui que j'ai employé pour toutes mes expériences.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Je mis dans un creuſet un gros de ſel ammoniacal vitriolique en criſtaux, un inſtant après il pétilla comme le tartre vitriolé, & il commença à s'élever une vapeur blanche qui avoit une forte odeur d'alkali volatil; le creuſet étant un peu refroidi, tout le ſel ne put ſe diſſiper en vapeurs, la petite portion qui reſta étoit acide, & changéa ſur le champ en une couleur d'un rouge-foncé la teinture de Tourneſol; ayant répété l'expérience de nouveau, j'obſervai également que la première vapeur qui s'éleva étoit de l'alkali volatil, & que l'acide, comme plus peſant, ſe diſſipa enſuite.

Quelque peu concluante que paroiſſe cette première expérience, on peut cependant en inférer que le ſel ammoniacal vitriolique, expoſé à la violence du feu dans les vaiſſeaux ouverts, eſt ſuſceptible de ſe décompoſer, puiſque l'on diſtingue facilement les deux ſubſtances qui le conſtituent.

Ce même ſel expoſé dans un matras au bain de ſable, n'a pu ſe ſublimer en entier, quoique la chaleur que j'avois employée, eût été très-forte, & eût été continuée pendant plus de quatre heures; il ſe dégagea de même de l'alkali volatil, & la matière ſaline reſtée dans le matras, étoit très-acide, & rougiſſoit fortement la teinture de tourneſol.

L'expérience ſuivante va prouver encore, que ce ſel ſoumis à la violence du feu dans les vaiſſeaux fermés, y ſouffre la même altération que dans ceux où l'air a un libre accès.

J'ai mis dans une cornue de verre une demi-once de ſel ammoniacal vitriolique pulvériſé, je plaçai ſur un bain de ſable cette cornue, à laquelle j'adaptai un récipient; j'échauffai ces vaiſſeaux par degrés, il paſſa premièrement deux ou trois gouttes d'eau, qui étoient l'eau de la criſtalliſation de ce ſel; il ſuccéda enſuite à une chaleur un peu plus forte, de l'alkali volatil en liqueur, & ce ne fut que quelque temps après qu'il commença à s'élever quelques fleurs blanches je délutai le récipient pour en ſubſtituer un autre, & ayant

augmenté le feu au point de faire rougir la cornue, une bonne partie de ce sel se sublima : les dernières portions de ce sel sublimé étoient acides, & ne devoient leur acidité qu'à l'acide sulfureux volatil qui se dégagea à la fin de l'opération ; la matière qui restoit dans la cornue, ne formoit plus qu'une masse opaque très-acide, qui attiroit promptement l'humidité de l'air ; la petite quantité de liqueur qui étoit passée dans le ballon, avoit une très-forte odeur d'acide sulfureux volatil.

J'ai répété la même expérience avec le même sel préparé, soit avec l'alkali volatil dégagé par la chaux, soit avec celui dégagé par la craie, & j'en ai toujours obtenu les mêmes résultats.

Enfin, pour mettre le complément à toutes ces expériences, j'ai cru devoir m'assurer si le sel ammoniacal vitriolique sublimé, pouvoit se ressublimer de nouveau sans se décomposer : je mis pour cet effet deux gros de ce sel sublimé dans une cornue de verre, je procédai pour cette opération, ainsi que je viens de le décrire pour l'expérience précédente ; la décomposition eut également lieu, de ces deux gros de sel, un demi-gros seulement se sublima, il passa dans le récipient un demi-gros d'alkali volatil en liqueur, & le sel qui restoit au fond de la cornue, étoit d'une couleur grise, parsemé de taches noirâtres, il avoit une forte odeur d'acide sulfureux volatil.

On est donc en droit de conclure, d'après ces expériences, que la combinaison de l'acide vitriolique avec l'alkali volatil, n'est pas aussi intime que celle faite avec les autres acides, puisque ces deux substances se séparent par l'action du feu, dans les vaisseaux ouverts & fermés.

Je vais présentement examiner l'action de l'acide vitriolique sur le sel ammoniac, & faire voir que la décomposition de ce sel par cet acide, ne s'opère pas complètement, puisque l'on en retrouve toujours une certaine quantité qui n'a souffert aucune altération.

Décomposition

Décomposition du Sel ammoniac par l'Acide vitriolique.

Je mis dans une cornue de verre tubulée, une once de sel ammoniac en poudre, je plaçai sur un bain de sable, cette cornue à laquelle j'adaptai un récipient; ces vaisseaux étant ainsi disposés, j'ajoutai, à plusieurs reprises, par la tubulure, une once & demie d'esprit de vitriol, qui étoit à l'eau distillée, comme 12 est à 8: dans l'instant du mélange il se fit une effervescence, & il se dégagea beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin; mais ayant fermé la tubulure, le mouvement cessa, & la liqueur prit quelque temps après une couleur jaune-citrine; je laissai pendant deux heures ce mélange en digestion, afin que le sel ammoniac fût mieux pénétré par l'acide, ensuite je donnai un feu fort doux pour faire sortir les premières vapeurs, & je le conduisis de manière à faire rougir le fond du vaisseau: il s'excita sur la fin une effervescence assez vive, la liqueur étoit plus pesante, & formoit des stries en se réunissant au col de la cornue; cette effervescence eut lieu tant qu'il resta de l'humidité: il se sublima pour lors une petite quantité de sel, mais la plus grande partie étoit restée au fond du vaisseau, & formoit deux couches, l'une étoit fondue, & l'autre étoit sublimée à sa surface; la liqueur contenue dans le récipient, étoit claire, sans couleur, & avoit, à la couleur près, toutes les propriétés de l'acide marin, qui, quelque rectifié qu'il soit, est toujours coloré; cet acide a cela de particulier, qu'il ne se forme point au haut des flacons qui le contiennent, des taches grasses, comme cela arrive à l'acide marin ordinaire, & même le mieux rectifié.

M. Pott, à la *page 281* de sa Dissertation déjà citée, dit que si l'on combine cet acide avec de l'esprit-de-vin rectifié, on en obtient une espèce d'éther marin; j'ai répété cette expérience, mais sans aucun succès: la liqueur que j'en ai obtenue, avoit bien à la vérité une odeur éthérée, mais je me suis aperçu par l'odeur d'acide sulfureux volatil qui s'est échappée lorsque j'ai déluté les vaisseaux, que cette

odeur éthérée étoit plutôt le résultat de la combinaison de l'acide vitriolique avec l'esprit-de-vin, que de l'acide marin.

Je fis dissoudre séparément dans de l'eau distillée, les deux sels restés au fond de la cornue; la dissolution de celui qui s'étoit sublimé, se fit facilement & produisit assez de froid, l'autre eut plus de peine à se dissoudre: ces deux dissolutions filtrées étoient claires, sans couleur, la première étoit très-peu acide, mais la seconde l'étoit beaucoup; soumises toutes deux à l'évaporation, j'obtins de la première dissolution, du sel ammoniac tout pur; la seconde, quoique très-acide, me fournît un sel disposé par lames; chaque cristal de ce sel formoit autant de prismes triangulaires tronqués sur leurs côtés, il se trouvoit encore mêlé de sel ammoniac qui n'avoit souffert aucune altération.

Quoique la quantité d'acide vitriolique que j'avois employée pour cette opération, me parut suffisante pour décomposer cette dose de sel ammoniac, je craignis cependant que son affoiblissement avec l'eau distillée, ne portât obstacle à sa parfaite décomposition; je résolus de répéter cette expérience, mais avec de l'huile de vitriol concentré pur, & sans addition.

Dans le même appareil dont je viens de parler, je mis une once d'huile de vitriol concentré & autant de sel ammoniac; dans l'instant du mélange il se fit une effervescence considérable, & il se dégagea beaucoup de vapeurs blanches, la matière se raréfia au point qu'elle eût passé par le col de la cornue, si ce vaisseau n'eût été d'une capacité proportionnée à cette raréfaction; les vapeurs qui passoient dans le récipient, avoient beaucoup de peine à se condenser, & quoique le feu fût bien ménagé, j'étois obligé d'en faciliter de temps en temps l'issue en débouchant l'ouverture qui y étoit pratiquée: après six heures de feu, je délutai les vaisseaux, je versai la liqueur contenue dans le récipient, dans un flacon bouché de cristal, c'étoit de l'acide marin, clair, sans couleur, semblable à celui de l'opération précédente, il étoit très-fumant, mais combiné avec de l'esprit-de-vin rectifié, il ne m'a point fourni d'éther marin; la matière saline restée dans la cornue,

formoit deux couches, dont l'une fondue & l'autre ſublimée, ces deux ſels diſſous ſéparément, m'ont fourni deux gros de ſel ammoniac non décompoſé, & une pareille quantité de ce ſel brillant diſpoſé par lames, que j'ai déjà décrit: il m'eſt reſté un magma ſalin très-acide, qui contenoit encore un peu de ſel ammoniac non décompoſé.

Ces deux expériences démontrent, ainſi que je l'ai déjà fait remarquer, que l'acide vitriolique n'agit pas ſur le ſel ammoniac ordinaire, comme l'acide marin ſur le ſel ammoniacal ſecret, puiſque la décompoſition ne ſe fait que très-imparfaitement.

Model avoit déjà entrevu cette vérité, mais incertain de ſon opération, il n'a pu en tirer aucune conſéquence: voici ce qu'il dit au ſecond volume de ſes Récréations chimiques, traduction françoiſe, *page 236*. « J'ai verſé ſur quatre onces de notre ſel, dit cet habile Chimiſte (c'eſt du ſel ammoniac « dont il veut parler) une once d'huile de vitriol affoibli, & « cela dans la vue que cet acide n'y dominât point; je ſoumis « ce mélange à la diſtillation, la liqueur que j'obtins, fut un « acide marin pur; j'ai fait diſſoudre le réſidu dans de l'eau « diſtillée, puis filtrée & évaporée juſqu'à ſiccité, pour eſſayer « de le ſublimer, mais ce ne fut qu'à la plus grande violence « du feu qu'il ſe volatiliſa quelque choſe, encore étoit-ce « des fleurs, le reſtant ſe vitrifia & demeura au fond de la « cornue: je ne déciderai pas, continue-t-il, ſi ces fleurs étoient « du ſel ſecret de Glauber, ou du ſel ammoniac encore entier, « vu le peu d'acide que j'avois employé ». Model n'avoit pas pour but le même objet que moi, autrement il ſe ſeroit convaincu par une ſeconde expérience plus exacte, que la portion de ſel qui s'étoit ſublimée, étoit du ſel ammoniac qui avoit réſiſté à l'action de l'acide vitriolique.

Quoique cette expérience ne ſoit rien moins que concluante, j'ai cru cependant devoir la rapporter ici, puiſqu'elle vient à l'appui de ce que j'avance, & ſert à confirmer de plus en plus mon opinion.

Enfin, pour ne plus laiſſer aucun doute ſur ce ſujet, j'ai

cru devoir procéder différemment, & traiter le sel ammoniac par la voie de la dissolution.

Je fis dissoudre dans de l'eau distillée deux onces de sel ammoniac, je versai sur cette dissolution une once & demie d'acide vitriolique, la liqueur s'échauffa, mais beaucoup moins que si l'eau eût été seule, il n'y eut point d'effervescence, & il ne se dégagea que très-peu d'acide marin; je fis évaporer la liqueur dans une capsule de verre jusqu'à la concurrence des trois quarts de l'humidité, & l'ayant laissé refroidir, j'observai que la plus grande partie des cristaux de ce sel, quoique formés dans une liqueur très-acide, étoient tous disposés en forme de barbe de plume; j'examinai ces cristaux, & je vis avec plaisir que c'étoit de vrai sel ammoniac qui n'avoit souffert aucune altération; je soupçonnai dès-lors que si cette décomposition ne s'opéroit pas complètement, cela ne pouvoit dépendre, ainsi que je l'ai déjà démontré, que de ce que l'acide marin constituant du sel ammoniac, chassé de sa base par l'acide vitriolique, pouvoit se reporter sur le sel ammoniacal vitriolique déjà formé, & le redécomposer de nouveau; je laissai les cristaux dans la liqueur, afin que l'acide surabondant pût agir davantage sur ce sel non décomposé; je continuai l'évaporation, & entretins cette matière saline dans une sorte d'état de fusion pendant plus d'une heure: elle avoit pour lors une consistance huileuse, elle laissoit dégager beaucoup de vapeurs d'acide marin si on l'agitoit, mais si l'on interrompoit l'agitation, il ne s'en dégageoit plus aucune; cette matière saline, avant son entier refroidissement, se convertit en une masse ferme & solide, elle attiroit promptement l'humidité de l'air, & étoit extrêmement acide; cette matière redissoute de nouveau dans l'eau distillée, me fournit encore une très-grande quantité de sel ammoniac qui n'avoit pas été décomposé.

Toutes ces expériences prouvent donc que pour obtenir un sel secret de Glauber, pur & exempt de matières étrangères, il faut le préparer par la combinaison immédiate de l'acide vitriolique & de l'alkali volatil, & non point avec

le ſel ammoniac & l'acide vitriolique, autrement on s'expoſe à tomber dans l'erreur; c'eſt ce que l'on verra ci-après.

Comme les expériences de M. Pott ont été faites, en bonne partie, avec le ſel ammoniacal vitriolique ainſi obtenu par la décompoſition du ſel ammoniac, il doit s'enſuivre, par ce que je viens de dire, que le plus grand nombre des corollaires qu'il tire, ſont fondés, ſur le peu de connoiſſance qu'il avoit de ſon ſel; je ne citerai ſeulement qu'un exemple, on pourra conſulter pour le reſte, ſa Diſſertation, *page 310.* M. Pott dit, « j'ai mêlé de la *mine de biſmuth*, dont l'arſenic avoit été chaſſé, avec partie égale de « ſel ammoniacal ſecret, & en ai fait la diſtillation, alors, il « provient, continue-t-il, un peu d'eſprit urineux; j'ai diſſous « le reſte dans l'eau, & l'ayant filtré, cela a donné une ſolution « d'un rouge-pâle, laquelle, ſi l'on s'en ſert pour écrire, devient « verte à la chaleur, de manière qu'on ſe procure par cette voie « une encre de ſympathie ſans addition du ſel commun »: par cette expérience, on s'aperçoit que M. Pott ne ſoupçonnoit point qu'il reſtât dans ſon ſel, du ſel ammoniac non décompoſé, autrement il auroit vu que l'acide marin, un des principes conſtituans du ſel ammoniac, chaſſé de ſa baſe par la diſtillation, avoit porté ſon action ſur le cobalt contenu dans la mine de biſmuth, & avoit produit l'encre de ſympathie.

Sel ammoniacal vitriolique, ſur les Métaux.

Ce ſel n'a aucune action marquée ſur les métaux parfaits, mais il calcine les autres métaux; j'ai diſtillé ſéparément des mélanges de deux gros de ſel ammoniacal vitriolique pur, avec un gros de limaille de cuivre, de fer & de zinc, il s'eſt dégagé de chacun de ces mélanges beaucoup d'alkali volatil, & il s'eſt ſublimé une petite quantité de ſel ammoniacal ſecret, qui avoit une très-forte odeur d'acide ſulfureux volatil; les métaux reſtés dans les cornues, avoient tous perdus leur éclat métallique: je verſai de l'eau bouillante ſur chacun de ces réſidus, j'en obtins par l'évaporation différentes eſpèces de vitriols, ſelon les métaux que j'avois

employés; Glauber avoit déjà fait la même remarque, il dit dans sa Pharmacopée spagirique, que si l'on combine le sel secret avec l'étain, le cuivre & le fer, le métal est attaqué par l'acide, que le mercure de ces métaux devient libre par la distillation, & que l'alkali volatil l'enlève avec lui: cette décomposition de ce sel avec les métaux, est un obstacle pour qu'on puisse l'employer pour l'étamage.

Ce sel se décompose avec les terres calcaires, comme le sel ammoniac ordinaire; projeté sur du nitre en fusion, il l'enflamme & le fait détoner sur le champ: je donnerai la théorie de cette décomposition dans la seconde partie de ce Mémoire.

Avant de terminer cette première Partie, j'ai cru devoir examiner encore l'action de l'acide nitreux sur le sel ammoniacal vitriolique; je n'ai pu me dispenser de faire cette expérience, puisqu'étant parvenu à la décomposition par l'acide marin, des sels ammoniacaux vitrioliques & nitreux, & l'ayant déjà prouvée dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie, il étoit essentiel que j'examinasse si l'acide nitreux produiroit sur le sel ammoniacal vitriolique, le même effet que sur le tartre vitriolé.

Je mis dans un matras deux gros de sel ammoniacal vitriolique pur, sur lequel je versai quatre gros d'esprit de nitre très-pur, qui pesoit dix gros trente-six grains, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée; ce sel, par ce simple mélange, s'est dissous entièrement & à froid dans cet acide, il ne s'est excité ni chaleur ni aucun mouvement sensible, la dissolution étoit très-claire & sans couleur; je plaçai ce matras sur un bain de sable, & après avoir fait évaporer un peu de liqueur, je la laissai refroidir; je n'obtins par ce moyen aucuns cristaux, la liqueur au contraire attira l'humidité de l'air, & la dissolution avoit conservé toute sa diaphanéité; je soumis de nouveau cette liqueur saline à l'évaporation, & l'ayant fait dessécher jusqu à siccité, j'observai que par ce moyen le sel secret n'avoit pas

été décomposé, puisque ce sel n'avoit aucune des propriétés du sel ammoniacal nitreux.

Je crus ne devoir point m'en tenir à cette première expérience pour décider affirmativement sur cette opération, la voie de la distillation me parut plus propre & plus convenable ; je soumis pour cet effet un pareil mélange à la distillation dans une cornue de verre, il passa premièrement une bonne quantité de liqueur claire & limpide ; sur la fin de l'opération, ayant augmenté le feu, il s'excita dans la cornue une effervescence assez considérable qui en éclaboussa un peu les parois, il parut pour lors quelques vapeurs rutilantes, mais peu de temps après elles furent succédées par d'autres vapeurs très-blanches qui obscurcirent entièrement le récipient : l'opération étant finie, je délutai les vaisseaux, je versai la liqueur contenue dans le balon, dans un flacon bouché de cristal, c'étoit de l'acide nitreux, clair, sans couleur, qui n'avoit perdu aucune de ses propriétés, il tenoit un peu de sel en dissolution. La matière restée dans la cornue, étoit sous deux états, une très-petite partie s'étoit sublimée, & l'autre s'étoit fondue & occupoit le fond de ce vaisseau ; je détachai, avec assez de peine, le sel qui s'étoit sublimé au col de la cornue, & je reconnus bientôt par l'examen auquel je le soumis, que c'étoit du vrai sel ammoniacal nitreux, puisqu'il étoit, comme lui, susceptible de s'enflammer seul & sans aucune addition de phlogistique étranger : la matière au contraire restée au fond de la cornue, étoit très-acide & n'avoit point été décomposée ; je la fis dissoudre dans de l'eau distillée, & de quelque manière que je m'y sois pris, je n'ai jamais pu en obtenir aucuns cristaux de sel ammoniacal nitreux.

Quoique la décomposition de ce sel n'ait pas été aussi complète que celle du tartre vitriolé par le même acide, je conjecture cependant que son action peut être la même ; mais je pense que ce qui occasionne cette différence, ne peut dépendre que de la déliquescence du sel ammoniacal nitreux lui-même, puisqu'il peut arriver que la décomposition

étant faite, la petite quantité de liqueur qui reste, & qui tient le sel ammoniacal nitreux en dissolution, étant trop rapprochée, & par conséquent trop voisine de l'acide vitriolique cet acide reprenne ses droits, décompose le sel ammoniacal nitreux nouvellement formé, pour reproduire le même sel tel qu'il existoit auparavant.

Au reste, cette expérience considérée de toutes les manières, prouve toujours, ainsi que je l'ai déjà avancé, que l'acide marin a plus d'affinité avec les sels à bases d'alkalis volatils, que l'acide nitreux lui-même, puisqu'il les décompose avec plus de facilité.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR
LE SEL AMMONIACAL NITREUX.

Par M. CORNETTE.

SECONDE PARTIE.

LE Sel ammoniacal nitreux dont je me ſuis ſervi pour mes expériences, a été préparé avec de l'acide nitreux très-pur, précipité par l'argent, & diſtillé de nouveau; l'alkali volatil étoit auſſi très-pur, & avoit été dégagé du ſel ammoniac par l'intermède de l'alkali fixe; le ſel que j'ai obtenu de cette combinaiſon, étoit en criſtaux diſpoſés en longues aiguilles, & s'eſt trouvé parfaitement neutre. Janvier 1776.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

LE ſel ammoniacal nitreux expoſé dans un creuſet légèrement échauffé, ſe liquéfie facilement ſans ſe décompoſer, de ſorte qu'on peut le couler, à l'inſtar du ſel connu improprement ſous le nom de *criſtal minéral;* quelques inſtans après qu'il eſt fondu, il s'élève de la ſurface de ce ſel beaucoup de vapeurs blanches qui n'ont aucune odeur particulière d'acide nitreux & d'alkali volatil; j'ai raſſemblé dans un cône que je mis ſur le creuſet, quelques-unes de ces vapeurs, je reconnus bientôt par l'examen que je fis de cette matière ſublimée, que c'étoit du ſel ammoniacal nitreux qui n'avoit ſouffert aucune altération, il étoit reſté parfaitement neutre; le creuſet ayant été échauffé un peu plus, la portion de ſel qui reſtoit s'enflamma rapidement, mais ſans détoner ou ſans faire d'exploſion.

Cette première expérience me détermina à tenter la ſublimation de ce ſel; j'étois en partie raſſuré ſur les dangers que

j'avois à craindre, puiſque par l'expoſé que je viens de faire, je m'étois déjà aperçu que du terme de ſa ſublimation à celui de ſon inflammation, il ſe paſſoit un intervalle aſſez grand, & que pour parvenir à le ſublimer, il falloit ſeulement ſaiſir le degré de chaleur convenable: dans ces vues, je mis dans un petit matras à long col deux gros de ſel ammoniacal nitreux, je plaçai ce vaiſſeau ſur un bain de ſable, ce ſel ſe liquéfia à une très-douce chaleur, il s'éleva quelque temps après, beaucoup de vapeurs blanches, dont une partie ſe diſſipa en pure perte; & enfin ayant un peu augmenté le feu, ce ſel ſe ſublima en entier très-facilement, puiſqu'il ne fit monter le thermomètre à mercure, conſtruit ſur l'échelle de Réaumur, que de 90 degrés.

Enhardi par cette ſeconde expérience, je penſai que la ſublimation de ce ſel devoit ſe faire également bien dans les vaiſſeaux fermés, comme dans les vaiſſeaux ouverts: je mis pour cet effet dans une cornue de verre, deux gros de ſel ammoniacal nitreux, je plaçai ſur un bain de ſable cette cornue, à laquelle j'adaptai un récipient, j'expoſai cet appareil au milieu d'une cour, pour me mettre à l'abri du danger que je pouvois craindre; ce ſel, comme je l'ai déjà dit, ſe liquéfia facilement, il ſe répandit dans le récipient beaucoup de vapeurs blanches qui l'obſcurcirent pendant quelque temps, une partie du ſel fut emportée dans le ballon à la faveur de l'eau de criſtalliſation, & criſtalliſa aux parois; l'autre partie, par le défaut d'humidité, ſe ſublima au col de la cornue: la petite quantité de liqueur contenue dans le récipient, avoit une légère odeur d'acide nitreux, & tenoit du ſel ammoniacal nitreux en diſſolution. J'ai répété ces expériences pluſieurs fois, même en plus grande doſe, & elles ont toujours été ſuivies du même ſuccès.

On trouve dans la Chimie de *Rott, traduite par Clauſier*, le paſſage ſuivant: cet auteur dit, *page 147,* « que la combi-
» naiſon de l'acide nitreux avec un eſprit urineux, fuſe long-
» temps comme le nitre, & que ce ſel peut ſe ſublimer tota-
lement; » mais comme il n'entre dans aucun détail ſur les

moyens qu'il a employés pour y parvenir, on peut conjecturer qu'il en ſoupçonnoit ſeulement la poſſibilité.

Boërhaave, dans le ſecond volume de ſa Chimie, au *procédé 137*, expoſe en détail la méthode de préparer le ſel ammoniacal nitreux, en le déſignant par la dénomination de *nitre régénéré volatil ;* il détermine exactement la forme de ſes criſtaux, & après avoir dit que ce ſel eſt à demi-volatil, il ajoute qu'il faut une aſſez forte chaleur pour le ſublimer: ce dernier trait, quoiqu'un peu différent de ce que je viens de dire, indique que Boërhaave avoit réellement opéré lui-même cette ſublimation ſans qu'il fût arrivé de détonation, puiſque ce Chimiſte, en achevant de caractériſer ce ſel, affirme qu'il ne s'enflamme que comme le nitre ordinaire, c'eſt-à-dire, par le contact immédiat des matières inflammables; ce qui n'eſt pourtant pas tout-à-fait exact, puiſque l'on ſait à préſent, que ce ſel expoſé ſeul à une chaleur plus intenſe ſans doute que celle qui a été employée par Boërhaave, eſt capable de s'enflammer.

Parvenu à la ſublimation de ce ſel, je devois encore examiner ce qui ſe paſſoit pendant ſon inflammation; je ne m'attendois pas à trouver, du côté de ſa volatilité, un obſtacle ſi grand; j'eſſayai pluſieurs fois, mais en vain, de le faire enflammer dans une cornue, ce ſel ſe ſublima toujours long-temps avant qu'il eût pu recevoir aſſez de chaleur pour ſon inflammation: je pouſſai même cette expérience au point de tenir la cornue à la main ſur les charbons ardens, ſans pouvoir réuſſir; ce défaut de ſuccès me détermina à m'y prendre d'une autre manière.

Je fis rougir ſur les charbons ardens une cornue de grès tubulée, à laquelle j'avois adapté un très-grand récipient; je jetai, à différentes repriſes, par la tubulure, du ſel ammoniacal nitreux; je bouchai tout de ſuite après, l'ouverture de la cornue; ce ſel auſſitôt s'enflamma, il paſſa dans le récipient beaucoup de vapeurs rutilantes qui l'obſcurcirent pendant quelque temps: l'inflammation étant finie, je délutai les vaiſſeaux, & je ne vis pas ſans ſurpriſe, que la petite quantité

de liqueur contenue dans le ballon, étoit bien différente de celle que l'on retire du cliſſus de nitre; que l'inflammation de ce ſel n'avoit pas été ſuivie de la deſtruction totale de l'acide nitreux, mais plutôt de celle de l'alkali volatil qui ſe trouvoit anéanti & diſſipé en entier.

Je ſentis pour lors la néceſſité de répéter cette expérience d'une manière plus exacte, dans la vue d'obſerver ſi dans l'inflammation du ſel ammoniacal nitreux, l'acide nitreux étoit conſervé en entier, ou ſi la portion qui reſtoit, ne devoit ſon exiſtence qu'au peu de matière inflammable contenue dans l'alkali volatil, qui n'avoit pu ſuffire pour le détruire entièrement.

Je mis quatre onces d'acide nitreux très-pur, qui peſoit dix gros, dans une fiole qui contenoit juſte une once d'eau diſtillée, je les ſaturai avec deux onces d'alkali volatil concret dégagé du ſel ammoniac par l'alkali fixe; je fis évaporer la liqueur, & au lieu de faire criſtalliſer le ſel, je le fis deſſécher au bain de ſable, dans la même capſule de verre qui m'avoit ſervi pour ſon évaporation, il m'en reſta deux onces quatre gros trente-ſix grains; c'étoit donc à peu-près ſur cette quantité de ſel, une once vingt-trois grains d'acide, & douze gros d'alkali volatil.

Je pris une demi-once de ce ſel ammoniacal nitreux, que je mis par projection dans la même cornue de grès qui m'avoit déja ſervi, & à laquelle j'avois adapté un appareil de ballon enfilé, que j'avois peſé exactement: comme ce ſel étoit plus ſec, ſon inflammation fut plus vive & plus prompte, les vapeurs qui ſe répandirent dans ces vaiſſeaux, furent de même plus rutilantes, & eurent beaucoup de peine à ſe condenſer; je laiſſai raſſembler les vapeurs pendant vingt-quatre heures, & ayant repeſé de nouveau les vaiſſeaux, je les trouvai augmentés du poids d'un gros & demi, la liqueur qu'ils contenoient, étoit de très-bon acide nitreux citrin, qui m'a paru ne différer en aucune manière de l'acide nitreux ordinaire; il étoit plus fort & plus concentré que celui que j'avois employé, puiſque pour ſaturer un gros de cet acide,

il a fallu 48 grains d'alkali volatil concret, au lieu que le premier n'en exigeoit que la moitié de son poids.

Il se passe donc ici un phénomène bien singulier, & qui fait exception à tous les autres sels qui ont cet acide pour base: on sait que lorsque le nitre touche à un corps enflammé, son acide s'enflamme, se détruit; ici c'est le contraire qui se passe, cet acide touche à un corps enflammé, sa base se détruit, mais il se conserve lui-même sans souffrir aucune altération.

Cependant, pour prévenir toute objection, & pour mettre le complément à cette expérience, il étoit essentiel que j'en substituasse une autre qui mît encore dans un plus grand degré d'évidence l'inaltérabilité de l'acide nitreux.

Dans le même appareil que pour l'opération précédente, je mis, à plusieurs reprises, un mélange de trois gros de sel ammoniacal nitreux & d'un gros de charbon en poudre; cette matière s'enflamma plus promptement, la déflagration fut plus violente, une portion de la poudre de charbon fut emportée dans les vaisseaux, les vapeurs qui circuloient étoient très-rousses, & obscurcirent les récipiens pendant tout le temps que dura cette détonation: lorsque les vapeurs furent rassemblées, je délutai les vaisseaux, je reconnus par l'odeur qui s'éleva, que la liqueur qu'ils contenoient, étoit de l'acide nitreux, mais qui se trouvoit accidentellement mêlé avec un peu de charbon; quoique j'eusse pesé cet appareil auparavant, je ne pouvois plus me servir de ce poids pour constater la quantité d'acide que j'avois obtenue, son mélange avec le charbon s'y opposoit; je crus que le moyen le plus sûr & le plus exact, étoit de saturer cet acide avec de l'alkali fixe; je mis dans une capsule de verre, les liqueurs contenues dans les récipiens, j'y passai, à plusieurs reprises, de l'eau distillée, pour emporter l'acide qui pouvoit y être resté; je saturai ces liqueurs avec de l'alkali fixe concret, ce qui en exigea 48 grains, & l'ayant soumise à l'évaporation, j'en obtins un gros & demi de nitre prismatique. Le charbon qui étoit passé dans le récipient, ainsi que celui resté dans la cornue, n'étoient point altérés, il avoit

conſervé ſa couleur noire, & parut n'avoir perdu aucune de ſes propriétés.

J'ai varié cette expérience ; dans la vue d'obſerver ſi je ne pourrois pas parvenir à enflammer l'acide nitreux, j'ai fait rougir dans une cornue tubulée, de la poudre de charbon, ſur laquelle je verſai, à pluſieurs repriſes, du ſel ammoniacal nitreux; la déflagration ſe fit très-rapidement, une portion de la poudre de charbon fut de même emportée dans les vaiſſeaux, mais l'acide nitreux fut conſervé comme dans l'expérience précédente, & le charbon ne fut point altéré.

Toutes ces expériences ont été faites très-exactement, & répétées pluſieurs fois ſous les yeux de M. de Laſſone; mais on conçoit facilement que quelque exactitude qu'on apporte, il n'eſt pas poſſible de prévenir la perte d'une portion de l'acide nitreux, puiſqu'une partie de ces vapeurs, par l'inflammation ſubite de ce ſel, s'échappe par la tubulure de la cornue, & par celle pratiquée au récipient.

On peut conclure de ces deux dernières expériences, que ce n'eſt point le défaut de matière phlogiſtique dans le ſel ammoniacal nitreux, qui s'oppoſe à la deſtruction de l'acide nitreux, puiſque par l'addition d'un phlogiſtique étranger, l'acide nitreux a été également conſervé.

Il en réſulte encore deux vérités très-importantes, ignorées juſqu'ici, puiſque je crois que nul Chimiſte n'a dit avant moi, que l'acide nitreux combiné avec une baſe alkaline volatile, fût ſuſceptible de reſter intact après avoir ſouffert le degré de chaleur de l'incandeſcence; & que l'alkali volatil fût, dans ce cas, ſeul ſuſceptible de s'enflammer, & de ſe détruire par cette inflammation.

M. Baumé, dans le ſecond volume de ſa Chimie, à la *page 77*, à l'article *alkali volatil au feu*, propoſe ſes doutes à ce ſujet; voici ce qu'il dit: « comme l'alkali volatil contient » eſſentiellement une huile très-tenue & très-rectifiée, elle » eſt néceſſairement très-inflammable; cependant on ne ſait » (continue cet habile Chimiſte) ſi l'alkali volatil eſt inflam-

mable, & en ſuppoſant qu'il le ſoit, ſi ce ſel ſeroit détruit « pendant ſon inflammation ».

Il dit encore, *page 129*, même volume, à l'article *alkali volatil & nitre*, « qu'il ſeroit intéreſſant de ſavoir ſi par la projection de l'alkali volatil ſur du nitre en fuſion, l'alkali « volatil ſeroit détruit & brûlé ».

Les expériences dont je viens de rendre compte, me paroiſſent répondre en partie aux queſtions propoſées par M. Baumé, puiſqu'elles prouvent que l'alkali volatil s'enflamme, & ſe détruit entièrement par ſon inflammation: d'autres expériences que je vais rapporter, en fourniront encore de nouvelles preuves.

Quelques anciens Chimiſtes ont déjà parlé avant moi, de l'inflammation du nitre par le ſel ammoniac, mais apparemment ces expériences n'ont pas été connues des Chimiſtes modernes, puiſqu'on n'en trouve le détail dans aucun Ouvrage.

Stalh cependant rapporte dans ſon Traité des Sels, traduction françoiſe, *page 83*, que Baſile Valentin avoit déjà connoiſſance de l'action du ſel ammoniac ſur le nitre, & qu'il déſignoit la liqueur qu'il en retiroit, ſous le nom d'*aqua pugilum* ou *eau des champions:* Kunckel qui avoit travaillé ſur la même matière, penſoit que cette eau des champions ne différoit point de l'eau régale ordinaire; mais il paroît que Stalh n'étoit pas du même avis, puiſqu'il dit, *page 85*, que cette eau eſt différente de l'eau régale, vu que dans l'eau de Baſile Valentin, on ne peut trouver d'acide nitreux: par les remarques que fait Stalh dans ce chapitre, il paroît que c'eſt à l'onctuoſité de l'alkali volatil qu'il rapportoit l'inflammation du nitre par le ſel ammoniac, perſuadé cependant que l'acide nitreux étoit également décompoſé; mais comme il ne donne que des aperçus ſur cette opération, j'ai cru ne devoir point m'en tenir-là, & répéter moi-même l'expérience.

Boërhaave, dans ſa Chimie, *Traité des Menſtrues*, ne fait ſeulement qu'indiquer cette opération, ſans en dire davantage.

Je mis, à pluſieurs repriſes, dans une cornue de grès

tubulée, un mélange, en partie égale de sel ammoniac & de nitre; il ne se fit qu'une légère détonation, une petite portion seulement de nitre s'enflamma, & il ne passa que très-peu de vapeurs dans le récipient, quoique pourtant la cornue fût bien rouge; je débouchai l'ouverture de la cornue, je vis que le sel ammoniac s'étoit sublimé avant que le nitre eût pu recevoir le degré d'ignition convenable pour entrer en fusion.

Ce moyen me paroissant infructueux, je résolus de répéter cette expérience d'une autre manière: je plaçai une autre cornue de grès tubulée, au milieu des charbons ardens, dans laquelle j'avois mis deux onces de nitre: lorsque le sel fut en parfaite fusion & très-rouge, j'y ajoutai, à différentes reprises, du sel ammoniac en poudre; le sel aussitôt s'enflamma avec rapidité, il se répandit sur le champ dans le laboratoire, ainsi que dans les vaisseaux, une vapeur très-épaisse qui avoit une très-forte odeur d'eau régale; la flamme, par cette inflammation, est si prompte & si vive, que quelque habile que l'on soit pour boucher la tubulure, on ne peut éviter la perte de beaucoup de vapeurs: cette opération est très-délicate, & exige beaucoup de précaution de la part de ceux qui voudront la répéter: je continuai les projections du sel ammoniac pour enflammer tout le nitre, ce qui en exigea une once & demie; la détonation étant finie, je laissai refroidir les vaisseaux, & malgré la perte inévitable de beaucoup de vapeurs, j'obtins encore une demi-once de liqueur; je reconnus, par l'examen que j'en fis, que dans cette opération, l'acide nitreux n'avoit pas été totalement détruit, puisque cette liqueur étoit, ainsi que Kunckel l'avoit avancé, une véritable eau régale qui contenoit encore un peu de sel ammoniac qui avoit été enlevé par la violence de la détonation, puisque l'or dissous dans cette eau régale, est fulminant, quoique précipité par l'alkali fixe.

Je fis dissoudre dans de l'eau distillée, le résidu resté dans la cornue, la dissolution filtrée m'a fourni par l'évaporation, des cristaux de sel fébrifuge de Sylvius, ainsi que l'avoit déjà

déjà remarqué Stalh, parmi lesquels il se trouvoit encore un peu de nitre, mais l'alkali volatil fut détruit entièrement.

Le sel ammoniacal vitriolique, traité de même dans une cornue tubulée, enflamma aussi vivement le nitre que le sel ammoniac, l'alkali volatil fut détruit en entier, & l'acide nitreux fut en grande partie conservé.

Le sel ammoniacal acéteux sublimé, préparé avec le vinaigre radical, selon la méthode qu'en a donnée M. de Lassone, & projeté sur du nitre en fusion, l'enflamma également; mais dans cette expérience, l'acide nitreux, le vinaigre radical & l'alkali volatil sont détruits, la liqueur qui passe dans le récipient est alkaline, ainsi que celle du clissus de nitre, puisqu'elle verdit sur le champ le sirop de violette.

Toutes ces expériences prouvent donc que l'alkali volatil joue le principal rôle dans la détonation de tous ces sels, puisque dans tous les cas dont je viens de parler, ce sel s'est enflammé, & a été détruit complétement par son inflammation.

Cependant, pour que l'alkali volatil puisse enflammer le nitre, il est essentiel qu'il soit combiné avec un acide quelconque, ainsi que je viens de le faire voir, autrement, s'il est seul, son action n'est pas la même, & on ne peut parvenir à l'enflammer; j'ai tenté plusieurs fois cette expérience sans avoir jamais pu y réussir; j'ai jeté, à plusieurs reprises, de l'alkali volatil concret sur du nitre fondu & rouge, il n'y a point eu de détonation, aucune espèce de flamme, le nitre est resté en pleine fusion, & l'alkali volatil s'est dissipé en entier: j'ai varié cette expérience de plusieurs manières, j'ai fait des mélanges de parties égales de nitre & d'alkali volatil concret, que je mettois par projection dans un creuset très-rouge, même résultat; l'alkali volatil, comme plus volatil, se dissipoit, & le nitre restoit fondu & tranquille au fond du creuset; j'ai répété la même expérience dans une cornue tubulée, sans avoir pu obtenir aucune espèce d'inflammation.

Deux causes m'ont paru propres à expliquer cette différence de l'alkali volatil sur le nitre comparé aux sels ammoniacaux,

ſa volatilité & la grande quantité d'eau qu'il contient, ſont, à ce que je penſe, les principaux obſtacles qui s'oppoſent à ſon inflammation : en effet, lorſqu'on verſe ſur du nitre en fuſion de l'alkali volatil concret, ce ſel, par ſa trop grande volatilité, n'étant pas ſuſceptible de ſupporter le degré de chaleur qui eſt néceſſaire pour mettre le nitre en fuſion, ſe diſſipe ſans pouvoir former aucune combinaiſon, le phlogiſtique qu'il contient n'étant pas aſſez à découvert, & ſe trouvant trop embarraſſé dans l'eau, principe de ce ſel, ne peut point agir ſur le nitre; au lieu que ſi ce même alkali volatil eſt combiné avec un acide quelconque, le compoſé qui en réſulte, a une fixité plus grande, & eſt en état de ſoutenir un degré de chaleur plus fort qu'il ne le faiſoit auparavant; ce ſel contient d'ailleurs beaucoup moins d'eau, le phlogiſtique y eſt plus à découvert; de-là, ce me ſemble, peut réſulter la détonation du nitre.

Après avoir ſolidement établi & prouvé l'inflammabilité & la deſtructibilité totale de l'alkali volatil, je devois chercher à connoître en quel état le phlogiſtique étoit dans ce ſel, ſavoir s'il y étoit dans l'état huileux ou dans l'état de ſiccité; je me perſuadai qu'en préſentant à l'acide nitreux une matière qui contienne du phlogiſtique dans l'état de ſiccité, je pourrois peut-être parvenir à découvrir quelques vérités.

Je mis dans une cornue de verre 4 gros de charbon en poudre, ſur lequel je verſai 4 onces de bon acide nitreux citrin, peſant 11 gros 24 grains, dans une bouteille qui contenoit juſte une once d'eau diſtillée; le mélange ſe fit ſans chaleur apparente, il ne s'excita aucun mouvement ſenſible : j'adaptai à cette cornue un ballon qui pouvoit contenir environ 20 pintes, & pour plus grande ſûreté, je mis cet appareil dans une cour, je laiſſai ce mélange en digeſtion pendant douze heures, pour que le charbon fût mieux pénétré par l'acide : ce dernier, pendant cet eſpace de temps, parut avoir agi ſur le charbon, & avoit pris beaucoup de couleur, je ſoumis enſuite ce mélange à la diſtillation, le premier degré de chaleur ne fit dégager que quelques vapeurs; mais ayant

un peu augmenté le feu, le ballon ſe remplit de vapeurs rouges, & reſta ainſi obſcurci preſque pendant tout le temps que dura cette opération; le feu fut ſur la fin aſſez fort pour faire rougir le fond de la cornue : l'acide nitreux, retiré par ce procédé, avoit perdu cette couleur dont il s'étoit chargé par la digeſtion, & il ne différoit point de ce qu'il étoit auparavant.

Je recohobai, à quatre repriſes, de nouvel acide nitreux ſur le charbon reſté dans la cornue, les réſultats furent les mêmes, & le charbon, après ces quatre diſtillations réitérées, n'avoit pas diminué d'un ſeul grain de ſon poids; il avoit conſervé ſa couleur noire & brillante, & toutes ſes propriétés.

Le peu de ſuccès de cette expérience pour l'objet que je m'étois d'abord propoſé, paroît pourtant indiquer que l'acide nitreux ne reçoit pas du phlogiſtique du charbon une altération ſemblable à celle qu'en reçoit l'acide vitriolique, puiſqu'il reſte en même état où il étoit auparavant.

On peut encore préſumer que le défaut d'inflammabilité de la part de l'acide nitreux ſur le phlogiſtique du charbon, annonce que le phlogiſtique dans l'alkali volatil, y eſt, ainſi que l'ont déjà penſé avant moi pluſieurs habiles Chimiſtes, plutôt dans l'état huileux que dans l'état de ſiccité, je ſuis d'autant plus fondé à le croire, que dans nombre d'occaſions, l'alkali volatil ſe démontre par ſon latus huileux, ainſi qu'on peut s'en aſſurer par l'odeur d'empyreume qu'il communique à l'eau lorſqu'il a été long-temps expoſé à l'air, & enfin par ſon inflammabilité lorſqu'il eſt combiné avec l'acide nitreux, puiſque ce même acide ſeul ne s'enflamme point quand il eſt en contact avec le phlogiſtique pur dans l'état de ſiccité.

Cette différence du ſel ammoniacal nitreux, comparée au nitre ordinaire, exigeoit encore de ma part un nouvel examen, il s'agiſſoit de m'aſſurer ſi la poudre à canon préparée avec ce ſel, au lieu de nitre à baſe d'alkali fixe, produiroit des effets différens de la poudre ordinaire : j'ai fait pluſieurs mélanges, le premier étoit dans les mêmes proportions que pour la compoſition de la poudre ordinaire; ſavoir, de huit

parties de nitre ammoniacal, de deux parties de ſoufre & d'une partie de charbon en poudre; dans le ſecond mélange, je diminuai la doſe du ſoufre & du charbon; dans le troiſième, je ſupprimai le ſoufre; dans le quatrième, je n'y ajoutai que du ſoufre ſans charbon, tous ces mélanges ont été battus dans un mortier de fer avec un pilon de bois pendant ſept heures conſécutives, il n'a pas été néceſſaire de les arroſer avec de l'eau, comme cela ſe pratique pour la poudre ordinaire, la déliqueſcence de ce ſel a ſuffi pour les humecter aſſez ſans que l'on eût aucun riſque à courir. Après le temps convenable de trituration, j'expoſai ces mélanges au Soleil pour les faire ſécher, je les renfermai enſuite dans des bouteilles bien bouchées, afin de les maintenir en bon état, parce que ces poudres attiroient promptement l'humidité de l'air, & que pour lors elles n'auroient plus été propres aux expériences auxquelles je voulois les ſoumettre.

Par la différence déjà établie entre la détonation du nitre & celle du ſel ammoniacal nitreux, je ſoupçonnois que ces poudres produiroient très-peu d'effet; l'examen que j'en fis me le confirma encore davantage. Ces deux premiers eſſais ne ſont pas ſuſceptibles de cette détonation prompte & rapide qui caractériſe la vraie poudre à canon, il faut même, pour que cette poudre puiſſe s'enflammer, qu'elle touche à un corps enflammé, autrement la flamme ne ſe communique point, & il n'y a que la partie qui y touche qui en ſoit ſuſceptible; ces poudres ſont, comme l'on voit, ſans force & ſans vertu: le troiſième & le quatrième mélange, dans leſquels j'avois retranché à l'un le ſoufre & à l'autre le charbon, furent de même ſans effet, celui préparé avec le charbon s'enflamma plus promptement que ce dernier dans lequel il n'y avoit que du ſoufre, mais il n'y eut point de détonation; j'eſſayai de ſublimer le dernier mélange, la ſublimation ſe fit facilement, le ſel ammoniacal nitreux s'étoit confondu avec le ſoufre; j'en expoſai une partie ſur les charbons ardens, linflammation de ces deux ſubſtances ſe fit ſucceſſivement, d'abord le ſel ammoniacal nitreux & enſuite le ſoufre.

Toutes ces expériences ſemblent appuyer de plus en plus l'opinion de Stalh ſur la détonation de la poudre à canon; il eſt probable que ſi ces poudres ſont ſans effet, cela dépend de ce qui ſe paſſe pendant leur inflammation : ici il n'y a que l'alkali volatil qui s'enflamme, l'acide nitreux étant conſervé, l'eau qui entre dans ſa mixtion intrinſèque ne peut, ſelon toute apparence, ſe dilater aſſez pour occaſionner une explosion auſſi violente que celle qui a lieu dans la poudre à canon ordinaire.

J'ai eſſayé de faire de la poudre fulminante avec le ſel ammoniacal nitreux, dans les mêmes proportions que pour la poudre fulminante ordinaire, le ſeul changement que j'y ai fait, c'eſt qu'au lieu d'alkali fixe, j'y ai ajouté de l'alkali volatil concret; une partie de ce mélange expoſé dans une cuiller de fer à un feu très-doux, mais cependant capable de faire fondre ces matières, n'occaſionna aucune détonation: l'alkali volatil commença à ſe diſſiper, enſuite le ſel ammoniacal nitreux qui s'enflamma en partie, & lorſque la chaleur fut un peu plus forte, le ſoufre brûla fort tranquillement, ſans qu'il ait paru avoir ſubi aucune altération.

La poudre de fuſion préparée avec ce ſel, ne produiſit aucun effet, la flamme ne ſe communiqua point, & il n'y eut que la portion qui toucha au charbon ardent qui put s'enflammer.

Après l'expoſé que je viens de faire des propriétés du ſel ammoniacal nitreux, j'ai cru, pour compléter ce travail, pouvoir examiner ſans crainte l'action de l'acide nitreux par la diſtillation ſur le ſel ammoniac. Tous les Chimiſtes ſavent que l'eau régale qu'on obtient par le ſimple mélange de cet acide avec ce ſel, eſt plus expanſible que celle qui eſt formée par l'union des acides nitreux & marin, pluſieurs même conſeillent de ne la préparer qu'au beſoin, attendu qu'elle eſt toujours en effervescence dans les flacons, qu'elle ſe dilate à la moindre chaleur, & qu'elle fait ſauter le bouchon s'il n'eſt bien aſſujetti avec une peau. Je me propoſe de faire voir que l'expanſibilité de cette eau régale, n'eſt occaſionnée que par

l'air qui se sépare par l'action réciproque de ces différentes substances.

J'ai mis dans une cornue de verre qui pouvoit contenir environ deux livres d'eau, une once de sel ammoniac en poudre, exempt de matière fuligineuse, j'ai versé sur ce sel 4 onces d'acide nitreux très-pur, précipité par l'argent & ensuite redistillé : dans l'instant du mélange il ne s'est excité aucune effervescence, & il ne s'est point dégagé de vapeurs, le froid qui s'est passé n'a pu faire descendre le thermomètre que de 3 degrés, la température étant à 8 au-dessus de la glace; après une demi-heure de digestion, l'acide nitreux qui étoit clair & sans couleur, prit, en dissolvant le sel ammoniac, une couleur jaune très-foncée: je plaçai cette cornue sur un bain de sable sans l'entourer, & à l'aide d'une chaleur douce, il commença à s'élever à la surface de la liqueur, quelques bulles d'air qui augmentèrent en proportion de ce que la chaleur étoit plus forte, un instant après il se fit une vive effervescence, & il se dégagea par la tubulure pratiquée au récipient, beaucoup d'air très-élastique. Ce moment est important à saisir, & c'est celui qui exige le plus d'attention de la part de l'Artiste; s'il arrivoit cependant que l'effervescence fût trop considérable, on pourroit sans crainte soulever la cornue & la poser hors du fourneau pour attendre qu'elle soit passée ; en prenant toutes ces précautions, on pourra éviter beaucoup de perte. Comme la liqueur distille assez facilement, il n'est pas nécessaire, pour l'amener à l'état de siccité, de pousser beaucoup le feu : si cette opération a été bien ménagée & conduite avec attention, on peut retirer de ce mélange 4 onces 5 gros d'une eau régale très-claire & d'une couleur légèrement citrine : il ne m'est resté dans la cornue que 5 grains de matière terreuse, couleur d'ocre, tout le sel ammoniacal nitreux qui s'étoit formé, résultant de la décomposition du sel ammoniac, étoit passé dans le récipient avec la liqueur, & se trouvoit mêlé & confondu avec l'eau régale.

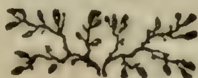
J'ai versé sur la matière terreuse restée dans la cornue, une petite quantité d'acide marin très-pur, elle s'y est très-bien

dissoute, & cette dissolution versée sur la liqueur saturée de la matière colorante du bleu de Prusse, a été précipitée sur le champ en bleu, ce qui prouve que c'est du fer.

J'ai répété cette expérience avec du sel ammoniac d'Égypte, & de l'acide nitreux ordinaire, les résultats ont été les mêmes le sel ammoniacal nitreux a également passé dans la liqueur, & l'eau régale que j'ai obtenue par ce procédé, ne différoit point de celle qui est décrite dans l'expérience précédente.

Cette eau régale ainsi obtenue par la distillation, est donc semblable, quant au fond, à celle préparée par le simple mélange; elle m'a paru en différer cependant à quelques petits égards, dépendant comme je l'ai dit du dégagement de l'air qui s'est fait pendant cette opération; en effet, son odeur est moins vive, & moins pénétrante, elle peut se conserver très-facilement & sans crainte; il y en a depuis plus d'un an dans le Laboratoire de M. de Lassone, un flacon qui a été exposé aux vicissitudes du chaud & du froid; le bouchon n'a point été assujetti avec une peau, comme on le pratique ordinairement, & cependant il n'a jamais été soulevé par cette liqueur, comme je l'ai vu arriver plusieurs fois, même à de l'eau régale ordinaire faite par le simple mélange d'acide nitreux & d'acide marin.

On peut comparer cette eau régale ainsi distillée, à l'éther nitreux préparé de la même manière; celui qui est fait par le simple mélange de l'esprit-de-vin & de l'acide nitreux, est si mobile & si expansible, que pour pouvoir le contenir dans un flacon, il faut que ce vase soit à demi-plein, le bouchon bien assujetti, & le conserver dans un endroit frais; au lieu que s'il a été préparé par la distillation, la quantité d'air qui s'est dégagée le rend beaucoup moins expansible.



MÉMOIRE
SUR LA
FRACTURE EN TRAVERS DE LA ROTULE.

Par M. SABATIER.

LA fracture en travers de la rotule, si différente par sa cause, de celles qui arrivent aux autres os, puisqu'elle est, pour le plus souvent, la suite de la contraction subite & violente des muscles extenseurs de la jambe, l'est encore par l'action que les mêmes muscles continuent d'exercer sur elle: en effet, au lieu de rapprocher les pièces rompues, & de les faire chevaucher l'une sur l'autre, comme il arrive ailleurs, cette action tend à les éloigner, & plus elle est forte, plus ces pièces s'écartent. Les vues des Praticiens, dans le traitement de la maladie dont il s'agit, ont dû être par conséquent de ramener les deux portions d'os à leur situation naturelle, & sur-tout la supérieure, dont le déplacement est toujours plus grand que celui de l'inférieure, & de les maintenir dans un état qui favorisât leur aglutination: mais les moyens qu'ils ont employés pour remplir cette seconde indication, y sont-ils aussi propres qu'on se l'est persuadé? Les bandages, quels qu'ils soient, sont un foible obstacle au raccourcissement des muscles. Pour s'en assurer, il suffit de prendre garde à ce qui arrive aux fractures de la rotule, lors même qu'elles sont traitées de la manière que l'on croit la plus méthodique. J'en ai vu un grand nombre qui l'avoient été, soit à l'Armée, soit dans les Hôpitaux du Roi, & j'ai toujours trouvé entre les pièces fracturées, un écartement plus ou moins grand, qui prouvoit que les muscles les avoient tirées en sens contraire, malgré ce que l'on avoit fait pour s'y opposer. Je n'ignore pas que pour l'ordinaire, l'écartement dont je parle est un accident consécutif, qui, semblable au raccourcissement qu'on voit

survenir

ſurvenir aux fractures de la jambe & de la cuiſſe, arrive après la guériſon apparente & par la même cauſe, c'eſt-à dire, par le peu de ſolidité du cal, ou pour parler plus exactement, par l'inſuffiſance des moyens dont la Nature ſe ſert pour les conſolider; mais je l'ai vu ſe faire pendant le traitement. Pour le prévenir dans la méthode uſitée, il faudroit que la compreſſion que l'on exerce au moyen des bandages, l'emportât ſur l'action des muſcles, ce qui pourroit avoir de fâcheux inconvéniens. On a ſouvent été dans la néceſſité de relâcher l'appareil appliqué à des fractures ſimples, parce qu'il s'étoit fait au-deſſus & au-deſſous un gonflement douloureux, & qui eût menacé de gangrène, ſi on lui eût donné le temps de faire des progrès. Cela arrive aux fractures de la rotule comme aux autres : je ne l'ai jamais éprouvé d'une manière plus remarquable, que ſur un Soldat que j'ai autrefois traité de cette maladie. La tuméfaction du genou fut ſi grande, qu'il ne me fut pas poſſible de ſubſtituer un autre bandage à celui que je venois d'ôter, & que je fus réduit à tenir la jambe & le pied élevés. J'eſpérois que les ſaignées, les fomentations émollientes dont j'uſai d'abord & que je rendis enſuite réſolutives, & le régime, diſſiperoient bientôt cet accident, & me procureroient la facilité de revenir à mes premiers moyens; je me trompai : le gonflement ſubſiſta au-delà du temps où les fractures de cette eſpèce ont coutume de ſe guérir; mais les craintes que m'inſpiroit l'abandon dans lequel j'étois contraint de laiſſer le malade, ne durèrent pas long-temps. Je m'aperçus de bonne heure que les pièces de la rotule qui avoient été rapprochées autant qu'elles avoient pu l'être, ne ſe déplaçoient pas, & je penſai qu'elles ne devoient pas éprouver plus d'obſtacle à leur aglutination que dans toute autre circonſtance; en effet, elles ſe collèrent avec aſſez d'exactitude, & le malade ayant commencé à marcher au bout de trois mois & demi à quatre mois, il ne ſe fit qu'un écartement très-médiocre, & le genou reprit peu-à-peu ſa mobilité ordinaire.

La réuſſite que je venois d'obtenir étoit aſſez remarquable

pour m'obliger d'en rechercher la cauſe. Je ne tardai pas à concevoir que le malade ayant obſervé le repos le plus exact, & la partie ayant été maintenue dans une bonne ſituation, il n'y avoit eu aucune raiſon pour que les parties de la rotule s'écartaſſent de nouveau. Effectivement, elles n'ont de tendance à s'éloigner, & ne le ſont réellement, qu'autant que le genou eſt entraîné dans la flexion, ou que les muſcles qui occupent la partie antérieure de la cuiſſe, viennent à ſe contracter: cela eſt ſi vrai, que l'intervalle qui les ſépare eſt médiocre en ceux qui ne tombent pas après leur accident, ou qui ne ſont pas d'efforts pour ſe ſoutenir ou pour marcher, au lieu qu'il eſt fort grand en ceux qui perdent l'équilibre, ou qui eſſayent des mouvemens dont ils ne ſont plus capables; d'ailleurs, j'avois pris la précaution de tenir le pied & la jambe élevés, & par conſéquent de fléchir en quelque ſorte la cuiſſe ſur le baſſin, ce qui avoit conſidérablement relâché le muſcle droit antérieur de la cuiſſe, l'un des plus forts extenſeurs du genou, & à l'action duquel on doit principalement attribuer les grands dérangemens qui accompagnent pour l'ordinaire la fracture de la rotule.

Ces réflexions me conduiſirent à penſer que peut-être le moyen dont j'avois été obligé de me contenter, ſuffiſoit pour obtenir la guériſon de la fracture de la rotule en travers: j'eus bientôt occaſion de vérifier cette préſomption dans deux cas qui ſe préſentèrent à la ſuite de celui dont je viens de parler, & je vis que l'omiſſion des bandages ne mettoit aucun obſtacle à la conſolidation. Ce n'eſt pas que j'euſſe cru pouvoir me permettre de ne pas y appliquer l'appareil dont j'avois fait uſage dans des maladies de cette eſpèce, mais il étoit devenu ſi lâche qu'il eût été inutile au maintien des pièces fracturées, ſi elles euſſent eu la moindre tendance à s'écarter. Voyant que les choſes étoient en bon état, je ne penſai pas à le renouveler, & lorſqu'enfin il fut devenu ſale & qu'il fallut le lever, je n'en mis point un autre & laiſſai la partie à nu, avec la précaution de tenir la jambe étendue & la cuiſſe légèrement fléchie. Ces faits qui ſe ſont paſſés il y a déjà pluſieurs

années, ne se présentent plus à ma mémoire avec assez d'exactitude, pour que je puisse en détailler les diverses circonstances; aussi les aurois-je tus s'ils ne venoient d'être confirmés par deux observations toutes récentes, & dont les sujets sont encore sous mes yeux. Une femme âgée de soixante ans, d'une constitution robuste & d'une humeur peu docile, se cassa la rotule droite en travers, le 5 Avril 1781; il se fit un écartement très-grand & fort douloureux, auquel je crus devoir remédier sur le champ par les soins d'usage, afin de ne pas la jeter dans le découragement où elle seroit infailliblement tombée si, négligeant d'appliquer un appareil contentif sur le genou, j'avois paru ne pas faire à son mal toute l'attention qu'il exigeoit, & ne pas lui apporter des secours qui lui étoient connus. Elle passa la nuit dans une grande agitation & avec beaucoup de douleurs. Le lendemain il s'étoit déjà fait un gonflement qui obligea de relâcher le bandage: malgré cela, les douleurs continuant à se faire sentir avec force, & la tuméfaction subsistant toujours, il fallut l'ôter tout-à-fait. Le Chirurgien qui soignoit la malade sous ma direction, étoit instruit des faits que j'ai rapportés précédemment, & il connoissoit les conséquences que j'en avois tirées; cependant, comme la malade l'intéressoit d'une manière particulière, il n'étoit pas sans inquiétude sur l'évènement de sa maladie. Je n'eus pas de peine à le rassurer à cet égard, & à lui persuader qu'elle ne guériroit pas moins aisément, pourvu que l'extrémité fût constamment tenue dans une situation favorable, & qu'il ne se fît pas de mouvement. Il eut bientôt sujet d'en être convaincu, lorsqu'il s'aperçut que les pièces fracturées ne s'écartoient pas; en conséquence, il ne pensa plus à rien appliquer que quelques compresses trempées dans une fomentation résolutive, au moyen de laquelle le genou est revenu à sa grosseur ordinaire. La guérison est aussi complète que dans aucun autre cas que j'aie vu; & quoique les pièces de la rotule se soient un peu écartées depuis que la malade a repris son genre de vie ordinaire, elle n'en est pas plus incommodée, & marche avec une grande liberté; au reste,

l'écartement, que l'on pourroit eſtimer de quatre à cinq lignes, me paroît moins conſidérable, parce que les deux extrémités de l'os ſe ſont fort amincies ſur leurs bords oppoſés, & s'approchent beaucoup au fond du ſillon qui les ſépare.

Un homme d'un âge aſſez avancé, s'étant fracturé la rotule en travers, on crut devoir en maintenir les pièces par un bandage qui fut appliqué avec beaucoup d'adreſſe, mais qui étoit un peu ſerré ; heureuſement il n'y avoit pas encore long-temps quand je vis le malade, & la douleur & le gonflement n'avoient pas fait des progrès bien conſidérables; je fis ôter l'appareil, & je me contentai de laiſſer l'extrémité dans la ſituation où on l'avoit miſe. Un oreiller placé ſous la cuiſſe, la maintenoit à demi fléchie ſur le tronc, & d'autres oreillers accumulés ſous la jambe, ne permettoient au genou qu'une flexion très-légère; je ne tardai pas à m'apercevoir que la peſanteur du corps & celle du membre dérangeoient cette ſituation, & j'imaginai de faire attacher aux quatre coins de l'oreiller le plus élevé de ceux ſur leſquels la jambe étoit placée, de larges rubans de fil, que je fis paſſer ſur les tringles du lit, qui étoit à colonnes; par ce moyen, la jambe ſe trouva ſuſpendue, & il n'y eut plus à craindre qu'elle affaiſſât l'oreiller ſur lequel elle portoit: les choſes ſont reſtées en cet état tout le temps de la cure, qui n'a duré que le temps ordinaire, & dont les ſuites ont été auſſi heureuſes qu'elles ont coutume de l'être.

Ce n'eſt donc pas par des bandages, dont l'action eſt toujours inſuffiſante, & qui peuvent donner lieu à des accidens plus ou moins graves, qu'on doit chercher à contenir la fracture en travers de la rotule; c'eſt par une bonne ſituation, qui conſiſte à mettre le genou dans une légère extenſion, & à ſoutenir la cuiſſe à demi-fléchie ſur le tronc; par ce moyen, les muſcles extenſeurs de la jambe, raccourcis autant qu'ils peuvent l'être, n'exercent plus ſur la partie ſupérieure de la rotule, qu'une action médiocre, qui eſt ſuffiſamment compenſée par la réſiſtance que lui offrent les fibres aponévrotiques des parties du triceps crural, connues ſous les

noms de *vaste interne* & de *vaste externe*, dont cet os est enveloppé. On sait qu'un muscle, dont la continuité est détruite, diminue sur le champ de longueur, en vertu de son action tonique, mais cela n'arrive qu'autant qu'il est dans la tension; lorsqu'il est possible de le mettre dans le relâchement, ses parties cessent de s'éloigner, souvent même elles s'approchent & chevauchent: on a observé cet effet dans les ruptures du tendon d'achille, & je l'ai vu dans des plaies qui intéressoient des parties charnues. Il ne s'agit donc que de procurer le relâchement des muscles qui se fixent à la partie supérieure de la rotule, & c'est ce qu'on obtient aisément par le procédé indiqué: en vain craindroit-on les contractions auxquelles la douleur & l'irritation peuvent donner lieu; s'il en arrive, on s'y opposeroit mal par des bandages, ou s'ils y mettoient obstacle, ils exposeroient à un danger plus certain, par les engorgemens auxquels ils donneroient lieu. Qui sait même si les irritations dont les malades se plaignent quelquefois, ne sont pas l'effet de la pression que les bandages leur font éprouver ? Le premier soin de ceux qui sont appelés pour traiter une fracture de la rotule, est de mettre un appareil convenable, ce qu'ils font souvent avant que les parties aient eu le temps de se tuméfier, comme cela doit arriver par la nature de l'accident: bientôt cet appareil se trouve trop serré; la crainte que l'on a que les pièces fracturées s'écartent de nouveau, empêche de le lever, & l'engorgement & la douleur deviennent plus considérables qu'ils ne l'eussent été si on se fût contenté de donner à la partie une situation qui favorisât le relâchement & l'inaction des muscles.

On pourroit croire que pour maintenir les pièces de la rotule l'une contre l'autre, il est nécessaire de mettre le genou dans une extension parfaite, & par conséquent de tenir le pied fort élevé: rien en effet n'est plus propre à procurer le plus grand relâchement possible aux parties du genou, & à permettre à la pièce inférieure de la rotule, de s'approcher de la supérieure; mais j'ai éprouvé dans le dernier des cas rapportés dans ce Mémoire, combien cette situation est incommode; le malade ressentit bientôt au jarret une douleur

à laquelle il lui fut impoſſible de réſiſter, & que je ne calmai qu'en donnant au genou une légère flexion. L'appareil dont je faiſois uſage, m'en facilita les moyens; il ne fallut que fléchir un peu davantage la cuiſſe ſur le baſſin, en élevant les oreillers ſur leſquels elle étoit poſée. La machine autrefois imaginée par M. Petit (Jean-Louis), & dont la deſcription ſe trouve dans les Mémoires de l'Académie, *pour 1718*, m'auroit été fort utile, mais je ne l'avois pas en ma diſpoſition. L'emploi que je me propoſe d'en faire dans l'eſpèce de fracture dont je parle, n'avoit pas été prévu par ſon auteur; cet emploi en étendra l'uſage, & contribuera peut-être à la faire mettre au nombre des inſtrumens dont les Chirurgiens ne peuvent ſe paſſer.

Je n'ignore pas combien les vues que je viens d'expoſer s'éloignent de la pratique reçue, mais je ſupplie l'Académie de vouloir bien faire attention qu'elles m'ont été ſuggérées par l'expérience, & qu'elles ſe rapprochent des principes adoptés dans le traitement des plaies & dans celui de la rupture du tendon d'achille: d'ailleurs, la fracture en travers de la rotule, n'eſt pas la ſeule à laquelle on ne doive remédier que par la ſituation; pourquoi, ce dont on convient généralement pour la fracture du col de l'humérus & pour celle du col du fémur, n'auroit-il pas lieu ici? Peut-être en eſt-il d'autres auxquelles on feroit auſſi-bien de n'oppoſer que le repos & la ſituation, que de tourmenter les malades par des moyens auſſi douloureux qu'ils ont peu de ſuccès: telle eſt, par exemple, la fracture de la clavicule, qui ne guérit jamais ſans un raccourciſſement ou chevauchement fort ſenſible, au moins ſi je puis en juger par ce qui eſt arrivé à celles que j'ai traitées ou vu traiter, & par ce que j'ai obſervé ſur un grand nombre de Soldats que j'ai trouvé en avoir été attaqués, & qui ont été ſoumis à mon examen pour que je rendiſſe compte de leurs diverſes infirmités.

FIN.

